Richiami sul calcolo delle probabilità

Sommario

- Modello matematico
- Assiomi del calcolo delle probabilità
- Probabilità di un evento
- Probabilità condizionata
- Variabili aleatorie
- Funzione di distribuzione – Densità di probabilità
- Medie
- Variabili aleatorie multiple
- Funzione di distribuzione e densità di probabilità congiunta
- Indipendenza e incorrelazione

Definizioni

Esperimento aleatorio

Esperimento il cui risultato non può essere predetto con certezza

Es: *lancio di una moneta,*
lancio di un dado,
estrazione di una carta da un mazzo,
misura di una tensione di rumore in un dato istante,
misura del livello di un segnale telefonico in un dato punto, ecc
....

Definizioni

Uscita elementare

ogni possibile risultato dell'esperimento

Spazio dei campioni (S)

l'insieme di tutte le possibili uscite elementari (s_i)

- discreto *(facce di un dado)*
- non discreto *(valore di una tensione di rumore)*

Evento

qualsiasi sottoinsieme di S

Es: *uscita maggiore di 3,*

uscita compresa tra 0 e 2.25,

....

Definizioni

<u>Evento complementare</u> *(di un evento **A**)*

evento costituito da tutte quelle uscite

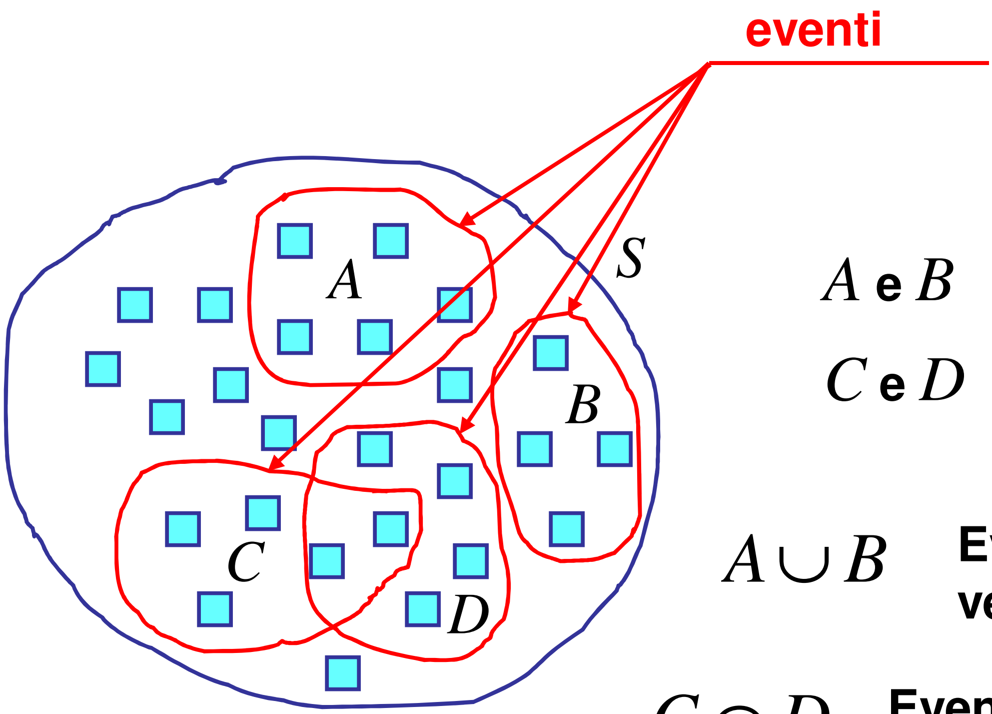
che non appartengono ad ***A***

viene indicato con $\overline{A}$

<u>Eventi disgiunti</u> *(che si escludono a vicenda)*

eventi che non hanno uscite elementari in comune

(se si verifica uno non si verifica l'altro, e viceversa)



esperimento casuale

A e B **disgiunti**

C e D **non disgiunti**

$A \cup B$ **Evento che si verifica se si verifica A oppure B ($A + B$)**

$C \cap D$ **Evento che si verifica se si verificano contemporaneamente C e D (CD)**

Ricordare che: ***le uscite elementari sono anch'esse eventi***

Sono eventi a due a due disgiunti

Probabilità di un evento

$P(A)$ ***Misura assegnata a ciascun evento in modo da rispettare le seguenti condizioni (assiomi):***

1) $0 \leq P(A) \leq 1$ per ciascun evento A

2) $P(S) = 1$

3) Se E_1, E_2, E_3 .. sono eventi a due a due disgiunti,

$(E_i \cap E_j = \varnothing \ per\ i \neq j)$, allora:

$$P(\cup_i E_i) = \sum_i P(E_i)$$

Conseguenze

Dagli assiomi della probabilità discende che:

a) $P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)$

b) $P(\varnothing)=0$

c) $P\left(E_1 \cup E_2\right)=P\left(E_1\right)+P\left(E_2\right)-P\left(E_1 \cap E_2\right)$

Uscite elementari $\Longrightarrow$ ***eventi tra loro disgiunti***

Se S ***è discreto,***

$$P(E)=\sum_i P(uscita \;\; elementare \;\; i-esima \;\; \subset E)$$

Esempio

Es:

esperimento:

estrazione di una carta da un mazzo di 52 carte

E = {uscita di una figura}

Per simmetria tutte le uscite elementari avranno la stessa probabilità.

Per l'assioma 2) $P(\text{uscita elementare}) = 1/52$

Quindi $P(E)=12/52$

$\boxed{P(E_1 / E_2)}$

Dati due eventi E_1 e E_2 si definisce

probabilità di E_1 condizionata a E_2

la probabilità di E_1 allorquando si sa che E_2 si è verificato

$$P(E_1 / E_2) = \frac{P(E_1 E_2)}{P(E_2)} \qquad [P(E_2) \neq 0]$$

Es.:

esperimento: lancio di un dado

$A = \{uscita \ \ maggiore \ di \ 3\}$

$B = \{uscita \ pari\}$

$P(A) = P(4) + P(5) + P(6) = 1/2$

$P(B) = P(2) + P(4) + P(6) = 1/2$

Probabilità di uscita > 3

sapendo che l'uscita è pari

$$P(A / B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(4) + P(6)}{1/2} = 2/3$$

Probabilità condizionata

Dato un evento A, $P[A]$ riflette la nostra conoscenza in merito al verificarsi di A. *(*probabilità a priori*)*

A volte questa conoscenza può cambiare se sappiamo che si è verificato un evento B

Esempio:

Esperimento: **esecuzione di un test su due circuiti integrati, provenienti dallo stesso wafer di silicio e da una linea di produzione di alta qualità.**

Risultato: ***a*** *accettato* ***r*** *respinto*

Uscite elementari: ***rr, ra, ar, aa***

Evento A: secondo circuito difettoso $A = \{ar, rr\}$

Evento B: primo circuito difettoso $B = \{ra, rr\}$

Probabilità condizionata

$P[A]$ Molto bassa *(i circuiti provengono da una linea di produzione di alta qualità)*

Se è noto che il primo circuito è risultato difettoso, la probabilità che anche il secondo sia respinto aumenta: (i due circuiti provengono dallo stesso wafer)

$$P[A/B] > P[A]$$

Esempio:

Probabilità a priori:

$$P[rr] = 0.01, \quad P[ra] = 0.01, \quad P[ar] = 0.01, \quad P[aa] = 0.97$$

Secondo circuito respinto $P[A] = P[rr] + P[ar] = 0.02$

Primo circuito respinto $P[B] = P[rr] + P[ra] = 0.02$

Probabilità condizionata

$$P[A/B] = \frac{P[AB]}{P[B]} = \frac{P[\text{ambedue respinti}]}{P[\text{primo respinto}]}$$

$$P[A/B] = \frac{P[rr]}{P[B]} = \frac{0.01}{0.02} = 0.5$$

Indipendenza

Definizione: due eventi A e B si dicono indipendenti se e solo se:

$$P[AB] = P[A]P[B]$$

Equivalentemente: due eventi A e B sono indipendenti se e solo se:

$$P[A/B] = P[A] \qquad P[B/A] = P[B]$$

Il fatto che si sia verificato B non altera la probabilità di A (e viceversa).

