ESAME DI TEORIA DEI SEGNALI

Appello del 18 – 19 febbraio 2002

Prova scritta

<u>Esercizio N. 1</u>

Si calcolino i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier della funzione periodica riportata in figura 1.

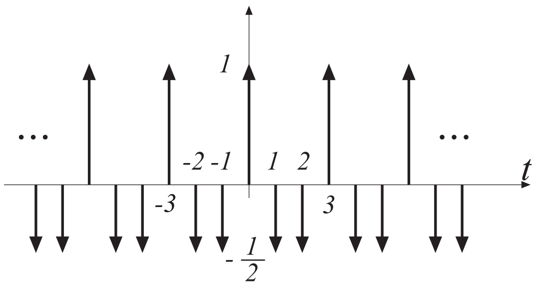

Fig. 1

<u>Soluzione</u>

Applicando la classica formula dei coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier nella forma esponenziale si ottiene:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\,dt = \frac{1}{3}\int_{-3/2}^{+3/2}\left\{-\frac{1}{2}\delta(t+1)+\delta(t)-\frac{1}{2}\delta(t-1)\right\}e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}e^{jk\frac{2\pi}{T}} + 1 - \frac{1}{2}e^{-jk\frac{2\pi}{T}}\right] = \frac{1}{3}\left[1+\cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

<u>Esercizio N. 2</u>

In figura 2 è rappresentata la risposta impulsiva $h[n]$ di un sistema LTI tempo discreto e l'andamento di un segnale $x[n]$ applicato al suo ingresso. Dire qual è il valore massimo della risposta $y[n]$ e per quali valori della variabile n tale valore si manifesta.

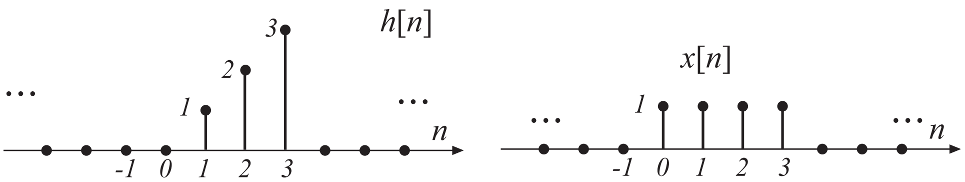

Fig. 2

Soluzione

Ricavando la risposta mediante la somma di convoluzione, si nota facilmente che il valore massimo della risposta verrà ottenuto allorquando verranno sommati tutti i valori presenti nella risposta impulsiva. Il valore massimo risulta pertanto pari a 6 ed è ottenuto per $n = 3$ e per $n = 4$

Esercizio N. 3

Un segnale $x(t)$ ha come spettro la funzione $X(f) = e^{-|f|}$. Si ricavi la funzione $\hat{x}(t)$, trasformata di Hilbert di $x(t)$

Soluzione

Il segnale analitico $x_+(t)$ associato a $x(t)$ è per definizione un segnale complesso, la cui parte reale è $x(t)$ e la cui parte immaginaria è $\hat{x}(t)$. D'altra parte esso ha uno spettro diverso da zero solo per frequenze positive, come indicato in figura I.

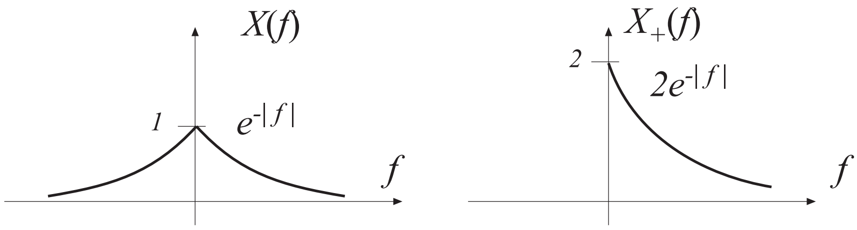

Fig. I

Pertanto per ricavare $\hat{x}(t)$ è sufficiente antitrasformare $X_+(f)$ e prendere il coefficiente della sua parte immaginaria:

$$\hat{x}(t) = \mathrm{Im}\left\{ \int_0^{+\infty} 2e^{-f} e^{j2\pi f t} df \right\} = \mathrm{Im}\left\{ \frac{2}{1 - j2\pi t} \right\} = \frac{4\pi t}{1 + 4\pi^2 t^2}$$

Esercizio N. 4

In una stazione ferroviaria ogni 20 minuti arriva un treno che va in direzione A. Il suo orario è il seguente: ora, ora e 20 min., ora e 40 min. e così via. Ogni 20 minuti arriva anche un treno che va nella direzione opposta, B, con orario: ora e 5 min., ora e 25 min., ora e 45 min. e così via.

Una persona arriva in stazione in un istante totalmente casuale e sale sul primo treno in arrivo. Qual è la probabilità che essa prenda il treno che va in direzione B?

