ESAME DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE

Appello del 16 - 17 gennaio 2001

Prova scritta

Esercizio N. 1

Il segnale passa banda $x(t)$ ha lo spettro rappresentato in figura 1, ed espresso analiticamente da:

$$X(f) = A\cos\left(\frac{\pi}{2f_M}(f - f_0)\right)\{u(f - f_0) - u(f - f_0 - f_M)\} +$$
$$A\cos\left(\frac{\pi}{2f_M}(-f - f_0)\right)\{u(-f - f_0) - u(-f - f_0 - f_M)\}$$

Con riferimento alla frequenza f_0, esprimere analiticamente la sua parte in fase e quella in quadratura.

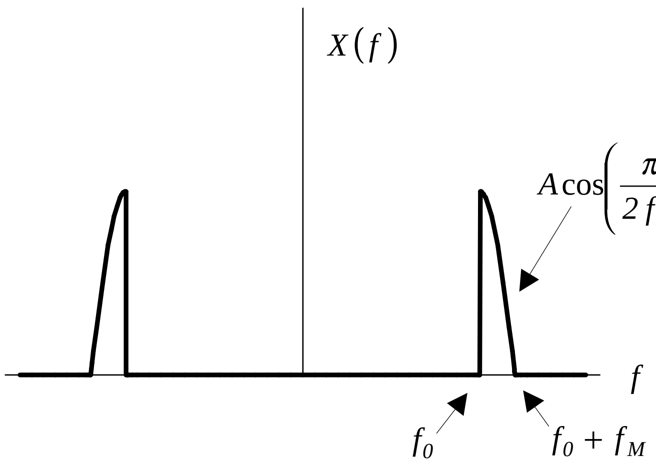

Fig. 1

(Suggerimento: preliminarmente si disegni lo spettro dell'inviluppo complesso e lo si esprima analiticamente)

Soluzione

In figura I è disegnato lo spettro dell'inviluppo complesso del segnale $x(t)$. Esso ha la seguente espressione analitica:

$$\tilde{X}(f) = 2A\cos\left(\frac{\pi}{2f_M}f\right)\{u(f) - u(f - f_M)\}$$

Per definizione di inviluppo complesso la sua antitrasformta di Fourier ha parte reale pari a $x_c(t)$ e parte immaginaria pari a $x_s(t)$.

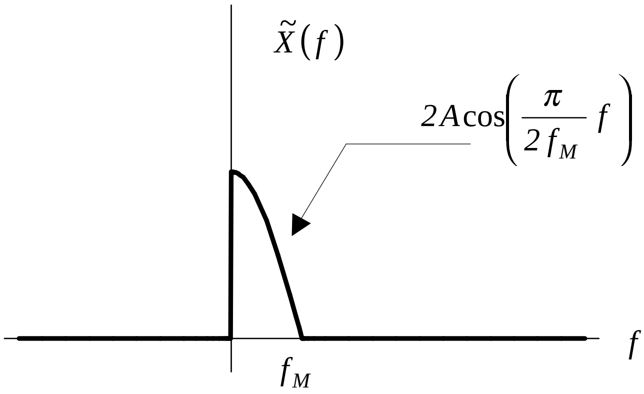

Fig. I

Antitrasformando $\tilde{X}(f)$, si ottiene:

$$x_c(t) = \int_0^{f_M} 2A\cos\left(\frac{\pi}{2f_M}f\right)\cos(2\pi ft)df = \frac{4Af_M\cos(2\pi f_M t)}{\pi\left(1-16f_M^2t^2\right)}$$

$$x_s(t) = \int_0^{f_M} 2A\cos\left(\frac{\pi}{2f_M}f\right)\sin(2\pi ft)df = \frac{4Af_M\sin(2\pi f_M t)-16Af_M^2t}{\pi\left(1-16f_M^2t^2\right)}$$

In fig. II sono riportati gli andamenti di $x_c(t)$ e di $x_s(t)$ per $A=1$ e $f_M=4$.