<u>Indipendenti e disgiunti non sono sinonimi</u>

Due eventi *A* e *B* sono disgiunti se non hanno uscite elementari in comune

$$A \cap B = \phi \qquad P[AB] = 0$$

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B]$$

Esempio:

Lungo una strada ci sono tre semafori.

Per semplicità possono essere soltanto color rosso o color verde e ogni uscita elementare (sequenza di tre semafori) sia equiprobabile

Spazio dei campioni: $S = \{rrr, rrv, rvr, rvv, vrr, vrv, vvr, vvv\}$

Evento R_i : semaforo *i-esimo* rosso

Evento V_i : semaforo *i-esimo* verde

$$R_2 = \{rrr, rrv, vrr, vrv\} \qquad P[R_2] = 1/2$$
$$V_2 = \{rvr, rvv, vvr, vvv\} \qquad P[V_2] = 1/2$$

$$P[R_2 V_2] = 0 \neq P[R_2]P[V_2] \qquad \text{eventi dipendenti}$$
$$R_2 \cap V_2 = \phi \qquad \text{eventi disgiunti}$$

$$R_2 = \{rrr, rrv, vrr, vrv\} \qquad P[R_2] = 1/2$$
$$R_1 = \{rvr, rvv, rrv, rrr\} \qquad P[R_1] = 1/2$$

$$R_1 \cap R_2 = \{rrr, rrv\} \qquad \text{eventi non disgiunti}$$
$$P[R_1 R_2] = 1/4 = P[R_1]P[R_2] \qquad \text{eventi indipendenti}$$

Alcune formule

Formula di Bayes

$$P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A)$$

Teorema della probabilità totale

Sia: $\{E_i\}_{i=1}^{N} = Partizione \;\; di \; S$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} \bigcup_{i=1}^{N} E_i = S \\ E_i E_j = \phi \quad i \neq j \end{array} \right\}$

Allora: $$P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(A/E_i)P(E_i)$$

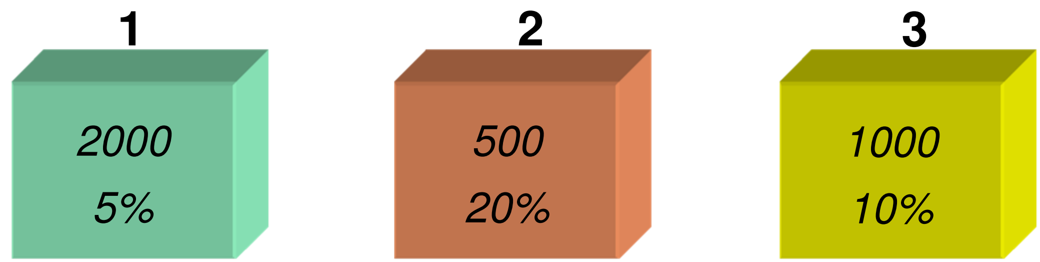
Se $P(E_1/E_2)=P(E_1)$

E_1 e E_2 si dicono **statisticamente indipendenti**

Se due eventi sono indipendenti $P(E_1E_2)=P(E_1)\;P(E_2)$

Esempio

Scatole con componenti elettronici



Esperimento 1:

scelta a caso una scatola, estrazione a caso di un componente

Valutare la probabilità che il componente sia difettoso

Esperimento 2:

Esame del componente estratto, che risulta difettoso

Valutare la probabilità che il componente provenga dalla scatola N. 3

S: 3500 uscite elementari

Evento B_i: Tutti i componenti della scatola i ($i = 1, 2, 3$)

Gli eventi B_i costituiscono una partizione di S

La scatola è scelta ***a caso*** $\Longrightarrow$ $P(B_i) = \dfrac{1}{3}$

Dai dati del problema si deduce che:

$$\begin{cases} P(Dif/B_1) = 100/2000 = 0.05 \\ P(Dif/B_2) = 100/500 = 0.20 \\ P(Dif/B_3) = 100/1000 = 0.10 \end{cases}$$

Dal teorema della probabilità totale:

$$P(Dif) =$$
$$= P(Dif/B_1)P(B_1) + P(Dif/B_2)P(B_2) + P(Dif/B_3)P(B_3)$$
$$= 0.05 \times \frac{1}{3} + 0.20 \times \frac{1}{3} + 0.10 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{60} \approx 0.117$$

Esempio

Esperimento 2:

Esame del componente estratto, che risulta difettoso

Valutare la probabilità che il componente provenga dalla scatola N. 3

La probabilità cercata è: $P\left(B_3/Dif\right)$

Per mezzo della formula di Bayes:

$$P\left(B_3/Dif\right)=\frac{P\left(Dif/B_3\right)P\left(B_3\right)}{P\left(Dif\right)}=\frac{\frac{1}{10}\times\frac{1}{3}}{\frac{7}{60}}=\frac{2}{7}\cong 0.286$$

Calcolo combinatorio

a) Se l'esperimento A ha $\boldsymbol{n}$ possibili uscite elementari e l'esperimento B ne ha $\boldsymbol{k}$, allora ci sono $\boldsymbol{nk}$ uscite elementari quando si eseguono entrambi gli esperimenti

A = lancio di una moneta (T,C)

B = lancio di un dado (1,2,3,4,5,6)

C = "lancio di una moneta e di un dado"

(T1,T2,T3,T4,T5,T6,C1,C2,C3,C4,C5,C6)

b) In generale, se un esperimento E è composto da $\boldsymbol{k}$ subesperimenti $E_1,\ldots E_k$, ove E_i ha n_i uscite elementari, allora E ha $\prod_{i=1}^{k} n_i$ uscite elementari

Calcolo combinatorio

Esempio: quante sono le possibili sequenze ordinate di 52 carte estratte da un mazzo di 52 carte?

$$52\times 51\times 50\times 49\times 48\times \ldots = 52!$$

Quante sono le possibili sequenze ordinate di n carte estratte da un mazzo di N carte?

$$N(N-1)(N-2)\ldots(N-n+1)=\frac{N!}{(N-n)!}$$

n - permutazioni di N oggetti distinti

c) Sequenze non ordinate (combinazioni)

Pur comprendendo gli stessi oggetti, due n – permutazioni di N oggetti possono essere diverse, se in esse gli oggetti sono disposti secondo un ordine differente.

