ESAME DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE

Appello del 14-17 gennaio 2000

Prova scritta

Esercizio N. 1

Il sistema indicato in figura 1 esegue la multiplazione per divisione di frequenza (FDM) di 6 segnali telefonici. Nella medesima figura è mostrato lo spettro del segnale FDM desiderato. L'operazione viene fatta nel dominio tempo discreto, dopo aver campionato ciascun segnale TF con frequenza di campionamento pari a 8 KHz.

Ciascun sistema tempo discreto è costituito da un interpolatore seguito da un filtro passa basso, da un modulatore e da un ulteriore filtro passa banda. Supponendo questi filtri di tipo ideale, si valuti:

1) L'ordine degli interpolatori.
2) La frequenza di taglio dei filtri passa basso.
3) Le frequenze delle portanti dei modulatori.
4) Le frequenze di taglio (inferiore e superiore) dei filtri passa banda.
5) Il periodo T_{s2} della sequenza impulsiva da usare nel convertitore D/C.
6) La frequenza di taglio del filtro passa basso finale.

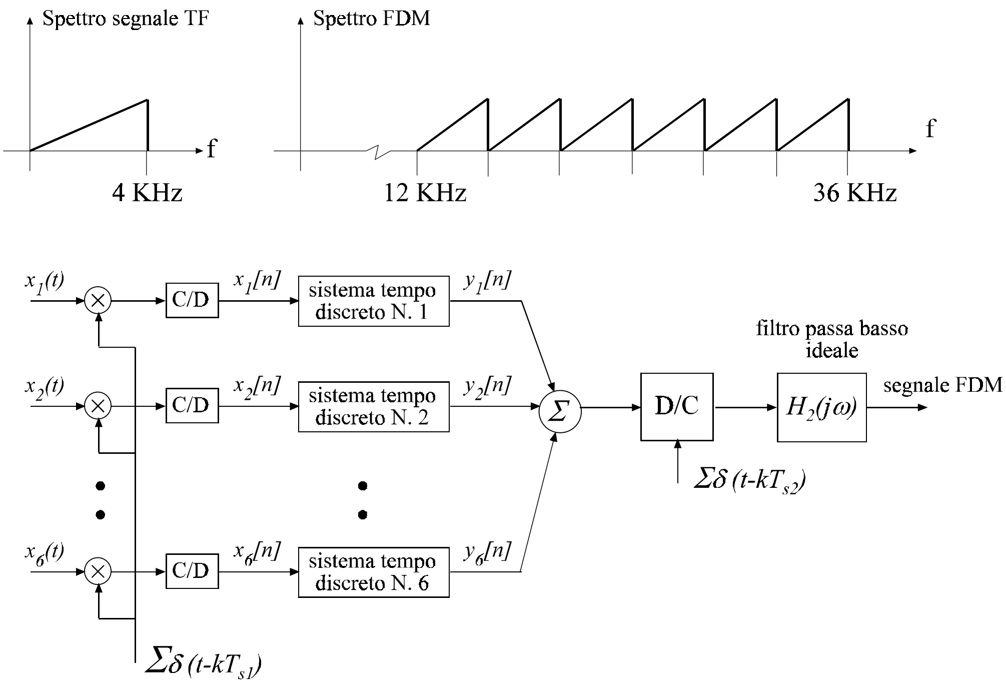

Fig. 1

Soluzione

Il sistema tempo discreto i-esimo è strutturato come in figura I.

