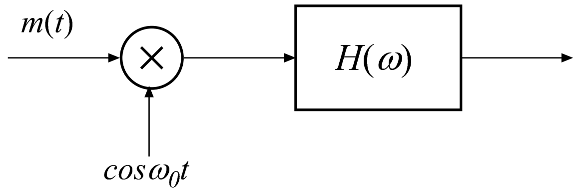
ESAME DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE

Appello del 17 - 18 febbraio 2000

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un segnale $m(t)$ a banda limitata ($M(\omega)=0$ per $|\omega|>B$) modula in ampiezza una portante sinusoidale a frequenza ω_0, con modalità DSB-SC (figura 1). Il segnale modulato è filtrato con un filtro avente risposta in frequenza $H(\omega)$ illustrata in figura 1. Determinare la parte in fase e la parte in quadratura (rispetto a ω_0) del segnale all'uscita del filtro.



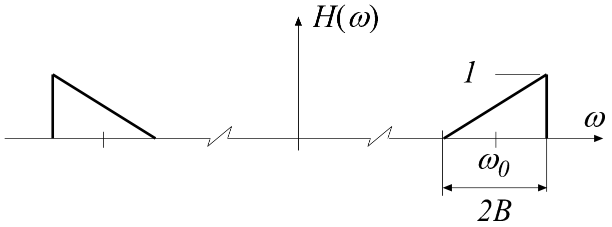


Fig. 1

Soluzione

Indichiamo con $s(t)$ e con $S(\omega)$ rispettivamente il segnale all'uscita del filtro ed il suo spettro. Si ha:

$$S(\omega)=\frac{1}{2}\{M(\omega-\omega_0)+M(\omega+\omega_0)\}H(\omega)$$

La parte in fase $s_c(t)$ e quella in quadratura $s_s(t)$ si possono ottenere filtrando a bassa frequenza il segnale che si ottiene moltiplicando $s(t)$ rispettivamente per $2\cos\omega_0 t$ e per $-2\sin\omega_0 t$. Pertanto:

$$S_c(\omega)= Parte\ in\ BF\left\{\frac{1}{2}\{M(\omega-2\omega_0)+M(\omega)\}H(\omega-\omega_0)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\{M(\omega+2\omega_0)+M(\omega)\}H(\omega+\omega_0)\right\}=$$

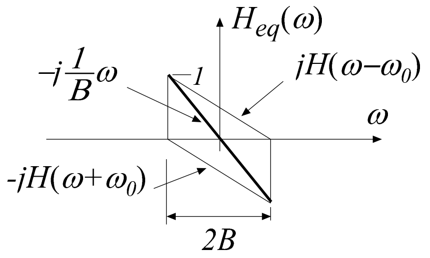
$$=\frac{1}{2}\{M(\omega)[H(\omega-\omega_0)+H(\omega+\omega_0)]\}$$

La particolare forma di $H(\omega)$ ci permette di concludere che $s_c(t)=\frac{1}{2}m(t)$.

Per quanto riguarda $S_s(\omega)$ si può scrivere la seguente relazione:

$$S_s(\omega) = Parte\ in\ BF \left\{ j\frac{1}{2}\{M(\omega-2\omega_0)+M(\omega)\}H(\omega-\omega_0) - j\frac{1}{2}\{M(\omega+2\omega_0)+M(\omega)\}H(\omega+\omega_0)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\{M(\omega)[jH(\omega-\omega_0) - jH(\omega+\omega_0)]\}$$



Come risulta dalla figura accanto, il filtro passa basso equivalente ha una risposta in frequenza pari a $-j\frac{1}{B}\omega$. Esso quindi, a parte il segna negativo, è un derivatore. La parte in quadratura $s_c(t)$ è quindi pari a $-\frac{1}{2B}\frac{dm(t)}{dt}$.

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente risposta impulsiva:

$$h[n] = |n|\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

Verificare che il sistema è stabile e calcolare la sua risposta in frequenza.