Se l'ordine è irrilevante, si parla di combinazioni di n oggetti scelti tra N oggetti distinti

Poiché le sequenze comprendenti gli stessi n oggetti sono in numero di $n!$, il numero di n – combinazioni è :

$$\frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n}$$

Una squadra di basket ha 11 giocatori. In quanti modi diversi si possono scegliere i 5 partenti?

Risposta: $\binom{11}{5} = 462$

Si scelgano 7 carte da un mazzo di 52 carte. Qual è la probabilità di non trovare neanche una donna?

Risposta: ci sono $H = \binom{52}{7}$ possibili mani di 7 carte. Ognuna di esse ha probabilità $1/H$. Ci sono $H_{NQ} = \binom{48}{7}$ mani di 7 carte senza una donna. Poiché tutte le mani sono equiprobabili, la probabilità di non trovare neanche una donna in 7 carte è:

$$H_{NQ} \Big/ H = \frac{45\times 44\times 43\times 42}{52\times 51\times 50\times 49} = 0.5504$$

d) Sequenze con ripetizione

Sono sequenze di n oggetti estratti da N oggetti distinti, immaginando che ad ogni estrazione (subesperimento) l'oggetto precedentemente estratto venga re-inserito negli N possibili oggetti

Il loro numero è N^n

Esempio: quante sono le colonne distinte del Totocalcio?
N = 3 (numero oggetti distinti 1,2,X)
n = 13 (lunghezza delle sequenze)

$$3^{13} = 1.594.323$$

Prove ripetute indipendenti

Si consideri un esperimento che consiste nel ripetere più volte la medesima prova. Ogni volta il risultato può essere "successo" con probabilità p o "insuccesso" con probabilità $1\text{-}p$.

Inoltre il risultato di ciascuna prova è indipendente dall'esito delle precedenti.

Le uscite dell'esperimento sono sequenze di successi e insuccessi, rappresentabili ad esempio come sequenze di uni e di zeri.

Sia $S_{k,n}$ l'evento "k successi in n prove"

a) Ogni uscita con k successi ha probabilità $p^k(1\text{-}p)^{n\text{-}k}$

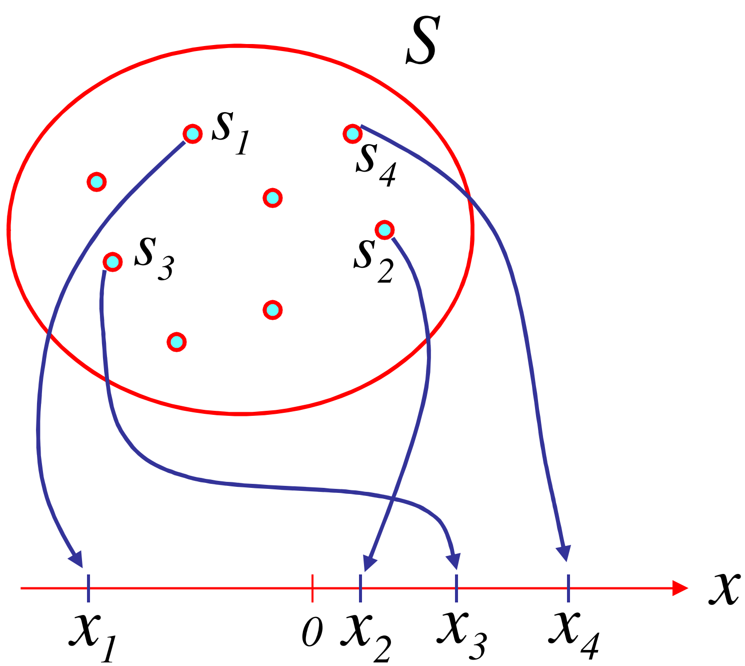
b) Ci sono $\binom{n}{k}$ uscite che hanno k successi.

Quindi:

$$P[S_{k,n}] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Definizione:

legge di corrispondenza tra uscite elementari e numeri reali



E' possibile definire degli eventi tramite una variabile aleatoria

$$Es: A = \{\mathbf{x} \le x\},$$
$$B = \{x_1 < \mathbf{x} \le x_2\},$$
$$C = \{\mathbf{x} > x\}$$

NB.

$\mathbf{x}$ **Nome della variabile aleatoria**

x **Numero reale,**

valore eventualmente assunto dalla variabile aleatoria

Funzione di distribuzione

Definizione:

$$\boxed{F_X(x) = P(X \le x)}$$

NB!

Consente di valutare la probabilità di eventi espressi tramite X:

$$P(X \le x_1) = F_X(x_1)$$

$$P(x_2 < X \le x_1) = F_X(x_1) - F_X(x_2)$$

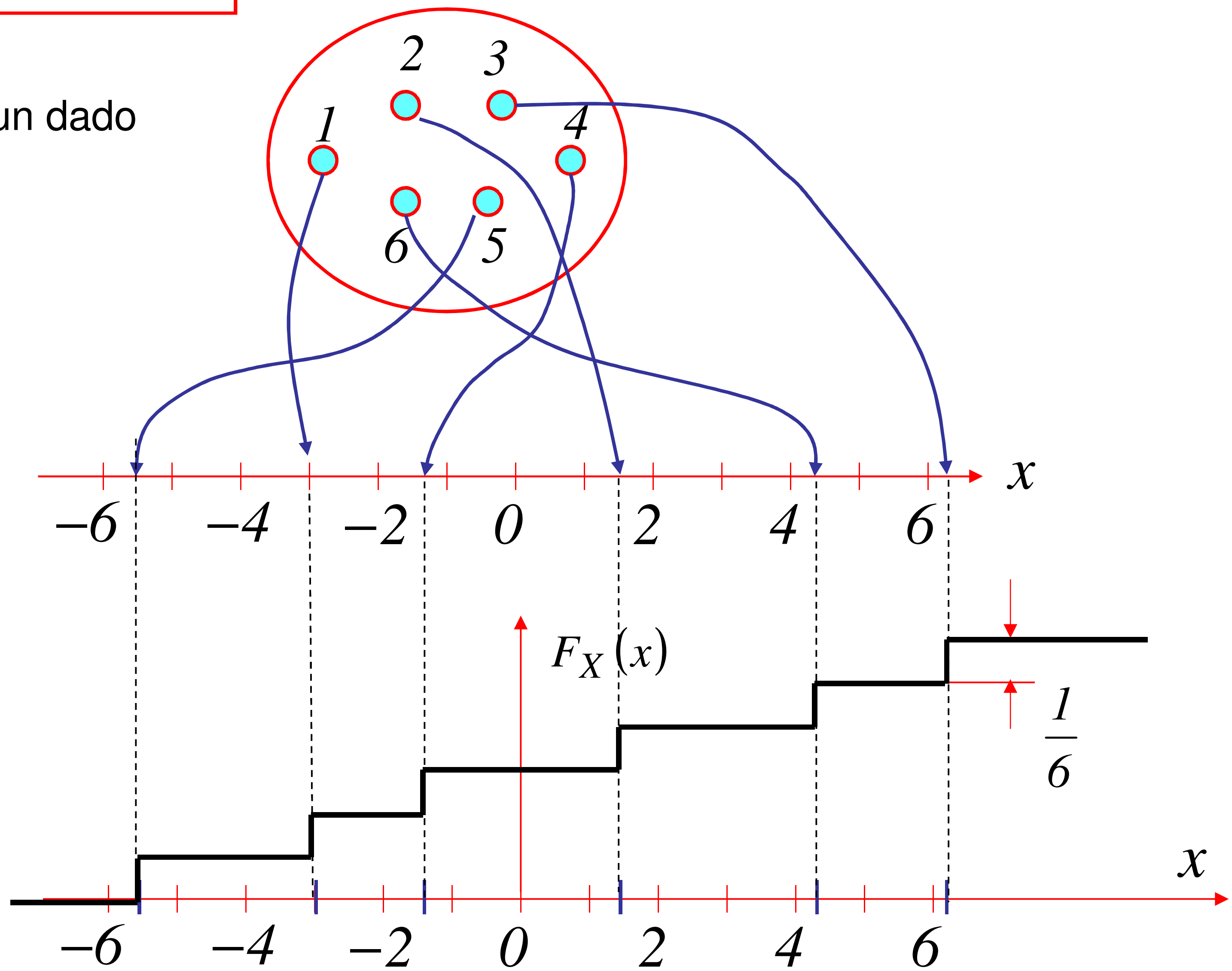
Complementare:

