Teoria dei Segnali

(Appello del 12 gennaio 2004)

laurea triennale

Prova scritta

<u>Esercizio N. 1</u>

La risposta di un sistema lineare all'impulso ideale centrato in t_0 è pari a $e^{-2t}\,u(t-t_0)$.

Calcolare la risposta del sistema al segnale $x(t)=\mathrm{rect}\left(t-\frac{1}{2}\right)$.

Soluzione

La risposta è data dal seguente integrale:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{rect}\left(\tau-\frac{1}{2}\right)e^{-2t}u(t-\tau)d\tau = e^{-2t}\int_{0}^{1}u(t-\tau)d\tau$$

Pertanto: $y(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ te^{-2t} & 0\le t\le 1\\ e^{-2t} & t>0\end{cases}$

<u>Esercizio N. 2</u>

Un sistema LTI tempo discreto ha la risposta impulsiva indicata in figura1.

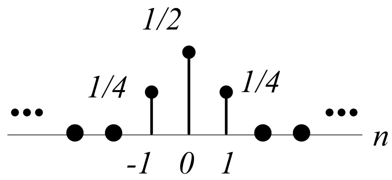

Fig. 1

Qual è la risposta del sistema al segnale $x[n]=\cos(\pi n)\{u[n]-u[n-2]\}$?

Soluzione

Il segnale $x[n]$ può essere posto nella forma: $x[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$. Di conseguenza la risposta del sistema è pari a $h[n]-h[n-1]$, vale a dire:

$$y[n]=\frac{1}{4}\delta[n+1]+\frac{1}{2}\delta[n]+\frac{1}{4}\delta[n-1]-\frac{1}{4}\delta[n]-\frac{1}{2}\delta[n-1]-\frac{1}{4}\delta[n-2]$$
$$=\frac{1}{4}\delta[n+1]+\frac{1}{4}\delta[n]-\frac{1}{4}\delta[n-1]-\frac{1}{4}\delta[n-2]$$

Esercizio N. 3

Lo spettro delle parti in fase e in quadratura, riferite ad una frequenza f_0, di un segnale passa banda sono rispettivamente $\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$ e $-\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$. Disegnare con cura lo spettro (*att.ne: modulo e fase*) dell'inviluppo complesso del segnale passa banda.

Soluzione

Poiché $\widetilde{X}(f)=X_c(f)+jX_s(f)$, il modulo dello spettro dell'inviluppo complesso è pari a $\sqrt{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$. Per quanto concerne la fase, essa è data da $\arctan\left[\frac{X_s(f)}{X_c(f)}\right]=-\frac{\pi}{4}$.

I relativi diagrammi sono riportati in figura I.

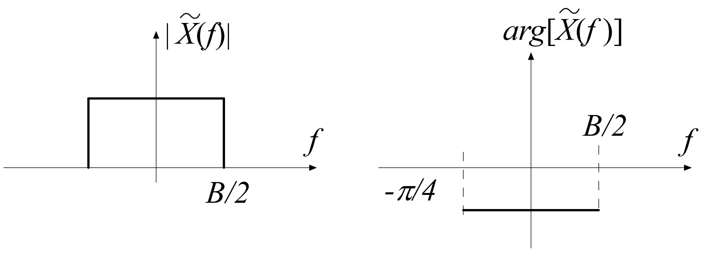

Fig. I

Esercizio N. 4

Quale segnale tempo discreto ha per trasformata di Fourier la funzione $\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}$?

Soluzione

Ricordando che la trasformata del gradino è: $\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-k2\pi)$, si perviene alla relazione:

$$F^{-1}\left\{\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}\right\}=u[n]-F^{-1}\left\{\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-k2\pi)\right\}=u[n]-\frac{1}{2}$$

Esercizio N. 5

La funzione di autocorrelazione di un processo aleatorio stazionario $x(t)$ è data da:

$$R_x(\tau) = e^{-|\tau|}$$

Si calcoli la densità spettrale di potenza del processo aleatorio $y(t) = x(t) - \dfrac{dx(t)}{dt}$.

Soluzione

Il processo aleatorio $\{y(t)\}$ può essere visto come il processo all'uscita di un sistema LTI, al cui ingresso vi sia il processo $\{x(t)\}$, avente risposta in frequenza $H(f) = 1 - j2\pi f$. Di conseguenza, la densità spettrale di potenza $S_y(f)$ del processo $\{y(t)\}$ sarà legata a quella del processo $\{x(t)\}$ dalla relazione:

$$S_y(f) = S_x(f)\left[1 + 4\pi^2 f^2\right]$$

Poiché $S_x(f)$ è la trasformata di Fourier di $R_x(\tau)$, risulta:

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{0} e^{\tau} e^{-j2\pi f\tau} d\tau + \int_{0}^{+\infty} e^{-\tau} e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \frac{2}{1 + 4\pi^2 f^2}$$

$$S_y(f) = 2$$

Esercizio N. 6

La generica realizzazione di un processo aleatorio è così definita:

$$x(t) = 1 - \mathrm{rect}(t - t_0)$$

in cui t_0 è una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra -1 e $+1$. Dire, giustificando la risposta, se il processo è (almeno in senso debole) regolare.

Soluzione

In figura II è rappresentata una generica realizzazione di questo processo.

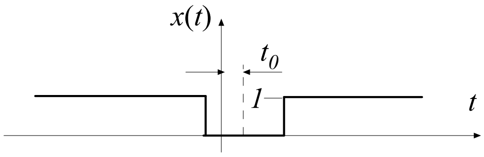

Fig. II

Le varie realizzazioni si differenziano per il diverso valore di t_0 . Il valor medio temporale di ciascuna realizzazione è sicuramente pari a 1. Per quanto riguarda la funzione di autocorrelazione temporale, risulta:

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}(1-rect(t-t_0))(1-rect(t+\tau-t_0))d\tau = 1$$

(*al tendere di T all'infinito sull'intervallo –T/2, +T/2 la funzione integrando è pari a 1 dappertutto, tranne che su un intervallo di lunghezza finita, ove vale 0*).

Il processo dunque è regolare, almeno in senso debole.