ESAME DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE

Appello del 10 - 11 gennaio 2002

Prova scritta

<u>Esercizio N. 1</u>

Un sistema lineare tempo invariante ha la risposta impulsiva $h(t)$ rappresentata in figura 1, espressa analiticamente da:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}t & \text{per } 0 \le t \le T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare e disegnare la risposta del sistema al gradino unitario $u(t)$.

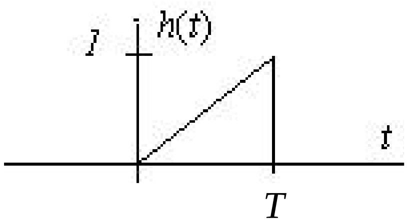


Fig. 1

<u>Soluzione</u>

Poiché tra il gradino unitario e l'impulso ideale sussiste la relazione:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$

la risposta del sistema al gradino unitario sarà pari all'integrale della risposta impulsiva:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau \,,$$

che risulta essere (fig. I):

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \frac{1}{2T}t^2 & \text{per } 0 \le t \le T \\ \frac{T}{2} & \text{per } t > T \end{cases}$$

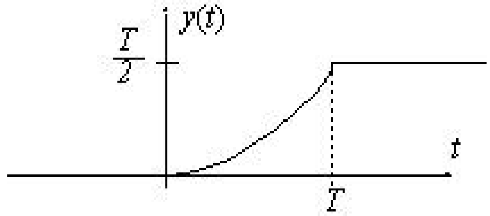


Fig. I

Esercizio N. 2

In figura 2 è rappresentata la parte pari $h_p(t)$ della risposta impulsiva $h(t)$ di un sistema lineare tempo invariante causale:

a) Disegnare $h(t)$;
b) Una delle tre seguenti funzioni è la trasformata di Fourier di $h_p(t)$. Quale? (giustificare la risposta)
   i) $2\,\mathrm{sinc}\,(2f)e^{-j6\pi f}$
   ii) $2\cos(2f)\sin(6\pi f)$
   iii) $2\,\mathrm{sinc}\,(2f)\cos(6\pi f)$

c) Calcolare la trasformata di Fourier della parte dispari di $h(t)$.

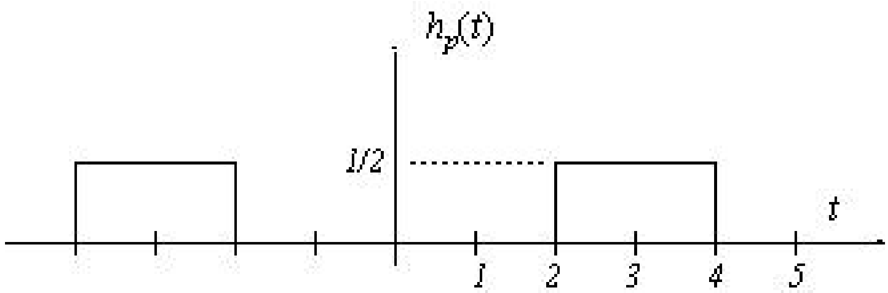
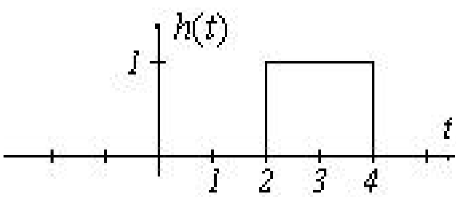


Fig. 2

Soluzione

Poiché il sistema è causale, deve essere $h(t)=0$ per $t<0$. La parte dispari pertanto dovrà essere uguale a $-h_p(t)$ per $t<0$ e di conseguenza uguale a $h_p(t)$ per $t>0$. La risposta impulsiva $h(t)$ sarà dunque quella rappresentata in figura II.



La trasformata di Fourier di una funzione reale pari, come è $h_p(t)$, deve essere reale e pari. Delle tre funzioni l'unica ad essere sia reale sia pari è la terza, vale a dire:

$$X_{h_p}(f) = 2\,\mathrm{sinc}\,(2f)\cos(6\pi f)$$

La trasformata della parte dispari di $h(t)$ corrisponde alla parte immaginaria della trasformata di $h(t)$. Poiché quest'ultima è l'impulso rettangolare $\mathrm{rect}\left(\frac{t-3}{2}\right)$, la trasformata di $h(t)$ è data $2\,\mathrm{sinc}\,(2f)e^{-j6\pi f}$, che ha parte immaginaria:

$$X_{h_d}(f) = -j2\,\mathrm{sinc}\,(2f)\sin(6\pi f)$$

<u>Esercizio N. 3</u>

Un sistema LTI tempo discreto ha risposta in frequenza:

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = 1 - \cos(\Omega) + j\sin(\Omega) \quad \text{per } |\Omega| \le \pi$$

Dire se si tratta di un sistema causale (giustificando la risposta) e calcolare la sua risposta al segnale $u[n-2]$.