$$P(X > x_1) = 1 - F_X(x_1)$$

$F_X(x)$ è una probabilità e pertanto è compresa tra 0 e 1.

S insieme discreto

Lancio di un dado



Osservazioni:

La funzione di distribuzione presenta una discontinuità in corrispondenza ai valori x_k assunti (**con probabilità ≠ *0***) dalla variabile aleatoria

In corrispondenza ai valori x_k la funzione di distribuzione presenta un salto pari a $P(x_k)$

1) $F_X(x) \geq 0$

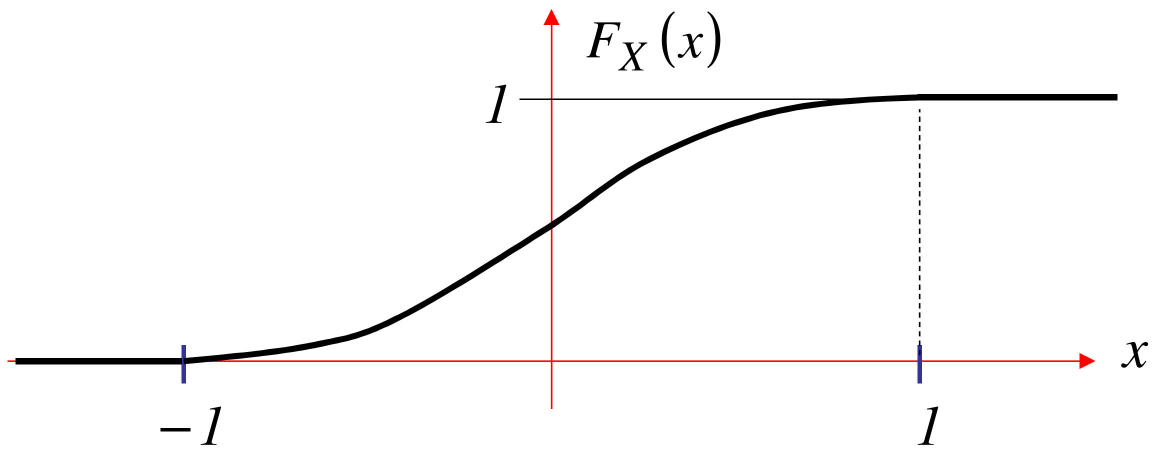
2) $F_X(-\infty) = 0, \qquad F_X(+\infty) = 1$

3) $x_1 > x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \geq F_X(x_2)$

4) $F_X(x)$ discontinua in x se $P(s; s \to x) \neq 0$

S insieme continuo

X = segnale telefonico, di ampiezza limitata tra 1 e -1



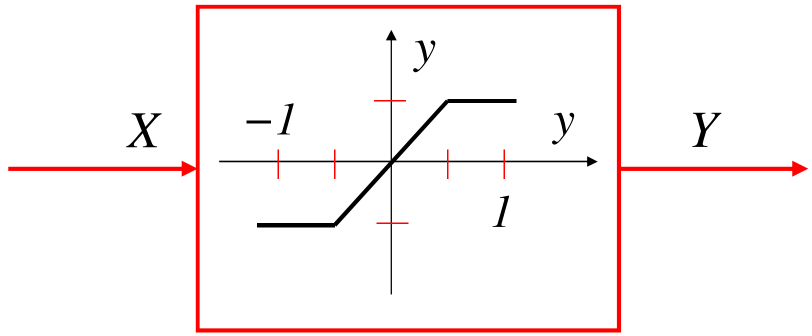
In questo caso $F_X(x)$ è continua

$$P(X = x; -1 < x < 1) = 0$$

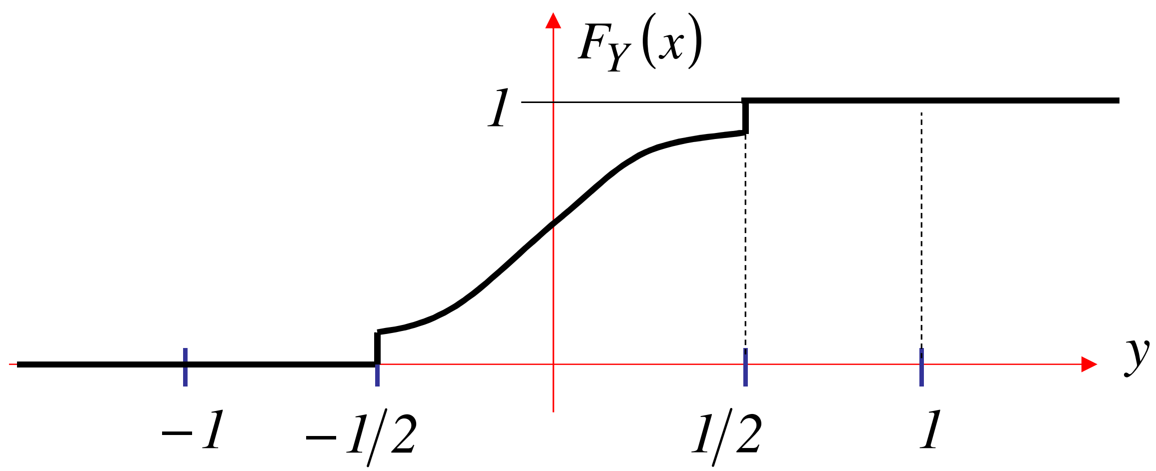
$$P(x_1 < X \leq x_2) \neq 0$$

S insieme continuo, con 2 valori con probabilità $\neq 0$

X **=** segnale telefonico, con ampiezza tra 1 **e** -1, limitato all'intervallo -0.5 e $+0.5$



