SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI SUL CAMPIONAMENTO E LA PROBABILITÀ CONDIZIONATA

Esercizio 1. *Si scelgono 3 numeri da 1 a 90.*

1) Qual è la probabilità che tali 3 numeri siano presenti in una estrazione di 5 numeri?

Soluzione. I casi possibili sono $\binom{90}{5}$ ed i casi favorevoli sono $\binom{87}{2}$; la probabilità cercata è quindi

$$\frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{11748} =\sim 8,51 \cdot 10^{-5}.$$

In alternativa, si può usare la v.a. ipergeometrica X di parametri $n = 90$, $h = 3$, $k = 5$ (che esprime la cardinalità dell'insieme dei numeri scelti presenti nell'estrazione); la probabilità è di nuovo

$$P(X = 3) = \frac{\binom{h}{3}\binom{n-h}{k-3}}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}}.$$

2) Qual è la probabilità che almeno 2 di tali 3 numeri siano presenti in una estrazione di 5 numeri?

Soluzione. La probabilità che esattamente 3 numeri siano presenti nell'estrazione è stata calcolata al punto precedente. La probabilità che esattamente 2 numeri siano presenti è data da

$$P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{87}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{85}{11748} =\sim 7,23 \cdot 10^{-3}.$$

Quindi, la probabilità cercata è $P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{43}{5874} =\sim 7,32 \cdot 10^{-3}$.

3) Se i numeri scelti sono 4, qual è la probabilità che esattamente 2 di tali 4 numeri siano presenti in almeno una tra 10 estrazioni di 5 numeri?

Soluzione. La probabilità che esattamente 2 di tali 4 numeri siano presenti in una estrazione è

$$P = \frac{\binom{4}{2}\binom{86}{3}}{\binom{90}{5}} =\sim 0.0139;$$

quindi, la probabilità che ciò non avvenga è $1 - P$ e la probabilità che ciò non avvenga in nessuna delle 10 estrazioni è $(1 - P)^{10}$. La probabilità che ciò avvenga in almeno una delle 10 estrazioni è quindi $1 - (1 - P)^{10} =\sim 1 - (1 - 0,0139)^{10} =\sim 0,131$.

Esercizio 2. *Un'urna contiene 5 palline bianche e 7 palline nere.*

1) Estraggo 3 palline contemporaneamente. Qual è la probabilità che siano tutte dello stesso colore?

Soluzione. Siano gli eventi

- B: si estraggono 3 palline bianche;
- N: si estraggono 3 palline nere.

Si ha

$$P(B) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{22}, \quad P(N) = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{7}{44};$$

quindi, essendo $B \cap N = \varnothing$, la probabilità cercata è $P(B \cup N) = P(B) + P(N) = \frac{9}{44} =\sim 0,204$.

2) Estraggo una pallina, ne controllo il colore e la rimetto nell'urna. Estraggo una seconda pallina. Qual è la probabilità che sia dello stesso colore della prima pallina?

Soluzione. Siano gli eventi

- B_1: la prima pallina estratta è bianca;
- B_2: la seconda pallina estratta è bianca;
- N_1: la prima pallina estratta è nera;
- N_2: la seconda pallina estratta è nera.

Poiché il campionamento è con reimmissione, si ha

$$P(B_1) = P(B_2) = \frac{5}{12}, \qquad P(N_1) = P(N_2) = \frac{7}{12},$$
$$P(B_2|B_1) = P(B_2), \qquad P(N_2|N_1) = P(N_2),$$

da cui

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) = P(B_1)P(B_2) = \frac{25}{144},$$
$$P(N_1 \cap N_2) = P(N_2|N_1)P(N_1) = P(N_1)P(N_2) = \frac{49}{144}.$$

Quindi, la probabilità cercata è $P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap N_2) = 37/72 =\sim 0,513$.

3) Estraggo una pallina, non ne controllo il colore e non la rimetto nell'urna. Estraggo una seconda pallina. Qual è la probabilità che la seconda pallina sia bianca?

