Seconda prova scritta di Geometria 1, 4 febbraio 2020

1. i) Enunciare e poi dimostrare il teorema della determinazione di un'applicazione lineare su una base (unicità e esistenza).

ii) Sia $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ un'applicazione lineare. Dimostrare che esiste un'unica matrice $A = (a_{ij})$ (matrice $m \times n$ con coefficienti in K) tale che $f = L(A) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.

2. Trovare se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile o triangolarizzabile sui campi $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_{11}$ e $\mathbb{Z}_{17}$. Se A è triangolarizzabile ma non diagonalizzabile, trovare la forma normale di Jordan di A.

3. Trovare la forma normale di Jordan della matrice A, una base di Jordan e la matrice del cambiamento di coordinate, in dipendenza dai parametri a, b, c e d:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & b & c \\ 0 & 2 & 1 & d \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Sia $v_1, \ldots, v_n$ una base di V e $v_1^*, \ldots, v_n^*$ la base duale di V^*. Dimostrare che, per ogni $v \in V$ e $\phi \in V^*$,

$$v = v_1^*(v)v_1 + \ldots + v_n^*(v)v_n,$$

$$\phi = \phi(v_1)v_1^* + \ldots + \phi(v_n)v_n^*.$$

5. i) Enunciare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per uno spazio unitario, poi dimostrare la disuguaglianza triangolare per la norma associata al prodotto scalare (sul campo complesso, non reale!).

ii) Sia V uno spazio vettoriale euclideo; dedurre la formula di polarizzazione (che esprime il prodotto scalare in termini della norma).

iii) Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio euclideo V che preserva la norma di ogni vettore ($||f(v)|| = ||v||$, per ogni $v \in V$); dimostrare che f è ortogonale (preserva il prodotto scalare).