$$P_Y(1/2) \neq 0$$
$$P_Y(-1/2) \neq 0$$

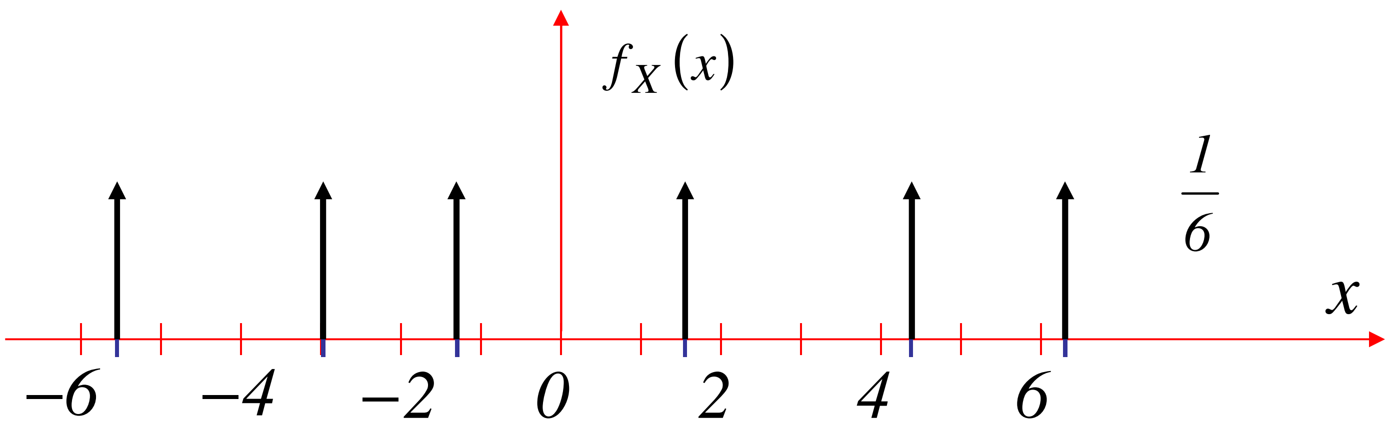


Definizione: $f_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X}{dx}$

Significato: $\boxed{f_X(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}F_X = P\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}}$

Se S discreto: $f_X(x) = \sum_{i=1}^{N} P(x_i)\delta(x - x_i)$

I valori $P(x_i)$ sono detti probabilità.



Esempio: lancio del dado

Proprietà

1) $f_X(x) \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$

3) $P(X \leq x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f_X(\xi)\,\mathrm{d}\xi = F_X(x)$

4) $P(x_2 < X \leq x_1) = \int_{x_2}^{x_1} f_X(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

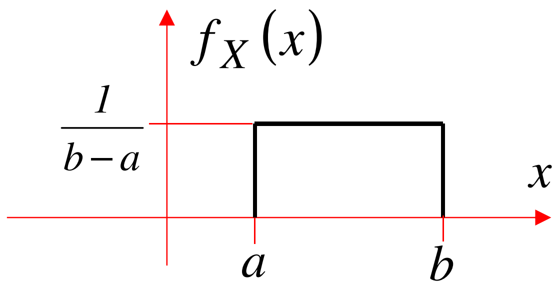
5) $P(X > x_1) = \int_{x_1}^{+\infty} f_X(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

$f_X(x)$ è una densità di probabilità ed è maggiore di 0.

$f_X(x)\mathrm{d}x$ è una probabilità elementare.

Uniforme

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

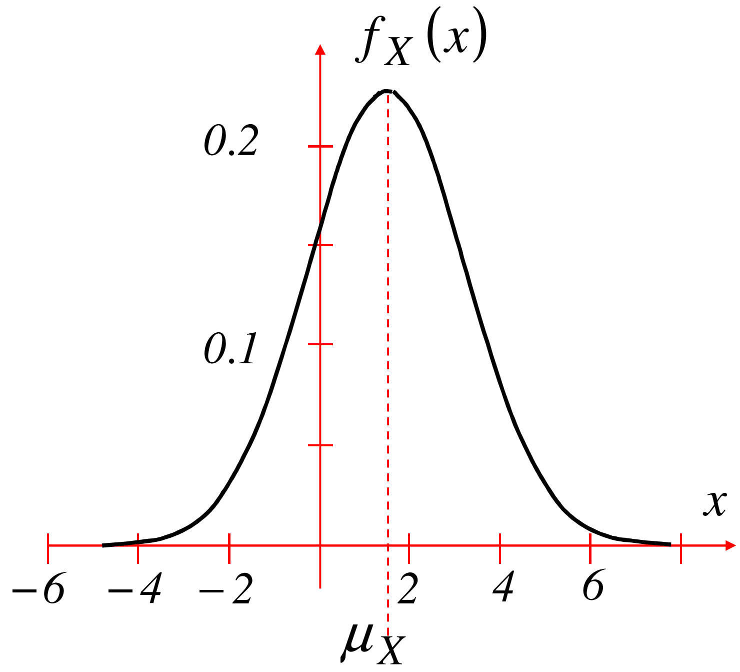


Gaussiana

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}$$

μ_X = valor medio

σ_X^2 = varianza



Binomiale (prove ripetute)

In corrispondenza ad un esperimento,

consideriamo l'evento A "successo" e l'evento $\overline{A}$ "insuccesso".

Sia: $P\{A\} = p$ $\quad\quad P\{\overline{A}\} = 1 - p$

variabile aleatoria X: x = numero di successi in N prove consecutive indipendenti

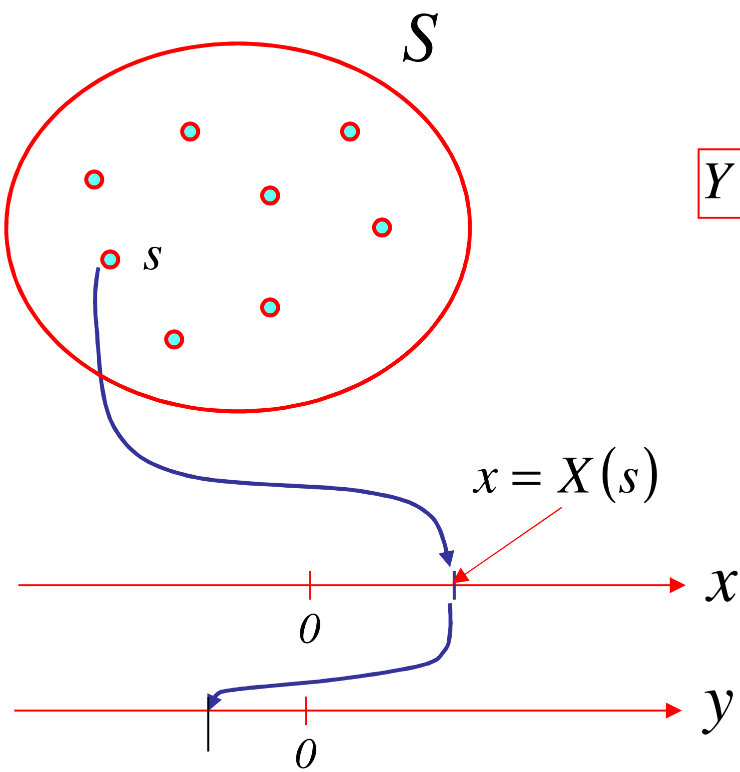
X assume i valori $0,1,2,\ldots N$ con probabilità:

