Esame di Analisi matematica I : esercizi

A.a. 2019-2020, sessione invernale, terzo appello

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________________

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1. Al variare di $a \in (0, +\infty)$ e per $[x]$ la parte intera, si calcoli

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+[x]^{-a}+[x]^{-2a}\right) - \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^3}dt}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}-1} = L_a$$

sostituire con x^{-2}

Note $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)} \xrightarrow{x\to+\infty} e^0 = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}-1}{x^{-2}} \overset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{x}\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)'}{-2x^{-3}} = \cancel{\lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}\lg(1+x)-\frac{1}{x^3}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}{-2x^{-3}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^3}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}{-2x^{-3}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^{-3}}{-2x^{-3}} = 1$$. Quindi il denom. può essere sostituito da x^{-2}.

$$-\int_x^{\infty} \frac{\sin(t)}{t^3}dt = \int_x^{\infty} \frac{(\cos t)'}{t^3} = \frac{\cos x}{x^3} - 3\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t^4} = \frac{\cos x}{x^3} - 3\frac{\sin x}{x^4} - 12\int_x^{\infty}\frac{\sin t}{t^5}$$

$$= \frac{\cos x}{x^3} - 3\frac{\sin x}{x^4} + O(x^{-4})$$

$$\lg\left(1+[x]^{-a}+[x]^{-2a}\right) = [x]^{-a} + o(x^{-a}) =$$

$$= (x+[x]-x)^{-a} + o(x^{-a}) = x^{-a}\left(1+\frac{[x]-x}{x}\right)^{-a} + o(x^{-a}) = x^{-a} + o(x^{-a})$$

Quindi numeratore

$$x^{-a} + \frac{\cos x}{x^3} + o(x^{-a}) + o(x^{-3}) \quad \begin{cases} x^{-a}(1+o(1)) & \text{se } a\in(0,3) \\ x^{-3}(1+\cos x) + o(x^{-3}) & \text{se } a=3 \\ \frac{\cos x}{x^3} + o(x^{-3}) & \text{se } a>3 \end{cases}$$

sono $o(x^{-2})$

$$L_a = \begin{cases} +\infty & a\in(0,2) \\ 1 & a=2 \\ 0 & a>2 \end{cases}$$

ESERCIZIO N. 2. Risolvere $\Re\left(z^2 + |z|^2 + iz^3 - 3iz|z|^2\right) > 0$ tracciando l'insieme delle soluzioni nel piano.

