SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SULLE VARIABILI ALEATORIE DISCRETE 1

Esercizio 1. *Sono date due urne denominate A e B: A contiene 10 palline bianche e 6 palline rosse; B contiene 8 palline bianche e 8 palline rosse. Si estraggono ripetutamente, con reimmissione, delle palline da ciascuna urna. Siano X ed Y le v.a. che indicano il tempo della prima estrazione di una pallina bianca rispettivamente da A e da B.*

i) Si determini $P(X = 4)$ e $P(Y > 3)$.

Soluzione. X è una variabile geometrica di costante $p_1 = \frac{5}{8}$, mentre Y è una variabile geometrica di costante $p_2 = \frac{1}{2}$. Si ha

$$P(X = 4) = p_1(1 - p_1)^3 = \frac{5}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^3 = \frac{135}{4096} \sim 0,033;$$

$$P(Y > 3) = (1 - p_2)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

ii) Si determini $P(Y \leq X + 2)$.

Soluzione. Siano $f_{(X,Y)}$, f_X ed f_Y le densità di probabilità rispettivamente di (X, Y), X ed Y; poiché X ed Y sono v.a. indipendenti, $\forall\, (x, y) \in (\mathbf{N}^*)^2$ si ha

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = p_1(1 - p_1)^{x-1} p_2\,(1 - p_2)^{y-1};$$

quindi

$$\begin{aligned}
P(Y \leq X + 2) &= \sum_{y \leq x+2} f_{(X,Y)}(x, y) = \sum_{x=1}^{+\infty} \sum_{y=1}^{i+2} p_1(1 - p_1)^{x-1} p_2\,(1 - p_2)^{y-1} \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{i+2} \frac{5}{16}\left(\frac{3}{8}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^j \quad \text{(ponendo } x - 1 = i,\ y - 1 = j\text{)} \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{5}{16}\left(\frac{3}{8}\right)^i \sum_{j=0}^{i+2}\left(\frac{1}{2}\right)^j = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{5}{16}\left(\frac{3}{8}\right)^i \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{i+2}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{5}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^i - \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{5}{64}\left(\frac{3}{16}\right)^i = 1 - \frac{5}{52} = \frac{47}{52}.
\end{aligned}$$

iii) Si determini la densità discreta della v.a. $Z = X + Y$.

Soluzione.

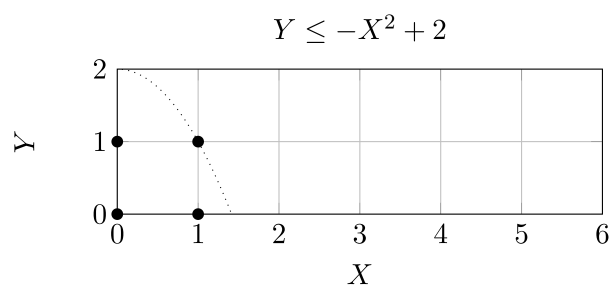
$$\forall\, z \in \mathbf{N}\backslash\{0,1\},\ P(Z=z) = \sum_{x\in\mathbf{N}^*} P(X=x)P(Y=z-x)$$
$$= \sum_{x=1}^{z-1} \frac{5}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^{x-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{z-x-1} = \frac{5}{16}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{z-2}\sum_{x=1}^{z-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$$
$$= 5\left(\frac{1}{2}\right)^{z+2}\left(4-4\left(\frac{3}{4}\right)^{z-1}\right) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{z} - \frac{20}{3}\left(\frac{3}{8}\right)^{z}.$$

Esercizio 2. *Siano X ed Y variabili aleatorie indipendenti: la prima con legge di Poisson di parametro 1; la seconda con legge di Bernoulli di parametro $\frac{1}{3}$.*
i) Si calcoli $P(Y \leq -X^2+2)$.