$$P\{X = k\} = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

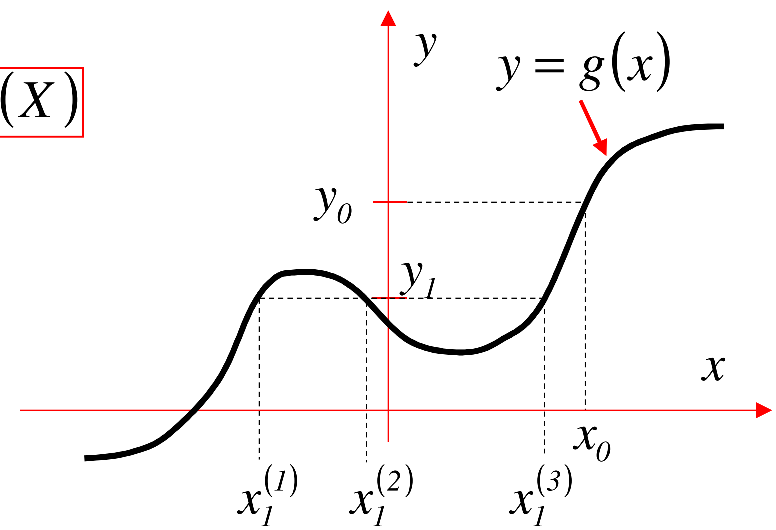
$$\boxed{f_X(x) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \delta(x-k)}$$

$$\left\{ \binom{N}{k} = \frac{N!}{(N-k)!\,k!} \right\}$$

Variabile aleatoria Y funzione di una variabile aleatoria X



$$\boxed{Y = g(X)}$$



$$y = g\{X(s)\}$$

Dette $x_i^{(k)}$ $(i=1,2,..,n)$ le soluzioni dell'equazione $g\left(x_i^{(k)}\right) = y_i$, si ha:

$$f_Y(y_i) = \frac{f_X\left(x_i^{(1)}\right)}{\left|g'\left(x_i^{(1)}\right)\right|} + \frac{f_X\left(x_i^{(2)}\right)}{\left|g'\left(x_i^{(2)}\right)\right|} + ... + \frac{f_X\left(x_i^{(n)}\right)}{\left|g'\left(x_i^{(n)}\right)\right|}$$

Valor medio di X:

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,\mathrm{d}x = m_X\,,\, \mu_X\,..$$

Per variabili casuali discrete:

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \sum_i \left[P\{X = x_i\}\delta(x - x_i)\right]\mathrm{d}x$$

$$= \sum_i P\{X = x_i\} \int_{-\infty}^{+\infty} x\delta(x - x_i)\,dx \; \boxed{= \sum_i x_i P\{X = x_i\}}$$

Valor medio di $Y = g(X)$:

Teorema del valor medio

$$\mu_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\,dy$$ ma anche $$\boxed{= \mathrm{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\,\mathrm{d}x}$$

formula importantissima !!!

Medie importanti

$$E\{X^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x)\,\mathrm{d}x$$ Momento di ordine n

$$E\{(X-\mu_X)^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^n f_X(x)\,\mathrm{d}x$$ Momento centrale di ordine n

Momento centrale di ordine 2 **=** Varianza $\left(\sigma_X{}^2\right)$

$$\sigma_X^2 = E\{(X-m_X)^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_X)^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Relazione importante: $\boxed{\sigma_X^2 = E\{X^2\} - \mu_X^{\mathbf{2}}}$

Esempi

1) variabile aleatoria uniformemente distribuita tra $-a$ e a

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_{-a}^{+a} x \frac{1}{2a} dx = 0$$

$$\sigma_X^2 = \int_{-a}^{+a} x^2 \frac{1}{2a} dx = \frac{a^2}{3}$$

2) variabile aleatoria gaussiana:

$$\mu_X = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}} dx$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2\, e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}} dx$$

Metodo per il calcolo della f_y

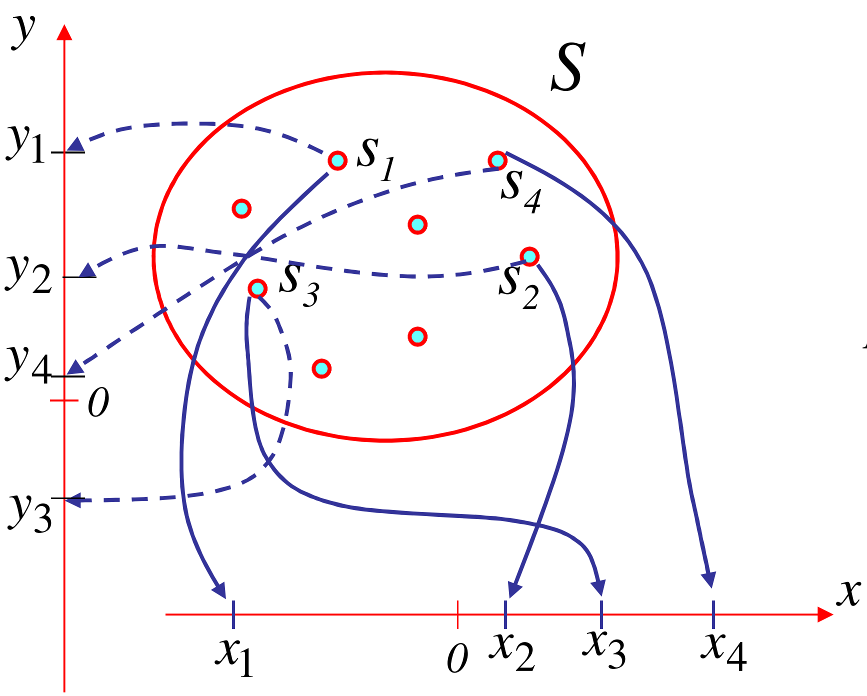
- Sia $Y = g(X)$
- Calcolare $F_Y(y) = P\{Y \le y\}$
- La funzione cercata è $\boxed{f_Y(y) = \frac{dF_Y(x)}{dy}}$
- Esempio: $\boxed{Y = aX + b,\ a > 0}$

$$F_Y(y) = P\{aX + b \le y\} = P\left\{X \le \frac{y-b}{a}\right\} = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{dF_Y(x)}{dy} = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)}$$

$$\boxed{\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b} \qquad \boxed{\sigma_Y^2 = \mathrm{E}[Y^2] - (\mathrm{E}[Y])^2 = a^2\sigma_X^2}$$

- Applicazioni: sia X una v. a. uniformemente compresa tra 0 e 1.
  Si considerino due costanti, a e b, con $b>a$.
  La variabile aleatoria $\boxed{Y = a + X(b\text{-}a)}$ è uniformemente compresa tra a e b.
- Sia N una v. a. gaussiana con media nulla e varianza unitaria (normale).
  $\boxed{Y = \sigma_y N + \mu_y,\ \sigma_y > 0}$ è una v.a. gaussiana con media μ_y e varianza σ_y^2.