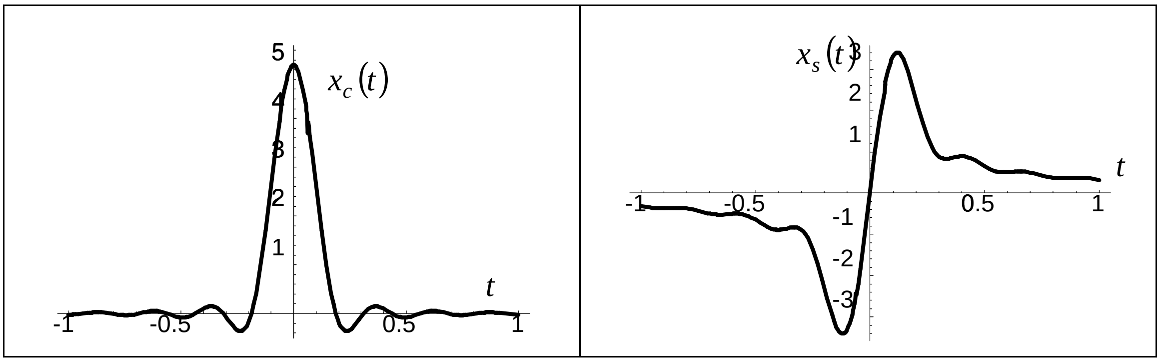

Fig. II

Esercizio N.2

Un sistema LTI ha la seguente risposta in frequenza:

$$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right| = \left[20 + 16\cos(2\Omega)\right]^{1/2}$$

$$Arg\left[H\left(e^{j\Omega}\right)\right] = \arctan\left[\frac{-\sin(2\Omega)}{2+\cos(2\Omega)}\right]$$

Determinare la sua risposta impulsiva.

Soluzione

Dall'espressione di $Arg\left[H\left(e^{j\Omega}\right)\right]$ si deduce che:

$$\Re e\left\{H\left(e^{j\Omega}\right)\right\} = k\left(2+\cos(2\Omega)\right)$$
$$\Im m\left\{H\left(e^{j\Omega}\right)\right\} = -k\sin(2\Omega)$$

Pertanto $H\left(e^{j\Omega}\right) = k\left[2+\cos(2\Omega) - j\sin(2\Omega)\right]$ e quindi:

$$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right| = k\sqrt{4+\cos^2(2\Omega)+4\cos(2\Omega)+\sin^2(2\Omega)} = k\sqrt{5+4\cos(2\Omega)} \Rightarrow k = 2$$

In definitiva $H\left(e^{j\Omega}\right) = 4 + 2e^{-j2\Omega}$, cui corrisponde la risposta impulsiva

$$h[n] = 4\delta[n] + 2\delta[n-2]$$

Esercizio N. 3

Dato il segnale $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{3}{2}\right)^n u[-n-1]$, si calcoli la sua trasformata Z (con relativa regione di convergenza) e si disegni il corrispondente diagramma zeri – poli. Si consideri quindi il segnale:

$$y[n] = x\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & \text{per n pari} \\ 0 & \text{per n dispari} \end{cases}$$

Si calcoli la trasformata Z di $y[n]$ e si dica qual è la sua regione di convergenza. Anche per tale trasformata si disegni il diagramma zeri – poli.

Soluzione

Il segnale $x[n]$ è somma di due segnali $x_1[n]$ e $x_2[n]$, la cui trasformata Z è:

$$x_1[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \rightarrow X_1(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

$$x_2[n] = -\left(\frac{3}{2}\right)^n u[-n-1] \rightarrow X_2(z) = \frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}} \qquad |z| < \frac{3}{2}$$

Pertanto $X(z) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \dfrac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}} \qquad \dfrac{3}{2} > |z| > \dfrac{1}{2}$