Soluzione. Siano gli eventi come nel punto precedente; si ha

$$P(B_1) = \frac{5}{12}, \quad P(N_1) = \frac{7}{12}, \quad P(B_2|B_1) = \frac{4}{11}, \quad P(B_2|N_1) = \frac{5}{11};$$

quindi, per la formula delle alternative, si ottiene

$$P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|N_1)P(N_1) = \frac{5}{12} =\sim 0,416.$$

Si noti che questo risultato si poteva dedurre direttamente dal teorema del campionamento senza reimmissione.

4) Estraggo una pallina, vedo che è bianca e non la rimetto nell'urna. Estraggo una seconda pallina. Qual è la probabilità che la seconda pallina sia bianca?

Soluzione. Con le notazioni del punto precedente, la probabilità cercata è $P(B_2|B_1) = 4/11 =\sim 0,363$.

Esercizio 3. *Sono date 10 urne numerate da* 1 *a* 10 *tali che l'urna i-esima contenga i palline bianche e* $10-i$ *palline nere.*

1) Da un'urna scelta a caso estraggo una pallina. Qual è la probabilità che la pallina estratta sia bianca?

Soluzione. Siano gli eventi

- A_i: l'urna scelta è la $i-$esima;
- B: la pallina estratta è bianca.

Si ha

$$P(B|A_i) = \frac{i}{10}, \quad P(A_i) = \frac{1}{10}, \forall\, i \in \{1, \ldots, 10\},$$

da cui

$$P(B) = \sum_{i=1}^{10} P(B|A_i)P(A_i) = \sum_{i=1}^{10} \frac{i}{100} = \frac{10 \cdot 11}{2 \cdot 100} = \frac{11}{20} = 0,55.$$

2) Da un'urna scelta a caso estraggo contemporaneamente due palline che risultano essere nere. Qual è la probabilità che l'urna scelta sia la n. 1?

Soluzione. Sia l'evento C: si estraggono due palline nere. Si ha

$$P(C|A_{10}) = 0, \quad P(C|A_9) = 0, \quad P(C|A_i) = \frac{\binom{10-i}{2}}{\binom{10}{2}}, \forall\, i \in \{1, \ldots, 8\}.$$

Quindi

$$P(C) = \sum_{i=1}^{10} P(C|A_i)P(A_i) = \sum_{i=1}^{8} \frac{\binom{10-i}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{1}{10},$$

da cui

$$P(A_1|C) = \frac{P(C|A_1) \cdot P(A_1)}{P(C)} = \frac{\frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{1}{10}}{\sum_{i=1}^{8} \frac{\binom{10-i}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{1}{10}} = \frac{72}{\sum_{i=1}^{8}(10-i)(10-i-1)}.$$

3) Da un'urna scelta a caso estraggo contemporaneamente due palline che risultano una bianca e una nera. Qual è l'urna che ha la massima probabilità di essere stata scelta?

Soluzione. Sia l'evento D: si estraggono una pallina bianca e una nera. Si ha

$$P(D|A_{10}) = 0, \qquad P(D|A_i) = \frac{(10-i)i}{\binom{10}{2}}, \forall\, i \in \{1, \ldots, 9\}.$$

Quindi

$$P(D) = \sum_{i=1}^{10} P(D|A_i)P(A_i) = \sum_{i=1}^{9} \frac{(10-i)i}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{1}{10},$$

da cui

$$P(A_i|D) = \frac{P(D|A_i) \cdot P(A_i)}{P(D)} = \frac{\frac{(10-i)i}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{1}{10}}{\sum_{i=1}^{9} \frac{(10-i)i}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{1}{10}} = \frac{(10-i)i}{\sum_{i=1}^{9}(10-i)i}.$$

Si vede facilmente che il massimo di $(10-i)i$ è raggiunto per $i = 5$ e quindi l'urna $n.$ 5 è quella che ha la probabilità massima di essere stata scelta.