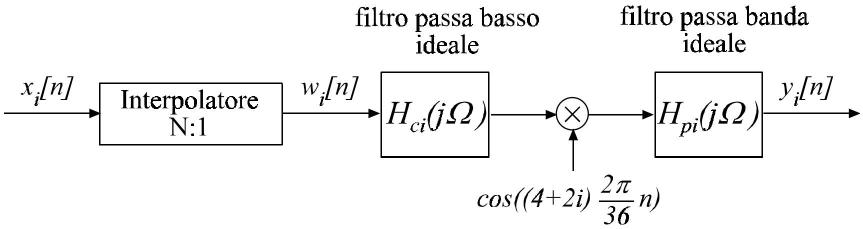

Fig. I

Lo spettro $X_i(\Omega)$ del segnale tempo discreto $x_i[n]$ occupa tutto lo spettro da 0 a π. Dopo interpolazione e filtraggio dovrà occupare la banda da 0 a $\pi/9$, in modo che tra le frequenze $\Omega = 0$ e $\Omega = \pi$ trovino spazio 9 intervalli ampi $\pi/9$. Di questi, solo 6 verranno occupati dagli spettri dei segnali telefonici multiplati. Pertanto l'ordine di interpolazione deve essere pari a *9* (inserimento di 8 zeri dopo ogni campione) e il filtro passa basso di risposta in frequenza $H_{ci}(j\Omega)$ dovrà avere frequenza di taglio pari a $\Omega_{ci} = \pi/9$. La portante da inviare all'i-esimo modulatore deve avere frequenza $\Omega_{0i} = \frac{(4+2i)}{36}2\pi$ ($i=1,..,6$). Poiché il moltiplicatore tra la portante e il segnale $w_i[n]$ produce una modulazione di tipo DSB, risulta necessario porre in cascata ad esso un filtro passa banda (o passa alto) che lasci passare solamente la banda laterale superiore. La sua frequenza di taglio inferiore deve essere pari a Ω_{0i}, mentre quella superiore è sufficiente sia maggiore di $\Omega_{0i} + \pi/9$. Dopo la conversione D/C, la frequenza π si deve trasformare nella frequenza angolare $\omega_M = 2\pi \times 36 \cdot 10^3$: ciò significa che la sequenza impulsiva usata nel convertitore D/C deve essere pari a $72KHz$. Un filtro passa basso ideale con frequenza di taglio pari a $36KHz$ permetterà di ottenere il segnale FDM richiesto.

Esercizio N. 2

Un sistema LTI, tempo discreto, stabile, causale, ha la seguente risposta in frequenza:

$$H(\Omega) = \frac{b}{1 - ae^{-j\Omega}} \quad ,$$

con a e b due costanti reali e con $|a| < 1$.

Sapendo che la sua risposta al gradino unitario presenta un andamento oscillatorio smorzato con sovraelongazione massima pari al 50% del valore finale e che quest'ultimo è pari a *1*, si determinino le costanti a e b.

Soluzione

Per le proprietà della trasformata, la trasformata di Fourier della risposta al gradino unitario è:

$$H_u(\Omega) = H(\Omega)\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi H(0)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega - k2\pi) =$$

$$= \frac{b}{\left(1-ae^{-j\Omega}\right)\left(1-e^{-j\Omega}\right)} + \pi\frac{b}{1-a}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega - k2\pi)$$

Eseguendo la scomposizione in fratti parziali, $H_u(\Omega)$ può essere posto nella forma seguente:

$$H_u(\Omega) = \frac{A}{1-ae^{-j\Omega}} + \frac{B}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\frac{b}{1-a}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega - k2\pi),$$

$$\text{con } A = -\frac{ab}{1-a} \text{ e } B = \frac{b}{1-a}$$

Pertanto:

$$H_u(\Omega) = -a\frac{b}{1-a}\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} + \frac{b}{1-a}\left[\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega - k2\pi)\right]$$

La risposta al gradino è fatta dunque di due parti:

$$h_u[n] = \left(-a\frac{b}{1-a}\right)a^n u[n] + \left(\frac{b}{1-a}\right)u[n]$$

Siccome il valore finale di $h_u[n]$ deve essere pari a 1, $\frac{b}{1-a} = 1$ e quindi

$$h_u[n] = \left(-a^{n+1} + 1\right)u[n].$$

I primi valori di questa risposta (per $n = 0,1,2,..$) sono: $1-a, 1-a^2, 1-a^3 \ldots$ Un andamento oscillatorio attorno al valore finale lo si ottiene soltanto con $a < 0$ e dovendo la massima sovraelongazione essere pari a 0.5, risulta $a = -\frac{1}{2}$. Di conseguenza da $\frac{b}{1-a} = 1$ si ottiene $b = \frac{3}{2}$.

Esercizio N. 3

Si consideri il segnale $y[n] = \left(\frac{1}{9}\right)^n u[n]$.

