Teoria dei Segnali

(Appello del 6 febbraio 2003)

Prova scritta

Esercizio N. 1

In figura 1 sono rappresentati i segnali $x(t)$ e $y(t)$, che si trovano rispettivamente all'ingresso e all'uscita di un sistema LTI tempo continuo. Determinare la risposta impulsiva del sistema.

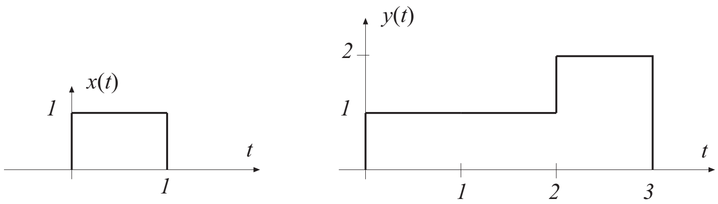

Fig.1

Soluzione

Poichè risulta $y(t) = x(t) + x(t-1) + 2x(t-2)$, la risposta impulsiva non può essere altro che $\delta(t) + \delta(t-1) + 2\delta(t-2)$

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto è retto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n-1]$$

Detrerminare le costanti a e b in modo tale che la risposta impulsiva del sistema sia:

$$h[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]$$

Soluzione

Eseguendo la trasformata di Fourier di entrambi i membri dell'equazione alle differenze, si ricava:

$$Y(e^{j\Omega})(1 + ae^{-j\Omega}) = be^{-j\Omega} X(e^{j\Omega}),$$

da cui risulta che la risposta in frequenza del sistema ha la forma seguente:

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{be^{-j\Omega}}{1 + ae^{-j\Omega}}$$

Si riconosce facilmente che essa è la trasformata della funzione $h[n]=b(-a)^{n-1}u[n-1]$.
Pertanto dovrà essere: $b=-\frac{1}{3}, \quad a=\frac{1}{3}$.

Esercizio N. 3

Si considerino le seguenti 4 funzioni della variabile f:

a) $\frac{e^{-j2\pi f_0}}{a-j2\pi f}$ b) $\frac{e^{-j2\pi f t_0}}{2\pi f - ja}$ c) $\frac{e^{-jf t_0}}{a-j2\pi f t_0}$ d) $\frac{e^{-j2\pi f t_0}}{a-2\pi f t_0}$

con a, f_0 e t_0 delle costanti.

Dire, giustificando la risposta, quale (o quali) di esse può essere la risposta in frequenza di un sistema LTI e calcolare la corrispondente risposta impulsiva.

Soluzione

L'unica funzione che gode della proprietà di simmetria:

$$H(-f)=H^*(f)$$

è la funzione c). Per determinare agevolmente la corrispondente antitrasformata di Fourier è opportuno ricordare che esiste la seguente corrispondenza:

$$e^{\beta t}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{\beta - j2\pi f}$$

La funzione c) può essere messa in forma analoga:

$$\frac{e^{-jf t_0}}{a-j2\pi f t_0}=\frac{1}{t_0}\left(\frac{1}{\frac{a}{t_0}-j2\pi f}\right)e^{-j2\pi f\left(\frac{t_0}{2\pi}\right)}=\frac{Ke^{-j2\pi f t_1}}{\beta - j2\pi f}$$

in cui: $\beta=\frac{a}{t_0}, K=\frac{1}{t_0}$ e $t_1=\frac{t_0}{2\pi}$

La risposta impulsiva è pertanto data dalla funzione $\frac{1}{t_0}e^{\frac{a}{t_0}\left(t-\frac{t_0}{2\pi}\right)}u\left(\frac{t_0}{2\pi}-t\right)$

Esercizio N. 4 *(riservato agli studenti della laurea triennale))*

Un'antenna riceve un segnale sinusoidale di ampiezza complessa V data dalla relazione:

$$V=V_0\left(1+e^{j\phi}\right),$$

ove V_0 è una costante e ϕ è una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra 0 e 2π.

Calcolare la probabilità dell'evento: $|V| \le |V_0|$.

Soluzione

La quantità $|V|$ è una variabile aleatoria, funzione della variabile aleatoria ϕ. In particolare:

$$|V| = |V_0|\sqrt{1+\cos^2\phi + 2\cos\phi + \sin^2\phi} = |V_0|\sqrt{2(1+\cos\phi)} = 2|V_0|\cos\frac{\phi}{2}$$

Il suo andamento in funzione della fase ϕ è riportato in figura I.

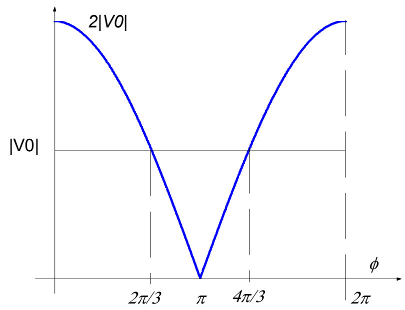

Fig. I

Dall'esame di questa figura risulta chiaro che l'evento $|V| \le |V_0|$ è verificato per valori di ϕ compresi tra $2\pi/3$ e $4\pi/3$. A questo intervallo di valori corrisponde una probabilità pari a $1/3$.