Esercizio 4. *Sono date 3 urne tali che una contiene 2 palline bianche, una contiene 2 palline nere e la terza una pallina bianca e una pallina nera.*

1) Da un'urna scelta a caso estraggo una pallina bianca e poi, dalla stessa urna, estraggo l'altra pallina. Qual è la probabilità che questa sia bianca?

Soluzione. Siano gli eventi

- A_1: l'urna scelta è la prima;
- A_2: l'urna scelta è la seconda;
- A_3: l'urna scelta è la terza;
- B_1: la prima pallina estratta è bianca;
- B_2: la seconda pallina estratta è bianca.

Si ha

$$B_1 \cap B_2 = B_1 \cap A_1,$$

$$P(B_1|A_1) = 1,\ P(B_1|A_2) = 0,\ P(B_1|A_3) = \frac{1}{2},$$

da cui

$$P(B_1) = \sum_{i=1}^{3} P(B_1|A_i)P(A_i) = \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{2};$$

quindi, la probabilità richiesta è data da

$$\begin{aligned} P(B_2|B_1) &= \frac{P(B_2 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1 \cap A_1)}{P(B_1)} \\ &= \frac{P(B_1|A_1)P(A_1)}{P(B_1)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2) Da un'urna scelta a caso estraggo una pallina bianca. Scelgo a caso un'urna diversa ed estraggo un'altra pallina. Qual è la probabilità che questa sia bianca?

Soluzione. $\forall\, i, j \in \{1, 2, 3\}$ t. c. $i \neq j$, sia l'evento

$$A_{ij}\text{: si sceglie prima l'urna } i \text{ e poi l'urna } j;$$

inoltre, siano gli eventi B_1 e B_2 definiti in *1)*. Si ha

$$P(A_{ij}) = \frac{1}{6},\ \forall\, i, j \in \{1, 2, 3\} \text{ t. c. } i \neq j,$$

$$P(B_1 \cap B_2|A_{13}) = P(B_1 \cap B_2|A_{31}) = \frac{1}{2},$$
$$P(B_1 \cap B_2|A_{ij}) = 0, \ \forall \ (i,j) \in \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2)\},$$

da cui

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j \notin i} P(B_1 \cap B_2|A_{ij})P(A_{ij}) \\ &= P(B_1 \cap B_2|A_{13})P(A_{13}) + P(B_1 \cap B_2|A_{31})P(A_{31}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}; \end{aligned}$$

quindi, la probabilità richiesta è data da

$$P(B_2|B_1) = \frac{P(B_2 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

3) Da un'urna scelta a caso estraggo una pallina bianca. Scelgo di nuovo a caso una delle urne ed estraggo un'altra pallina. Qual è la probabilità che questa sia bianca?

Soluzione. $\forall\, i, j \in \{1, 2, 3\}$, sia l'evento

A_{ij}: si sceglie prima l'urna i e poi l'urna j;

inoltre, siano gli eventi B_1 e B_2 definiti in *1)*. Si ha

$$P(A_{ij}) = \frac{1}{9}, \ \forall\, i, j \in \{1, 2, 3\},$$

$$P(B_1 \cap B_2|A_{11}) = 1, \ P(B_1 \cap B_2|A_{33}) = \frac{1}{4},$$
$$P(B_1 \cap B_2|A_{13}) = P(B_1 \cap B_2|A_{31}) = \frac{1}{2},$$
$$P(B_1 \cap B_2|A_{ij}) = 0, \ \forall \ (i,j) \notin \{(1,1), (3,3), (1,3), (3,1)\},$$

da cui

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2) &= \sum_{i,j=1}^{3} P(B_1 \cap B_2|A_{ij})P(A_{ij}) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{4}; \end{aligned}$$

quindi, la probabilità richiesta è data da

$$P(B_2|B_1) = \frac{P(B_2 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$