Soluzione

Nel grafico della figura II sono riportati gli istanti di arrivo dei treni che vanno verso A e verso B

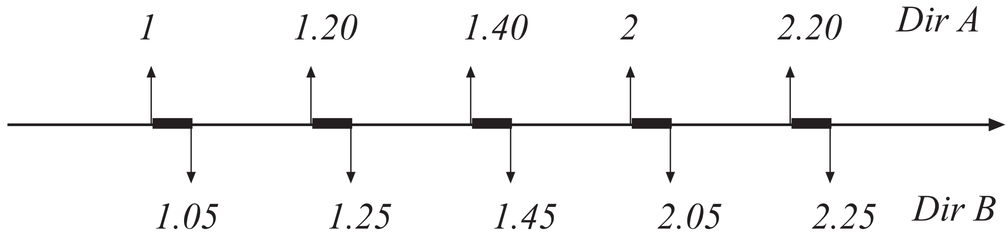

Fig. II

Risulta evidente che la persona vedrà arrivare per primo il treno che va verso B ogniqualvolta giungerà in stazione in un istante appartenente agli intervalli evidenziati in figura III. Poiché l'istante di arrivo è totalmente casuale, la probabilità che esso cada in uno dei suddetti intervalli è pari al rapporto tra la loro lunghezza (5 min.) e quella dell'intervallo tra due successivi treni che vanno nella medesima direzione (20 min). Pertanto tale probabilità vale 0.25.

Esercizio N. 5

A partire dall'esperimento: 'lancio di una moneta', si consideri il processo aleatorio che associa all'uscita 'testa' la funzione $x_1(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ e all'uscita 'croce' la funzione $x_2(t) = \cos(4\pi f_0 t)$. Si dica se il processo è, almeno in senso lato,

a) stazionario;
b) ciclostazionario;
c) né stazionario né ciclostazionario;
d) regolare;
e) ergodico.

Soluzione

Il valor medio del processo è:

$$m(t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t) + \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t) \quad \text{(funzione periodica in } t\text{)}$$

La sua funzione di autocorrelazione risulta:

$$R_x(t, t+\tau) = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 (t+\tau)) + \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t)\cos(4\pi f_0 (t+\tau))$$

Essa è periodica in t per ogni valore di τ. Il processo è dunque cislostazionario.

Il valor medio temporale di entrambe le realizzazioni distinte è nullo, ma la funzione di autocorrelazione temporale è diversa per le due realizzazioni. Infatti:

$$R_{x1}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos(2\pi\ f_0 t)\cos(2\pi\ f_0(t+\tau))dt = \frac{1}{2}\cos(2\pi\ f_0\tau)$$

$$R_{x2}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos(4\pi\ f_0 t)\cos(4\pi\ f_0(t+\tau))dt = \frac{1}{2}\cos(4\pi\ f_0\tau)$$

Il processo non è regolare. Non essendo regolare e stazionario, esso non può essere nemmeno ergodico.

<u>Esercizio N. 6</u>

Si considerino i seguenti due processi aleatori, associati al medesimo esperimento costituito dal lancio di un dado:

a) $x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi\ f_0 t) & \text{uscita pari} \\ -\cos(2\pi\ f_0 t) & \text{uscita dispari} \end{cases}$

b) $y(t) = \begin{cases} e^{-|t|} & \text{uscita} \le 4 \\ -e^{-|t|} & \text{uscita} > 4 \end{cases}$

Dire se i due processi sono correlati o incorrelati.

<u>Soluzione</u>

Nella tabella sottostante sono evidenziate i sei possibili valori che può assumere il prodotto $x(t)y(t+\tau)$, il cui valore medio è la funzione di mutua correlazione $R_{xy}(t,t+\tau)$:

Uscita	$x(t)y(t+\tau)$
1	$-\cos(2\pi\ f_0 t)e^{-\lvert t+\tau\rvert}$
2	$\cos(2\pi\ f_0 t)e^{-\lvert t+\tau\rvert}$
3	$-\cos(2\pi\ f_0 t)e^{-\lvert t+\tau\rvert}$
4	$\cos(2\pi\ f_0 t)e^{-\lvert t+\tau\rvert}$
5	$\cos(2\pi\ f_0 t)e^{-\lvert t+\tau\rvert}$
6	$-\cos(2\pi\ f_0 t)e^{-\lvert t+\tau\rvert}$

Il valore medio dei valori riportati in tabella (ciascuno di essi ha probabilità 1/6) è nullo per ogni scelta di t e di τ. Del resto, poiché il valor medio del processo $x(t)$ è pure nullo, si ha:

$$R_{xy}(t,t+\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] = E[x(t)]E[y(t+\tau)] = 0$$

I due processi sono quindi incorrelati.