Esercizio N. 4 *(riservato agli studenti della laurea quinquennale)*

Un sistema causale ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

Determinare la sua risposta impulsiva.

Soluzione

La funzione di trasferimento può essere posta nella seguente forma:

$$H(z) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{z-j} - \frac{1}{z+j}\right] = \frac{z^{-1}}{2j}\left[\frac{1}{1-jz^{-1}} - \frac{1}{1+jz^{-1}}\right]$$

Poiché il sistema è causale, la regione di convergenza dovrà essere esterna alla circonferenza individuata dal modulo del polo di modulo massimo e pertanto sarà esterna alla circonferenza di raggio unitario. In tale regione l'antitrasformata della parte di $H(z)$ tra parentesi quadra è:

$$h'[n] = \frac{1}{2j}\left[e^{j\frac{\pi}{2}n} - e^{-j\frac{\pi}{2}n}\right]u[n] = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)u[n]$$

Tenendo conto del fattore di ritardo z^{-1}, si perviene la risultato:

$$h[n] = \sin\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right)u[n-1]$$

Esercizio N. 5

Un processo aleatorio stazionario ha la seguente densità di probabilità del I° ordine:

$$p_1(x) = \begin{cases} c\left(1 - \frac{|x|}{2}\right) & per\ |x| \leq 2 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Esso è posto all'ingresso di un sistema che presenta una relazione ingresso-uscita come indicato in figura 2.

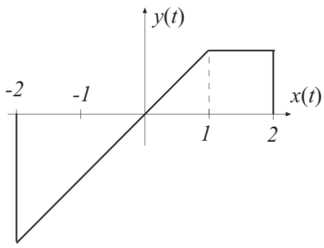

Fig.2

Determinare la costante *c*, la densità di probabilità del I° ordine del processo aleatorio di uscita $y(t)$ e calcolare il suo valore medio.

Soluzione

Affinchè $p_1(x)$ sia una densità di probabilità, deve essere $c = \frac{1}{2}$.

In figura II è rappresentata la densità di probabilità del processo aleatorio $x(t)$.

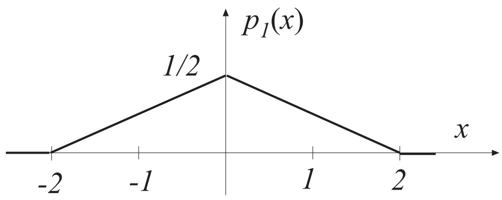

Fig II

La variabile aleatoria $y(t)$ coincide con $x(t)$ per $-2 \leq x < 1$, mentre $y(t) = 1$ per $1 \leq x(t) \leq 2$. Poiché l'evento $1 \leq x(t) \leq 2$ ha probabilità *1/8*, questa sarà anche la probabilità dell'evento $y = 1$. La densità di probabilità del I° ordine del processo $y(t)$ risulta quindi caratterizzata da un impulso di area *1/8*, centrato in $y = 1$ e si presenterà come indicato in figura III.

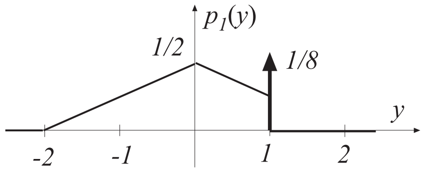

Fig. III

Il valore medio del processo e valutabile come:

$$y_m = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} y\left(1+\frac{y}{2}\right)dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} y\left(1-\frac{y}{2}\right)dy + \frac{1}{8} = -\frac{1}{24}$$

<u>Esercizio N. 6</u>

Un processo aleatorio stazionario $x(t)$ ha per densità spettrale di potenza la funzione rappresentata in figura 3. Esso viene campionato con un intervallo di campionamento $T_s = \frac{1}{2f_m}$, ottenendo così una sequenza di variabili aleatorie $y_k = x(t_k)$. Calcolare $E\left[y_j y_i\right]$ per la generica coppia di indici *j, i*.

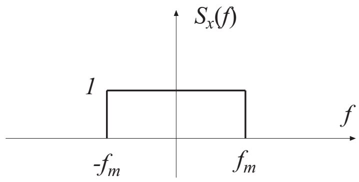

Fig. 3

Soluzione

Il valor medio richiesto coincide con la funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$del processo aleatorio $x(t)$, calcolata per $\tau_k = \frac{k}{2f_m}$, con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots = i - j$. Di conseguenza $E\left[y_j y_i\right] = 2f_m \,\mathrm{sinc}(2f_m\tau_k) = 2f_m\,\mathrm{sinc}(k)$, vale a dire:

$$E\left[y_j y_i\right] = \begin{cases} 0 & per\ i \neq j \\ 2f_m & per\ i = j \end{cases}$$