<u>Soluzione</u>

Se la risposta in frequenza viene scritta nella forma $H\left(e^{j\Omega}\right) = 1 - e^{-j\Omega}$, si può calcolare immediatamente la risposta impulsiva del sistema: $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$. Pertanto il sistema è causale, essendo $h[n] = 0$ per $n < 0$. Inoltre esso risponde al generico ingresso $x[n]$ con il segnale $y[n] = x[n] - x[n-1]$. In particolare a $u[n-2]$ corrisponderà la risposta $u[n-2] - u[n-3] = \delta[n-2]$.

<u>Esercizio N. 4</u>

Due variabili aleatorie X e Y hanno la seguente densità di probabilità congiunta:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 24xy & x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare la densità di probabilità delle variabili X e Y e dire se sono indipendenti.

<u>Soluzione</u>

La regione del piano xy in cui la $f_{XY}(x,y)$ è diversa da zero è quella riportata in tratteggio in figura III.

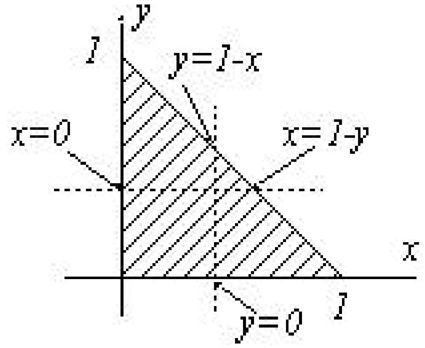


Fig. III

Nella medesima figura sono riportati i percorsi e i limiti di integrazione nelle variabili x e y che forniscono rispettivamente la densità di probabilità della variabile Y e quella della variabile X. Ad esempio:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)du = \int_0^{1-y} 24xydx = 12y(1-y)^2$$

Analogamente si ricava che $f_X(x) = 12x(1-x)^2$.

Poiché $f_{XY}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$, si conclude che le due variabili aleatorie non sono indipendenti.

Esercizio N. 5

La funzione di autocorrelazione di un processo aleatorio stazionario $x(t)$ è $R_x(\boldsymbol{t}) = e^{-|\boldsymbol{t}|}$. Dire quanto vale il suo valor medio e il suo valore quadratico medio.

Soluzione

Il valor medio del processo è nullo. Se così non fosse, la sua densità spettrale di potenza presenterebbe un impulso nell'origine e quindi la sua funzione di autocorrelazione (che è l'antitrasformata di Fourier della densità spettrale di potenza) dovrebbe avere un valore medio temporale diverso da zero. La funzione $R_x(\boldsymbol{t}) = e^{-|\boldsymbol{t}|}$ ha invece un valore medio temporale nullo. Infatti:

$$\langle R_x(\boldsymbol{t}) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-|\boldsymbol{t}|} d\boldsymbol{t} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(2 - e^{-T/2}\right) = 0$$

Per quanto riguarda il valore quadratico medio del processo, esso corrisponde al valore della funzione di autocorrelazione per $\boldsymbol{t} = 0$. Si ha quindi: $E\{x^2(t)\} = R_x(0) = 1$.

Esercizio N. 6

Un processo aleatori stazionario con funzione di autocorrelazione data da:

$$R_x(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\tau|}{T} & \text{per } |\tau| \le T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

è applicato all'ingresso di un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t) = u(t)$. Calcolare la funzione di mutua correlazione $R_{xy}(\tau)$ tra i processi di ingresso e di uscita.

Soluzione

La funzione di mutua correlazione è data dalla convoluzione tra $R_x(\tau)$ e $h(\tau)$:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\alpha)h(\tau - \alpha)d\alpha$$

La figura IV mostra quali devono essere i limiti di integrazione per i diversi intervalli della variabile τ.

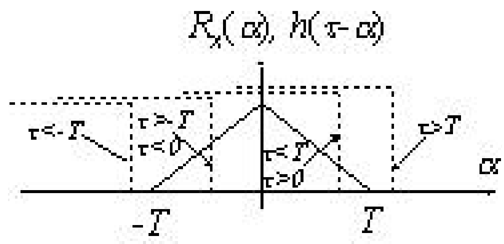


Fig. IV

$$R_{xy}(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{per } \tau < -T \\ \displaystyle\int_{-T}^{\tau}\left(1 + \frac{\alpha}{T}\right)d\alpha = \frac{(T+\tau)^2}{2T} & \text{per } -T \le \tau < 0 \\ \displaystyle\frac{T}{2} + \int_{0}^{\tau}\left(1 - \frac{\alpha}{T}\right)d\alpha = \frac{T}{2} + \tau - \frac{\tau^2}{2T} & \text{per } 0 < \tau < T \\ T & \text{per } \tau > T \end{cases}$$

In figura V è riportato l'andamento della funzione $R_{xy}(\tau)$.

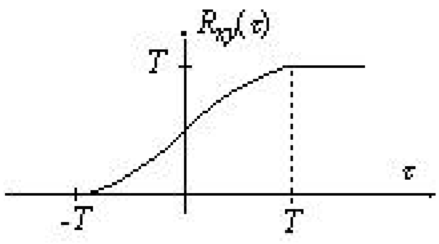


Fig. V