Funzione di distribuzione congiunta

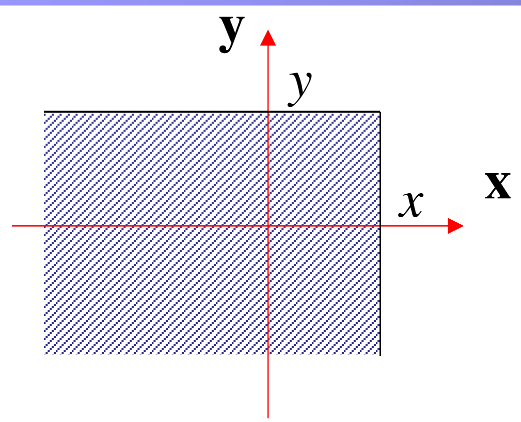
$$F_{XY}(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

$$P\{x_1 < X \leq x_2, Y \leq y\} = F_{XY}(x_2, y) - F_{XY}(x_1, y)$$

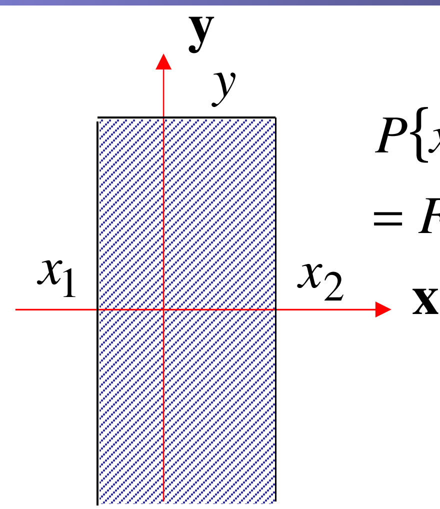
$$P\{X \leq x, y_1 < Y \leq y_2\} = F_{XY}(x, y_2) - F_{XY}(x, y_1)$$

$$P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} = F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) - F_{XY}(x_1, y_2) + F_{XY}(x_1, y_1)$$

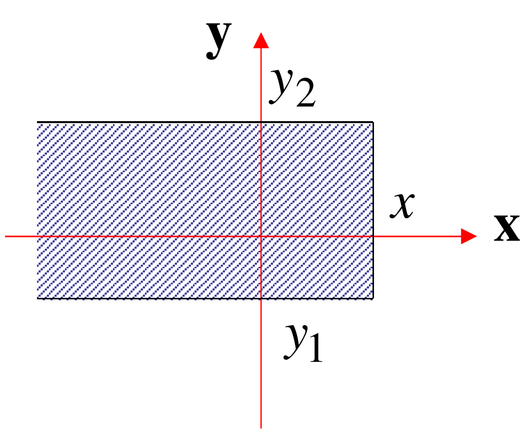
Funzione di distribuzione congiunta



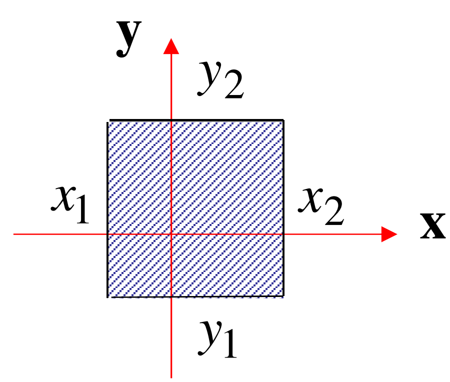
$$P\{X \le x, Y \le y\} = F_{XY}(x, y)$$



$$P\{x_1 < X \le x_2, y \le y\}$$
$$= F_{XY}(x_2, y) - F_{XY}(x_1, y)$$



$$P\{X \le x, y_1 < Y \le y_2\}$$
$$= F_{XY}(x, y_2) - F_{XY}(x, y_1)$$



$$P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$$
$$= F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1)$$
$$- F_{XY}(x_1, y_2) + F_{XY}(x_1, y_1)$$

Densità di probabilità congiunta

Definizione: $$\boxed{f_{XY}(x,y)=\frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}}$$

Da $f_{XY}(x,y)$ a $F_{XY}(x,y)$

$$\boxed{F_{XY}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)\mathrm{d}v\mathrm{d}u}$$

Poiché $f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = P\{x < X \le x+\mathrm{d}x,\, y < Y \le y+\mathrm{d}y\}$

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}y \qquad F_X(x) = F_{XY}(x,+\infty)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x \qquad F_Y(y) = F_{XY}(+\infty, y)$$

Variabili statisticamente indipendenti:

X e Y sono indipendenti se gli eventi: $\{x \in R_A\}$ e $\{y \in R_B\}$ sono indipendenti, qualunque siano gli insiemi R_A e R_B rispettivamente sugli assi x e y

In questo caso: $P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\}$

$$\Rightarrow \quad F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}, \text{ for } y \text{ that } f_Y(y) > 0$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}, \text{ for } x \text{ that } f_X(x) > 0$$

Se X e Y sono statisticamente indipendenti: $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x), \quad f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y),$

Esempio di variabili aleatorie non indipendenti

$$f_{XY}(xy) = \begin{cases} 3x & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad E[XY] = 3/10$$

Densità Marginali

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad E[X] = 3/4$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}\left(1 - y^2\right) & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad E[Y] = 3/8$$

Densità Condizionate

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1 - y^2} & \begin{matrix} 0 \le y < 1 \\ y \le x \le 1 \end{matrix} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \begin{matrix} 0 < x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{matrix} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Esempio

Nella stazione ferroviaria A tra le 8.00 e le 8.10 arrivano (in maniera completamente casuale) un treno da Nord ed uno da Sud.

$\mathbf{x} =$ Istante di arrivo (in secondi a partire dalle 8.00) del treno proveniente da Nord

$\mathbf{y} =$ Idem per il treno proveniente da Sud

Probabilità che il treno da Nord arrivi tra le 8.03 e le 8.04 e che quello da Sud arrivi tra le 8.01 e le 8.05:

$$P\{180 < x \leq 240,\ 60 < y \leq 300\}$$
$$= P\{180 < x \leq 240\} \times P\{60 < y \leq 300\}$$

$$= \frac{60}{600} \times \frac{240}{600} = 0.04$$

Variabili aleatorie incorrelate

Due variabili aleatorie si dicono incorrelate se: $\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$

indipendenza $\Rightarrow$ **incorrelazione**

ma in generale:

incorrelazione $\not\Rightarrow$ **indipendenza**

Appendice

- Siano X e Y due variabili aleatorie.
- Somma: sia $W=X+Y$. In generale risulta:

$$F_W(w) = P\{X+Y \le w\} = P\{Y \le w-X\} = \int F_{Y|X}(w-x) f_X(x)\mathrm{d}x$$

$$f_W(w) = \frac{\partial F_W(w)}{\partial w} = \int f_{Y|X}(w-x) f_X(x)\mathrm{d}x$$

Se sono indipendenti

$$f_W(w) = \int f_Y(w-x) f_X(x)\mathrm{d}x = f_X(w) \otimes f_Y(w)$$

- Prodotto. Si ipotizzi che X e Y siano a valori non negativi.

$$F_W(w) = P\{XY \le w\} = P\{Y \le w/X\} = \int_0^\infty F_{Y|X}(w/x) f_X(x)\mathrm{d}x$$

$$f_W(w) = \frac{\partial F_W(w)}{\partial w} = U(w)\int_0^\infty \frac{1}{x} f_{Y|X}\left(\frac{w}{x}\right) f_X(x)\mathrm{d}x$$