Il relativo diagramma zeri – poli è indicato in figura III

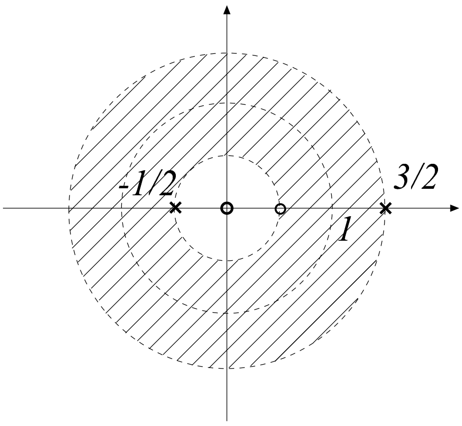

Fig. III

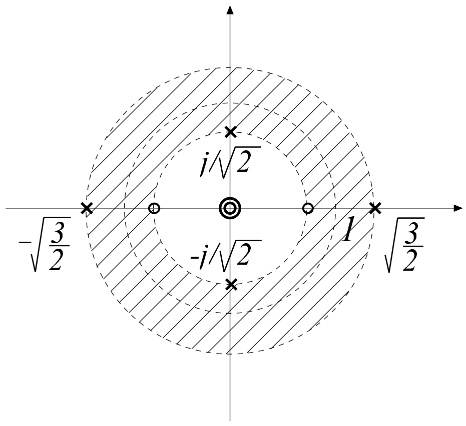

Fig. IV

La trasformata Z del segnale $y[n]$ risulta:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-2n} = X\left(z^2\right)$$

$$Y(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-2}} + \frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-2}}$$

Tale funzione ha uno zero di molteplicità 2 nell'origine, e altri due zeri in $z = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. I poli sono in $z = \pm j\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e in $z = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. La regione di convergenza è definita da $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < |z| < \sqrt{\dfrac{3}{2}}$. In figura IV è riportato il relativo diagramma zeri – poli.

Esercizio N. 4

Un rumore gaussiano bianco ha densità spettrale di potenza $S_{ni}(f) = \dfrac{1}{2}$ W/Hz $(-\infty < f < +\infty)$. Esso viene fatto passare attraverso un filtro LTI ed il processo all'uscita presenta una funzione di autocorrelazione $R_{nu}(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{T}$ per $|\tau| < T$ e nulla per $|\tau| > T$. Si determini il modulo della risposta in frequenza del filtro e si esprima la densità di probabilità del primo ordine del processo di uscita.

Soluzione

Dalla relazione $S_{nu}(f) = |H(f)|^2 S_{ni}(f)$ risulta:

$$|H(f)| = \sqrt{\frac{S_{nu}(f)}{S_{ni}(f)}} = \sqrt{2S_{nu}(f)}$$

La densità spettrale di potenza del processo di uscita è la trasformata di Fourier della sua funzione di autocorrelazione. Quest'ultima corrisponde alla convoluzione di una funzione rettangolare con se stessa. Più precisamente:

$$R_{nu}(\tau) = \frac{1}{T}\left\{\text{rect}\left[\frac{\tau}{T}\right] \otimes \text{rect}\left[\frac{\tau}{T}\right]\right\}$$

La sua trasformata di Fourier sarà quindi:

$$S_{nu}(f) = \frac{1}{T}\left\{T^2\, \text{Sa}^2\left(2\pi\, f\, \frac{T}{2}\right)\right\} = T\,\frac{\sin^2\left(2\pi\, f\, \frac{T}{2}\right)}{\left(2\pi\, f\, \frac{T}{2}\right)^2} = T\,\text{sinc}^2(fT)$$

Pertanto $|H(f)| = \sqrt{2T}\,|\text{sinc}(fT)|$

Il processo di uscita è gaussiano, a valore medio nullo, con varianza σ_{nu}^2 coincidente con il suo valore quadratico medio. Quest'ultimo è pari a $R_{nu}(0)$, cioè $\sigma_{nu}^2 = 1$. Quindi la densità di probabilità del primo ordine è pari a $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{n_u^2}{2}\right)$.