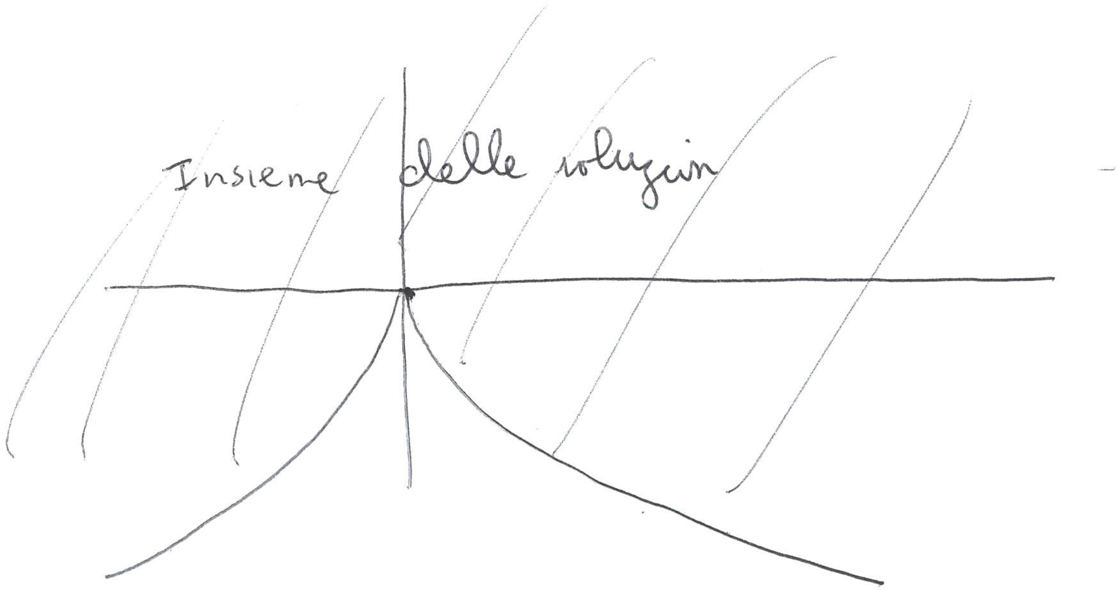
Sostituendo $z = x + iy$

$$\mathrm{Re}\Big(x^2 \cancel{- y^2} + 2ixy + x^2 \cancel{+ y^2} + i\left(x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3\right) - 3ix(x^2+y^2) + 3y(x^2+y^2)\Big) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(2x^2 \cancel{- 3x^2y} + y^3 \cancel{+ 3x^2y} + 3y^3\right)$$

$$= 2x^2 + 4y^3 > 0 \iff y^3 > -\frac{1}{2}x^2$$

$$\iff y > -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\, x^{\frac{2}{3}}$$



COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^{2x} \log\left(1+\frac{1}{t}\right) dt & \text{se } x > 0, \\ \displaystyle\int_0^x t^3 e^{t^2}\, dt & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

- si determini $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$;

Per $y=-x$ se $x<0$ $\int_0^x t^3 e^{t^2} dt = \int_0^y t^3 e^{t^2} dt$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty} \int_0^y t^3 e^{t^2} dt = +\infty$ perché per $t \geq 1$, $t^3 e^{t^2} \geq e^t$ e

$\lim_{y\to+\infty} \int_1^y e^t dt = \lim (e^y - 1) = +\infty$. Inoltre, con cambio di variabile

$\int_0^x t^3 e^{t^2} dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} y e^y dy =$ dove $t^2 = y$ $dy = 2t\,dt$

- si calcoli $f'(x)$ dove é definita, ed altrimenti si calcoli $f'_s(x)$ e $f'_d(x)$;

$= \frac{1}{2}\int_0^{x^2} y (e^y)' dy = \frac{1}{2} y e^y \Big]_0^{x^2} - \frac{1}{2}\int_0^{x^2} e^y dy = \frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2} + \frac{1}{2} = f(x)$ per $x<0$

$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \lg\left(1+\frac{1}{t}\right) dt = \lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt = \lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = \lg 2$

- si discuta concavitá e convessitá di f;

Per $x>0$ $f'(x) = 2\lg\left(1+\frac{1}{2x}\right) - \lg\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lg\frac{(2x+1)^2}{4x^2+4x} > 0$

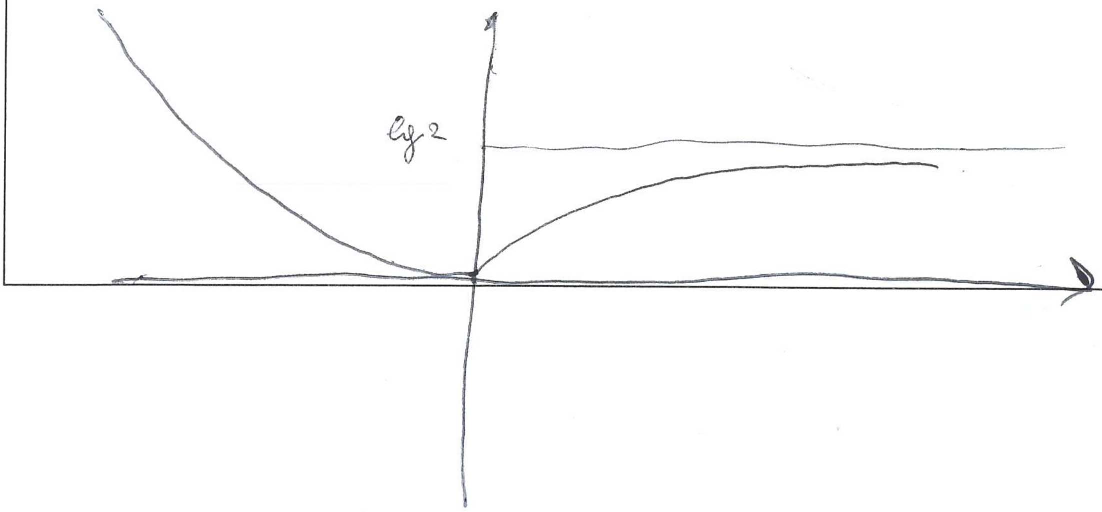
per $x<0$ $f'(x) = x^3 e^{x^2}$ $f'_s(0) \overset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$