- Rapporto. Si ipotizzi che X e Y siano a valori non negativi

$$F_W(w) = P\{Y/X \le w\} = P\{Y \le wX\} = \int_0^\infty F_{Y|X}(wx) f_X(x)\mathrm{d}x$$

$$f_W(w) = \frac{\partial F_W(w)}{\partial w} = U(w)\int_0^\infty x f_{Y|X}(wx) f_X(x)\mathrm{d}x$$

Esempio

- Siano X e Y due variabili aleatorie u.c. tra 0 e 1.
- Somma: sia $W=X+Y$. Si ottiene:

$$f_W(w)=\begin{cases} 0 & w \le 0 \\ w & 0 \le w \le 1 \\ 2-w & 1 \le w \le 2 \\ 0 & w \ge 2 \end{cases}$$

- Prodotto: sia $W=XY$. Si ottiene:

$$f_W(w)=\begin{cases} 0 & w < 0 \\ -\ln(w) & 0 < w \le 1 \\ 0 & w \ge 1 \end{cases}$$

- Rapporto: sia $W=Y/X$. Si ottiene:

$$f_W(w)=\begin{cases} 0 & w < 0 \\ 1/2 & 0 < w \le 1 \\ 1/2w^2 & w \ge 1 \end{cases}$$

Funzione generatrice dei momenti

- Funzione generatrice dei momenti: $\Phi_X(s) = \mathrm{E}\left[e^{sX}\right] = \int e^{sX} f_X(x)\mathrm{d}x$
- Risulta: $\Phi_X(s=0) = 1$ $\quad$ $\mathrm{E}\left[X^n\right] = \left.\frac{d^n\Phi n_X(s)}{ds^n}\right|_{s=0}$
- Esempi: variabile aleatoria gaussiana, con media μ_y e varianza σ_y^2:

$$\Phi_X(s) = \exp\left(s\mu_x + s^2\sigma_x^2/2\right)$$

- Variabile aleatoria u.c. tra a e b:

$$\Phi_X(s) = \frac{\exp(bs) - \exp(as)}{s(b-a)}$$

- Variabile aleatoria esponenziale:

$$f_X(x) = \frac{1}{\mu_x}\exp\left(-\frac{x}{\mu_x}\right)U(x) \qquad \Phi_X(s) = \frac{1}{1 - s\mu_x} \qquad \sigma_X^2 = (E[x])^2 = \mu_X^2$$

- Sia $W=X+Y$, con X e Y indipendenti. Dalla: $f_W(w) = f_X(w) \otimes f_Y(w)$

  si ottiene: $\Phi_W(s) = \Phi_X(s)\Phi_Y(s)$

- Esempio: sia X una v.a di Bernoulli

  $X=1$ con probabilità p; $X=0$ con probabilità $1-p$.

  $\Phi_X(s) = 1 - p + pe^s$

- Sia Y la v.a. binomiale, che si ottiene sommando N v.a. di Bernoulli indipendenti. Pertanto:

$$\Phi_Y(s) = \left(1 - p + pe^s\right)^N \qquad \mathrm{E}[Y] = Np \qquad \sigma_Y^2 = Np(1-p)$$

Altri esempi di variabili aleatorie

- Geometrica: sia p la probabilità di successo di un esperimento, con $0 \le p \le 1$. Si effettuino prove ripetute indipendenti. La probabilità che il primo successo si abbia al k-mo tentativo è data dalla:

$$\boxed{P_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1} & k = 1,2,\ldots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}}$$

$$\Phi_X(s) = \frac{pe^s}{1-(1-p)e^s} \qquad \mathrm{E}[X] = \frac{1}{p} \qquad \sigma_X^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

- Poisson: Probabilità che si verifichino n eventi in un intervallo di tempo T (ad esempio che vengano trasmessi n pacchetti), quando il verificarsi di un evento è la risultante di infinite cause tra di loro indipendenti (ad esempio traffico prodotto da sorgenti indipendenti). L'intervallo tra due eventi è distribuito in maniera esponenziale, con valor medio $1/\lambda$.

$$\boxed{P_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda T}(\lambda T)^k / k! & k = 0,1,2,\ldots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}}$$

λ è il tasso di arrivo

$$\Phi_X(s) = e^{\lambda T\left(e^s - 1\right)} \qquad \boxed{\mathrm{E}[X] = \sigma_X^2 = \lambda T}$$

Generazione di valori una variabile aleatoria

- Si consideri una v.a. X la cui funzione di distribuzione, $u=F_X(x)$, è invertibile. I valori di u sono uniformemente distribuiti tra 0 e 1. Per ottenere i valori di x è sufficiente generare una sequenza di valori u uniformemente distribuiti fra 0 e 1 e poi calcolare $x=F_x^{-1}(u)$.

- V. a. esponenziale

$$f_X(x)=\frac{1}{\mu_x}\exp\left(-\frac{x}{\mu_x}\right)U(x)$$

$$F_X(x)=u=\left[1-\exp\left(-\frac{x}{\mu_x}\right)\right]U(x)$$

$$\boxed{x=-\mu_x\ln(1-u)}$$

- V.a. Weibull

$$f_X(x)=\frac{m}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{m-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^m\right]U(x)$$

$$\mathrm{E}[X]=\beta\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

$$\sigma_X^2=\beta^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{m}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{m}\right)\right]$$

$$\boxed{x=\beta\left(-\ln(1-u)\right)^{1/m}}$$

Calcolo del valor medio da una funzione di distribuzione

- Si consideri una v.a. a valori non negativi.
  Il valor medio si può calcolare utilizzando la formula:

$$\mathrm{E}[X] = \int_0^{\infty} [1 - F_X(x)] \mathrm{d}x$$

- Dimostrazione:

$$1 - F_X(x) = \int_x^{\infty} f_x(t) \mathrm{d}t$$

$$\int_0^{\infty} 1 - F_X(x) \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} f_x(t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} f_x(t) \int_0^{t} \mathrm{d}x \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} f_x(t) t \mathrm{d}t = \mathrm{E}[x]$$

- Esempio (esponenziale): $1 - F_X(x) = \exp\left(-\frac{x}{\mu_x}\right), \; x \geq 0$

$$\int_0^{\infty} [1 - F_X(x)] \mathrm{d}x = \mu_X$$

Generalizzazione

- Sia X una v.a. a valori non negativi e $Y=g(X)$.
  Il valor medio di Y si può calcolare utilizzando la formula:

$$\mathrm{E}[Y]=\int_0^\infty [1-F_X(x)]g'(x)\mathrm{d}x$$

- Esempio: $g(x)=\log_2(1+x)$ (capacità di un canale in funzione del rapporto segnale/rumore, x. Ipotizzando che x sia distribuito con legge esponenziale (fading di Rayleigh), $1-F_X(x)=\exp\left(-\frac{x}{\mu_x}\right),\ x\geq 0$
  la capacità media è data dalla:

$$C(\mu_x)=\frac{1}{\ln(2)}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\mu_x}\right)\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\exp\left(\frac{1}{\mu_x}\right)\frac{\mathrm{E}_1(1/\mu_x)}{\ln(2)}$$

dove $\mathrm{E}_1(x)=\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$ è l'integrale esponenziale.