ESAME DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE

Appello del 13 – 14 febbraio 2001

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema lineare tempo continuo risponde all'impulso $\delta(t-\tau)$ con la funzione $h(t,\tau)=e^{-2t}u(t-\tau)$. Dire se il sistema è tempo invariante e calcolare la sua risposta al gradino unitario $u(t)$.

Soluzione

Il sistema non è tempo invariante, poiché una traslazione di un impulso all'ingresso del sistema non comporta una analoga traslazione della risposta impulsiva, come evidenziato dalla figura I.

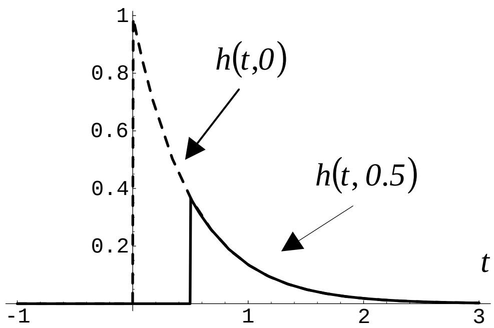

Fig: I

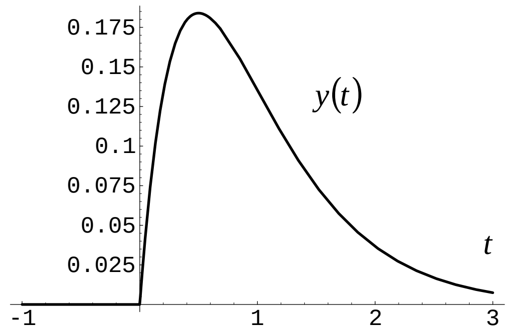

Fig. II

La risposta al gradino unitario $y(t)$ è fornita dall'integrale:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t,\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}u(t)e^{-2t}u(t-\tau)d\tau=\begin{cases}0 & \text{per } t<0\\ e^{-2t}\int_0^t d\tau=te^{-2t} & \text{per } t>0\end{cases}$$

In conclusione $y(t)=te^{-2t}u(t)$ (figura II).

Esercizio N. 2

Un segnale tempo discreto $x[n]$ ha lo spettro $X\left(e^{j\Omega}\right)$ come indicato in figura 1. Calcolare i valori del segnale $x_d[n]$, ottenuto da $x[n]$ per decimazione di ordine 4.

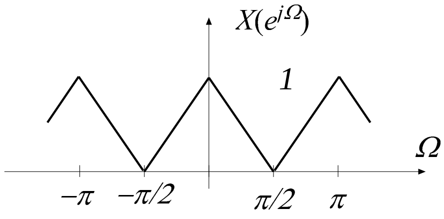

Fig. 1

Soluzione

Il segnale $x_d[n]$ può essere visto come il risultato di un campionamento di $x[n]$ fatto con periodo $N=4$, seguito dalla eliminazione dei valori tra due successivi campioni del segnale campionato $x_p[n]$. Detto $X_p\left(e^{j\Omega}\right)$ lo spettro del segnale campionato, quello di $x_d[n]$ sarà:

$$X_d\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_d[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_p[n] e^{-j\frac{\Omega}{4}n} = X_p\left(e^{j\frac{\Omega}{4}}\right)$$

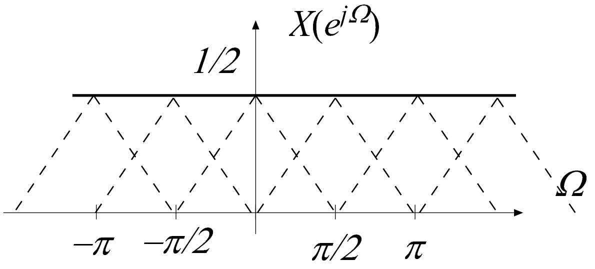

Fig. III

Dalla figura III si vede come lo spettro $X_p\left(e^{j\Omega}\right)$ sia una costante di valore $1/2$. Tale sarà quindi anche lo spettro del segnale $x_d[n]$, il quale pertanto risulta essere pari a $\frac{1}{2}\delta[n]$.

Esercizio N. 3

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente risposta impulsiva:

$$h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{2\pi}{6}n\right) u[n]$$

Ricavare l'equazione alle differenze che lo descrive e dire, giustificando la risposta, se si tratta di un sistema stabile.