Soluzione. Poiché X ed Y sono v.a. indipendenti, il vettore aleatorio (X,Y) ha densità

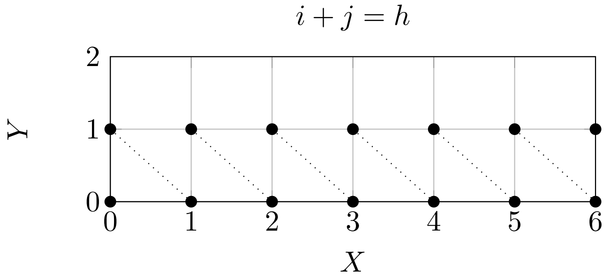
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}e^{-1}\dfrac{1}{x!} & \text{se } x\in\mathbf{N},\ j=0 \\ \dfrac{1}{3}e^{-1}\dfrac{1}{x!} & \text{se } x\in\mathbf{N},\ j=1 \end{cases} ;$$

quindi



$$P(Y\leq -X^2+2) = f_{X,Y}(0,0)+f_{X,Y}(0,1)+f_{X,Y}(1,0)+f_{X,Y}(1,1)$$
$$= \frac{2}{3}e^{-1}+\frac{2}{3}e^{-1}+\frac{1}{3}e^{-1}+\frac{1}{3}e^{-1} = 2e^{-1}.$$

ii) Si determini la densità discreta della variabile aleatoria $Z = X+Y$.



Soluzione. Si ha

$$P(Z = 0) = f_{X,Y}(0,0) = \frac{2}{3}\, e^{-1};$$

$$P(Z = h) = f_{X,Y}(h-1,1) + f_{X,Y}(h,0) = \frac{1}{3}\, e^{-1}\, \frac{1}{(h-1)!}, + \frac{2}{3}\, e^{-1}\, \frac{1}{h!}$$
$$= \frac{1}{3}\, e^{-1}\, \frac{h+2}{h!},\ \forall\, h \in \mathbf{N}^*.$$

iii) Si calcoli $E[ZX]$ *e* $Var\,[-3Z]$.

Soluzione. Si ha

$$E[ZX] = E[(X+Y)X] = E[X^2 + XY] = E[X^2] + E[X]E[Y]$$
$$= Var\,[X] + (E\,[X])^2 + E[X]E[Y] = 1 + 1 + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{3};$$

$$Var\,[-3Z] = 9Var\,[X+Y] = 9Var\,[X] + 9Var\,[Y] = 9 \cdot 1 + 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 11.$$

Esercizio 3. *Il numero di chiamate che vengono fatte ad un centralino in un certo intervallo di tempo si comporta come una v.a. di Poisson di parametro 2.*

i) Calcolare la probabilità che al centralino in quell'intervallo di tempo non arrivino chiamate.

Soluzione. La variabile aleatoria X in questione è una Poisson di parametro 2; quindi

$$P(X = n) = e^{-2} \cdot \frac{2^n}{n!},\ \forall\, n \in \mathbf{N}^*;$$

dunque, la probabilità desiderata è data da

$$P(X = 0) = e^{-2} = \sim 0.135.$$

ii) Calcolare la probabilità che al centralino in quell'intervallo di tempo arrivino almeno 2 chiamate.

Soluzione. La probabilità desiderata è data da

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$$
$$= 1 - (e^{-2} + 2e^{-2}) =\sim 0,594.$$

Esercizio 4. *Un'urna contiene 10 palline bianche e 10 palline rosse. Se ne estraggono 5 con reimmissione e si lancia una moneta equlibrata tante volte quante sono le palline bianche dell'estrazione. Sia X il numero di teste ed Y il numero di croci ottenute.*

i) Determinare le densità discreta delle variabili aleatorie X ed Y.

Soluzione. Sia Z la variabile aleatoria che indica il numero delle palline bianche estratte. Z è una variabile aleatoria binomiale $\mathcal{B}(5, \frac{1}{2})$ e quindi $P(Z = j) = \binom{5}{j}\frac{1}{2^5}$, $\forall\, j \in \{0, 1, ..., 5\}$. Di conseguenza, $\forall\, i \in \{0, 1, ..., 5\}$, si ha

$$P(X = i) = \sum_{j=0}^{5} P(X = i|Z = j)P(Z = j),$$

dove

$$P(X = i|Z = j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \binom{j}{i}\dfrac{1}{2^j} & \text{se } i \leq j \end{cases}.$$