Si determinino i quattro segnali reali distinti $x_i[n]$, ciascuno avente una trasformata Z che soddisfi alle seguenti condizioni:

1) $\frac{1}{2}\left[X_i(z) + X_i(-z)\right] = Y\left(z^2\right)$
2) $X_i(z)$ ha un solo polo e un solo zero nel piano complesso z.

Soluzione:

Per la condizione (2) la trasformata $X_i(z)$ ha la seguente forma:

$$X_i(z) = K\frac{z-a}{z-b},$$

con K, a, b costanti reali.

In base alla condizione (1) si ha:

$$\frac{K}{2}\left\{\frac{z-a}{z-b}+\frac{-z-a}{-z-b}\right\}=\frac{1}{1-\frac{1}{9}z^{-2}}$$

$$\frac{K}{2}\left\{\frac{-2z^2+2ab}{b^2-z^2}\right\}=\frac{1}{1-\frac{1}{9}z^{-2}} \Rightarrow K\frac{1-abz^{-2}}{1-b^2z^{-2}}=\frac{1}{1-\frac{1}{9}z^{-2}}$$

Dall'ultima uguaglianza si ottiene: $\begin{cases} K=1 \\ a=0 \\ b=\pm\frac{1}{3} \end{cases}$

Pertanto si ottengono due espressioni per $X_i(z)$:

$$X_i(z)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \\ \dfrac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} \end{cases}$$

Per ciascuna di esse esistono due regioni di convergenza. I quattro segnali sono dunque:

$$x_1[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \qquad x_2[n]=-\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

$$x_3[n]=\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \qquad x_4[n]=-\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

Esrcizio N. 4

Un processo gaussiano stazionario $\{x(t)\}$ha la seguente densità spettrale di potenza:

$$S_x(\omega)=\frac{1}{1+a^2\omega^2} \qquad -\infty<\omega<+\infty$$

Esso è applicato (come tensione) ai capi del filtro RC di figura 3.

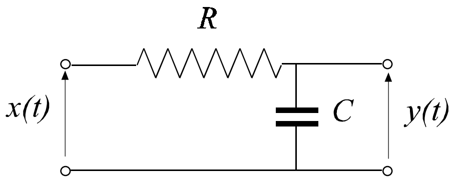

Fig. 3

Si calcolino (nell'ipotesi $a \neq RC$):

1) La densità di probabilità del primo ordine del processo di uscita $\{y(t)\}$.
2) La densità spettrale di potenza del processo di uscita $\{y(t)\}$.
3) La funzione di autocorrelazione di $\{y(t)\}$.

Soluzione

Il sistema di figura 3 è lineare e tempo-invariante; pertanto anche il processo di uscita è stazionario e gaussiano. La sua densità di probabilità sarà del tipo:

$$p_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}},$$

in cui σ_y^2 e pari al valore quadratico medio di $\{y(t)\}$. La densità spettrale di potenza è calcolabile come:

$$S_y(\omega) = S_x(\omega)|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+a^2\omega^2}\frac{1}{1+T^2\omega^2}$$

ove con T si è indicata la costante di tempo RC.

Per calcolare la funzione di autocorrelazione e il parametro σ_y^2 conviene scrivere $S_y(\omega)$ nella forma seguente:

$$S_y(\omega) = \frac{A}{1+a^2\omega^2} + \frac{B}{1+T^2\omega^2},$$

essendo rispettivamente: $A = \frac{a^2}{a^2 - T^2}$ e $B = \frac{T^2}{T^2 - a^2}$. I due termini di $S_y(\omega)$ sono due trasformate di Fourier ben note, per cui è immediato dire che la funzione di autocorrelazione vale:

$$R_y(\tau) = \frac{a}{a^2 - T^2}\frac{1}{2}e^{-\frac{|\tau|}{a}} - \frac{T}{a^2 - T^2}\frac{1}{2}e^{-\frac{|\tau|}{T}} = \frac{1}{2\left(a^2 - T^2\right)}\left[ae^{-\frac{|\tau|}{a}} - Te^{-\frac{|\tau|}{T}}\right]$$

Ricordando che $\sigma_y^2 = R_y(0)$, si ha: $\sigma_y^2 = \frac{1}{2(a+T)}$.