Soluzione

La funzione di trasferimento è la trasformata Z di $h[n]$. Scrivendo $h[n]$ in termini esponenziali si ricava:

$$h[n] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}e^{j\frac{2\pi}{6}}\right)^n u[n] + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}e^{-j\frac{2\pi}{6}}\right)^n u[n]$$

$$H(z) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{j\frac{2\pi}{6}}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\frac{2\pi}{6}}z^{-1}}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{2-\frac{2}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right)z^{-1}}{1+\frac{1}{9}z^{-2}-\frac{2}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right)z^{-1}}\right\}$$

$$H(z)=\frac{1-\frac{1}{6}z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}+\frac{1}{9}z^{-2}} \qquad \text{con regione di convergenza } |z|>\frac{1}{3}$$

Poiché la circonferenza di raggio unitario è inclusa nella regione di convergenza, il sistema risulta stabile. L'equazione alle differenze che lo descrive è:

$$y[n]-\frac{1}{3}y[n-1]+\frac{1}{9}y[n-2]=x[n]-\frac{1}{6}x[n-1]$$

Esercizio N. 4

Sia $x(t)$ un processo aleatorio, stazionario, con banda limitata a $\pm f_M$. La sua densità di probabilità del primo ordine $p_1(x,t)$ è costante tra $-1\le x\le 1$. Questo processo modula di fase la portante $\cos(2\pi\, f_0\, t+\varphi)$, essendo φ una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra $-\pi/2$ e $\pi/2$ e indipendente da $x(t)$. Inoltre $f_0 >> f_M$. L'uscita del modulatore è quindi un processo aleatorio di tipo passa banda, la cui generica realizzazione è espressa da:

$s(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\Phi_M\, x(t)+\varphi)$, con A e Φ_M costanti.

Con riferimento a f_0 si calcolino i valori medi della parte in fase e in quadratura del processo $s(t)$.

Soluzione

Scrivendo $s(t)$ nella forma:

$$s(t)=A\cos(\Phi_M\, x(t)+\varphi)\cos(2\pi f_0 t)-A\sin(\Phi_M\, x(t)+\varphi)\sin(2\pi f_0 t)$$

si vede che le parti in fase e in quadratura sono rispettivamente :

$$s_c(t)=A\cos(\Phi_M\, x(t)+\varphi) \qquad s_s(t)=A\sin(\Phi_M\, x(t)+\varphi)$$

1) Calcolo del valor medio di $s_c(t)$:

$$E[s_c(t)]=\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{1}{2}A\cos(\Phi_M\, x(t)+\varphi)dx d\varphi=\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\left\{\frac{1}{\pi}\frac{1}{2\Phi_M}A\sin(\Phi_M\, x(t)+\varphi)\right\}\Bigg|_{-1}^{+1}d\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{1}{2\Phi_M}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\{A\sin(\Phi_M+\varphi)-A\sin(-\Phi_M+\varphi)\}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{1}{2\Phi_M}\left\{-A\cos\left(\Phi_M+\frac{\pi}{2}\right)+A\cos\left(-\Phi_M+\frac{\pi}{2}\right)+A\cos\left(\Phi_M-\frac{\pi}{2}\right)-A\cos\left(-\Phi_M-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

Ognuno dei quattro termini che appaiono nella precedente sommatoria equivale a $A\sin(\Phi_M)$. Pertanto il valor medio cercato è $\dfrac{2A\sin(\Phi_M)}{\pi\Phi_M}$.

Per la parte in quadratura, l'analogo calcolo porta a concludere che il valor medio è nullo. Infatti:

$$E[s_s(t)] = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} A\sin(\Phi_M x(t) + \varphi) dx d\varphi = -\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left\{ \frac{1}{\pi} \frac{1}{2\Phi_M} A\cos(\Phi_M x(t) + \varphi) \right\} \Bigg|_{-1}^{+1} d\varphi$$

$$= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{2\Phi_M} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \{A\cos(\Phi_M + \varphi) - A\cos(-\Phi_M + \varphi)\} d\varphi =$$

$$-\frac{1}{\pi} \frac{1}{2\Phi_M} \left\{ A\sin\left(\Phi_M + \frac{\pi}{2}\right) - A\sin\left(-\Phi_M + \frac{\pi}{2}\right) - A\sin\left(\Phi_M - \frac{\pi}{2}\right) + A\sin\left(-\Phi_M - \frac{\pi}{2}\right) \right\} = 0$$