$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} \overset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \lg\frac{(2x+1)^2}{4x^2+4x} = +\infty$, pertanto $f'_d(0)$ non esiste

- si tracci il grafico di f.

per $x<0$ $f''(x) = (2x^4+3x^2)e^{x^2} \geq 0$, f convessa in $[-\infty, 0]$

mentre per $x>0$ $f'(x)$ e' decrescente, f concava in $[0, +\infty)$



ESERCIZIO N. 4. Sia $f(x) = \int_0^x t\left(\int_0^t e^{1+s^2} ds\right) dt$:

(*i*) calcolare tutti i polinomi di McLaurin di $f(x)$;

Ricordiamoci $e^y = \sum_{j=0}^{n} \frac{y^j}{j!} + E_n(y)$ dove per $y>0$ $E_n(y) = \frac{e^c}{(n+1)!} y^{n+1} = o(y^n)$

con $0 \le c \le y$.

$$f(x) = e\int_0^x t\left(\int_0^t e^{s^2} ds\right)dt = e\int_0^x t\left(\int_0^t \sum_{j=0}^{n} \frac{s^{2j}}{j!} ds\right)dt + e\int_0^x t\left(\int_0^t \underbrace{E_n(s^2)}_{o(s^{2n})} ds\right)dt$$

$$= e\int_0^x t \sum_{j=0}^{n} \frac{t^{2j+1}}{j!(2j+1)} dt + e\int_0^x \underbrace{t\, o(t^{2n+1})}_{o(t^{2n+2})} dt =$$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{n} e \frac{x^{2j+3}}{j!(2j+1)(2j+3)}}_{P_{2n+3}} + o(x^{2n+3})$$

(*ii*) approssimare $f(1)$ con un numero razionale e con un errore minore di $\frac{1}{100}$.

Notare che l'o piccolo sopra si può stimare con

$$e\int_0^1 t\int_0^t E_n(s^2)ds \le e\int_0^1 t\int_0^t \frac{e^{s^2} s^{2n+2}}{(n+1)!} ds \le e^2 \int_0^1 \frac{t^{2n+4}}{(n+1)!(2n+3)}$$

$$= e^2 \frac{1}{(n+1)!(2n+3)(2n+5)} < \frac{9}{(n+1)!(2n+3)(2n+5)} < \frac{1}{200}$$

Risulta $(n+1)!(2n+3)(2n+5) > 1800$ falso per $n=2$

m vero per $n=3$.

Quindi $f(1) = P_9(1) + \text{Errore}$ con $|\text{Errore}| < \frac{1}{200}$

$P_9(1)$ non è razionale

$P_9(1) = e \cdot \sum_{j=0}^{3} \frac{1}{j!(2j+1)(2j+3)}$ dove la sommatoria è ovviamente

minore di 4. Ora espandi $e = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} + E_m(1)$ ed approssima

$f(1)$ con $\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!}\right) \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!(2j+1)(2j+3)}$ con $\left|E_m(1) \sum_{j=0}^{3} \frac{1}{j!(2j+1)(2j+3)}\right| < \frac{1}{200}$

Prendo n t.c. $\frac{4}{(m+1)!} < \frac{1}{200}$.