Soluzione

Il segnale $h[n]$ può essere posto nella seguente forma:

$$h[n] = n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - n(2)^n u[-n-1]$$

Ricordando la relazione: $nx[n] \leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$, si può concludere che:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

$$-(2)^n u[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-2z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad -n(2)^n u[-n-1] \leftrightarrow \frac{2z^{-1}}{\left(1-2z^{-1}\right)^2} \qquad |z| < 2$$

Pertanto $H(z) = \dfrac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} + \dfrac{2z^{-1}}{\left(1-2z^{-1}\right)^2} \qquad 2 > |z| > \frac{1}{2}$

Poiché la circonferenza di raggio unitario appartiene alla regione di convergenza, il sistema è stabile. La risposta in frequenza si ottiene sostituendo a z l'esponenziale $e^{j\Omega}$, ottenendo:

$$H(\Omega) = \frac{\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)^2} + \frac{2e^{-j\Omega}}{\left(1-2e^{-j\Omega}\right)^2}$$

Esercizio N. 3

Un sistema LTI tempo discreto causale con risposta impulsiva reale ha una risposta in frequenza la cui parte reale è:

$$\Re e\{H(\Omega)\} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}+\cos\Omega} \quad \text{per } |\Omega| \le \pi$$

Determinare la sua risposta impulsiva.

(Suggerimento: conviene innanzitutto capire come mai per un sistema causale con risposta impulsiva reale la conoscenza della parte reale di $H(\Omega)$ è sufficiente per determinare $h[n]$).

Soluzione

La parte reale della risposta in frequenza è la trasformata della parte pari della risposta impulsiva. Se il sistema è causale, è facile rendersi conto che

$$h[n] = 2h_{pari}[n] \quad \text{per } n \ge 1$$
$$h[0] = h_{pari}[0]$$
$$h[n] = 0 \quad \text{per } n < 0$$

Antitrasformando la $\Re e\{H(\Omega)\}$ si ottiene:

$$h_{pari}[n] = F^{-1}\left\{\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}e^{j\Omega}+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}\right\} = Z^{-1}\left\{\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}z^{-1}}\right\} = Z^{-1}\left\{\frac{\frac{3}{2}z}{\frac{1}{2}z^2+\frac{5}{4}z+\frac{1}{2}}\right\}$$

La funzione da antitrasformare può essere così scomposta:

$$\frac{\frac{3}{2}z}{\frac{1}{2}z^2+\frac{5}{4}z+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}z}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+2)} = \frac{3z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{2}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)} - \frac{2}{\left(1+2z^{-1}\right)} \Rightarrow h_{pari}[n] = 2\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (2)^n u[-n-1]\right\}$$

Si può concludere che :

$$h[n] = 2 \quad \text{per} \quad n = 0$$
$$h[n] = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad \text{per} \quad n \geq 1$$
$$h[n] = 0 \quad \text{per} \; n < 0$$

Esercizio N. 4

Una sorgente di onde elettromagnetiche piane uniformi irradia un'onda con variazione temporale sinusoidale, che si propaga secondo il verso positivo dell'asse x (figura 2). Nel punto scelto come origine del sistema di riferimento spaziale tale onda vale $\Re e\left\{e^{j\omega_0 t}\right\}$. L'onda è ricevuta da un generico veicolo che si muove con velocità costante $\boldsymbol{v}$ diretta secondo x. All'istante $t = 0$ il veicolo si trova nel punto x_0. La velocità v e il punto x_0 sono due variabili aleatorie indipendenti, uniformemente distribuite rispettivamente tra $-v_M$ e $+v_M$ e tra $-x_M$ e $+x_M$. Inoltre si ha $x_M >>> \lambda$, ove λ è la lunghezza d'onda nello spazio libero dell'onda irradiata.

Si consideri il processo aleatori $\{s(t)\}$le cui realizzazioni sono costituite dal segnale ricevuto dal generico veicolo. Si calcoli la sua funzione di autocorrelazione e la sua densità spettrale di potenza.

