Esame di Probabilità e Statistica
Anno Accademico 2017/2018, 2^a sessione, 2^o appello (03/07/2018)
Corso di laurea triennale in Ingegneria Elettronica e Informatica
Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Università degli Studi di Trieste

1) Siano X ed Y variabili aleatorie indipendenti e con legge di Bernoulli di parametro $\frac{1}{4}$; inoltre, sia la variabile aleatoria $T = X + Y$ e sia $\{X_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ la catena di Markov a valori in $\{0, 1, 2\}$, avente come legge iniziale μ la legge di T e come matrice di transizione la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare $E[4X - 3Y]$ e $Var\,[-X - 2Y]$.
b) Calcolare $E[3T - X]$ e $Var\,[2T - 3Y]$.
c) Calcolare $P\,(X_1 = 2, X_2 = 1)$.
d) Stabilire se la catena di Markov converga in legge ed in caso affermativo determinare la legge limite.

2) Siano X ed Y variabili aleatorie indipendenti: la prima con legge uniforme continua sull'insieme $(1, 3)$; la seconda con legge data dalla densità

$$f_Y(y) = 3y^2 1_{(0,1)}(y),\ \forall\, y \in \mathbf{R};$$

inoltre, sia la variabile aleatoria $T = -X - Y$.
a) Calcolare $E[3X - Y]$ e $Var\,[2X - 1]$.
b) Calcolare $P\left(\{X > 2\} \cup \left\{Y < \frac{1}{2}\right\}\right)$.
c) Calcolare $E[2T + Y]$ e $Var\,[T - 3Y]$.
d) Calcolare $P\,(T > -2)$.

3) Sia $(X_1, ..., X_n)$, $n \geq 3$, un campione casuale estratto da una legge normale di media μ e varianza σ^2.
a) Calcolare $E\left[(X_1 - X_2)^2\right]$ e $E\,[X_1\,(X_1 - X_3)]$.
b) Nel caso $\sigma^2 = 2$, determinare uno stimatore di μ con il metodo della massima verosimiglianza.