Si ha dunque

$$P(X = i)$$
$$= \sum_{j=i}^{5} \binom{j}{i}\frac{1}{2^j}\binom{5}{j}\frac{1}{2^5} = \sum_{j=i}^{5} \frac{5!}{(5-j)!(j-i)!i!} \cdot \frac{1}{2^{5+j}}$$
$$= \frac{1}{i!}\frac{1}{2^5}\sum_{j=i}^{5} \frac{5!}{(5-j)!(j-i)!} \cdot \frac{1}{2^j} = \frac{1}{i!}\frac{1}{2^5}\sum_{h=0}^{5-i} \frac{5!}{(5-i-h)!(h)!} \cdot \frac{1}{2^{h+i}}$$
$$= \frac{5!}{(5-i)!i!}\frac{1}{2^{5+i}}\sum_{h=0}^{5-i} \frac{5-i!}{(5-i-h)!(h)!} \cdot \frac{1}{2^h}$$
$$= \binom{5}{i}\frac{1}{2^{5+i}}\sum_{h=0}^{5-i}\binom{5-i}{h} \cdot \frac{1}{2^h} = \binom{5}{i}\frac{1}{2^{5+i}}(\frac{1}{2}+1)^{5-i}$$
$$= \binom{5}{i}(\frac{3}{4})^{5-i}(\frac{1}{4})^i;$$

quindi $X \sim \mathcal{B}(5, \frac{1}{4})$. Inoltre, poiché $Y = 5 - X$, si ha $Y \sim \mathcal{B}(5, \frac{3}{4})$.

ii) Dire se X ed Y sono indipendenti.

Soluzione. X ed Y non sono indipendenti, poiché $Y = 5 - X$ e quindi, ad esempio, $P(X = 0, Y = 0) = 0 \neq P(X = 0)P(Y = 0)$.

Esercizio 5. *Siano X ed Y due v.a. geometriche indipendenti: la prima tale che*

$$P(X = 1) = 2P(X = 2);$$

la seconda di parametro $\frac{1}{2}$; inoltre, sia $Z = X + Y$.

i) Determinare la densità discreta della variabile aleatoria Z.

Soluzione. Indicando con p il parametro della v.a. X, si ha $P(X = 1) = p$ e $P(X = 2) = p(1 - p)$, da cui $p = 2p(1 - p)$, cioè $p = 2p^2$ e finalmente $p = \frac{1}{2}$; quindi, X ed Y sono due variabili aleatorie geometriche indipendenti di parametro $\frac{1}{2}$. Dunque, il vettore aleatorio (X, Y) ha densità

$$f_{(X,Y)}(i.j) = \frac{1}{2^{i+j}},\ \forall\, (i, j) \in (\mathbf{N}^*)^2,$$

da cui

$$P(Z = z) = \sum_{i=1}^{z-1} \frac{1}{2^{i+(z-i)}} = \sum_{i=1}^{z-1} \frac{1}{2^z} = \frac{z-1}{2^z},\ \forall\, z \in \mathbf{N}\backslash\{0, 1\}.$$

ii) Calcolare $P(X = 4 \,|\, Z \geq 7)$.

Soluzione. Dalla definizione di probabilità condizionata, si ha

$$\begin{aligned} P(X = 4 \,|\, Z \geq 7) &= \frac{P(\{X = 4\} \cap \{Z \geq 7\})}{P(Z \geq 7)} \\ &= \frac{P(X = 4, Y \geq 3)}{P(Z \geq 7)} = \frac{P(X = 4)P(Y \geq 3)}{P(Z \geq 7)}. \end{aligned}$$

Si ha inoltre

$$\begin{aligned} P(Y \geq 3) &= 1 - (P(Y = 1) + P(Y = 2)) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}; \\ P(Z \geq 7) &= 1 - (P(Z = 2) + P(Z = 3) + P(Z = 4) + P(Z = 5) + P(Z = 6)) \\ &= 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{3}{16} - \frac{1}{8} - \frac{5}{64} = \frac{7}{64}. \end{aligned}$$

Quindi

$$P(X = 4 \,|\, Z \geq 7) = \frac{\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{7}{64}} = \frac{1}{7}.$$

iii) Calcolare $P(Z \geq 7 \,|\, X = 4)$.

Soluzione.

$$
\begin{aligned}
P(Z \geq 7 \,|\, X = 4) &= \frac{P(\{Z \geq 7\} \cap \{X = 4\})}{P(X = 4)} = \frac{P(X = 4, Y \geq 3)}{P(X = 3)} \\
&= \frac{P(X = 4)P(Y \geq 3)}{P(X = 4)} = P(Y \geq 3) = P(Y > 2) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

iv) Determinare $E\left[Z^2\right]$.

Soluzione. Si ha

$$
\begin{aligned}
E[Z^2] &= E[(X+Y)^2] = E[X^2] + E[Y^2] + 2E[X]E[Y] \\
&= Var\,[X] + (E[X])^2 + Var\,[Y] + (E[Y])^2 + 2E[X]E[Y] \\
&= 2 + 4 + 2 + 4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 20.
\end{aligned}
$$