(si ricorda che un'onda piana sinusoidale a frequenza ω_0 *si propaga secondo la legge* $\Re e\left\{e^{j(\omega_0 t - ks)}\right\}$, *essendo* $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\omega_0}{c}$, s *la distanza dall'origine misurata lungo la direzione di propagazione e* c *la velocità di propagazione) .*

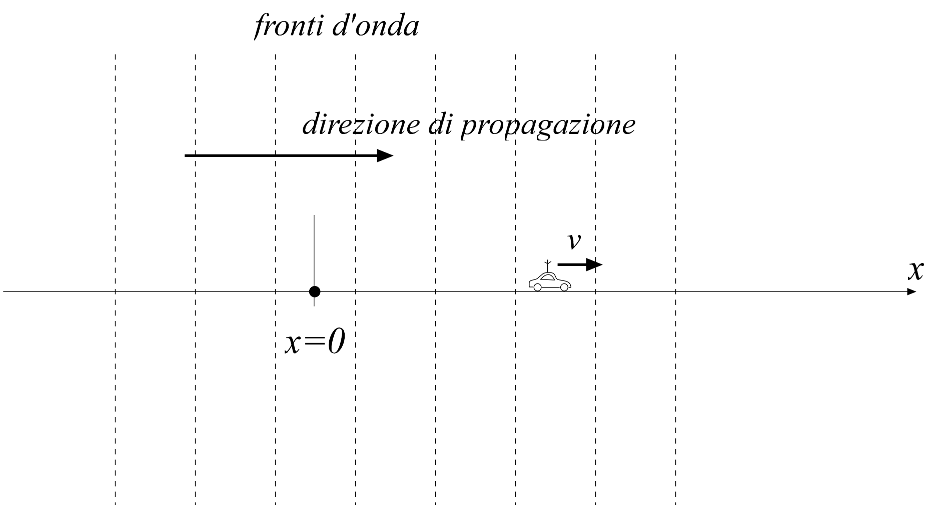


Fig. 2

Soluzione

Il segnale ricevuto dal generico veicolo è rappresentabile matematicamente come:

$$s(t)=\Re e\left\{a e^{j[\omega_0 t-k(x_0+vt)]}\right\}=a\cos\left(\omega_0\left[1-\frac{v}{c}\right]t-\frac{2\pi}{\lambda}x_0\right),$$

in cui a è una costante. Come si può notare, il processo $s(t)$ è riconducibile ad una espressione del tipo:

$$s(t)=a\cos(\omega t-\phi)$$

con ω e ϕ due variabili aleatorie indipendenti, così definite:

$$\omega=\omega_0\left(1-\frac{v}{c}\right)$$

$$\phi=\frac{2\pi}{\lambda}x_0$$

La variabile ω è distribuita uniformemente tra $\omega_0-\omega_M$ e $\omega_0+\omega_M$, avendo indicato con ω_M la frequenza $\omega_0\frac{v_M}{c}$. La variabile ϕ è uniformemente distribuita tra $-\pi$ e π: ciò è garantito dal $x_M >>> \lambda$. Pertanto la funzione di autocorrelazione risulta:

$$R_s(t,t+\tau)=E\left[a^2\cos(\omega t-\phi)\cos(\omega(t+\tau)-\phi)\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\omega_M}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\omega_0-\omega_M}^{\omega_0-\omega_M}a^2\cos(\omega\ \ t-\phi)\cos(\omega(t+\tau)-\phi)\,d\omega\,d\phi=$$

$$=\frac{a^2}{4\omega_M\tau}\left[\sin(\omega_0+\omega_M)\tau-\sin(\omega_0-\omega_M)\tau\right]=\frac{a^2}{2}\frac{\sin\omega_M\tau}{\omega_M\tau}\cos\omega_0\tau$$

La trasformata di Fourier di questa funzione è ricavabile osservando che $R_s(\tau)$ è una funzione *Sampling* che moltiplica la funzione $\cos\omega_0\tau$. Si tratterrà quindi di una funzione rettangolare traslata attorno a $\pm\omega_0$, di durata $2\omega_M$. Più precisamente:

$$S_s(\omega)=\frac{a^2\pi}{4\omega_M}\left\{rect\left[\frac{\omega-\omega_0}{2\omega_M}\right]+rect\left[\frac{\omega+\omega_0}{2\omega_M}\right]\right\}$$