Teoria dei Segnali

(Appello del 28 gennaio 2005)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema LTI tempo-continuo ha la seguente risposta impulsiva:

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

Dire, giustificando la risposta, se il sistema è stabile e causale. Calcolare la sua risposta al segnale $x(t) = \cos(2t)$

Soluzione

La risposta impulsiva è nulla per $t < 0$ e quindi il sistema è causale. Inoltre:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = 1$$

Ciò significa che il sistema è anche stabile.

Scrivendo il segnale di ingresso nella forma $x(t) = \frac{e^{j2t}}{2} + \frac{e^{-j2t}}{2}$, si vede facilmente che la risposta sarà pari a $H(2)\frac{e^{j2t}}{2} + H(-2)\frac{e^{-j2t}}{2} = \mathrm{Re}\{H(2)e^{j2t}\}$. La risposta in frequenza è data da $\frac{1}{1+j\omega}$. Si ricava pertanto:

$$y(t) = \frac{1}{5}[\cos(2t) + 2\sin(2t)]$$

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo-discreto ha la seguente risposta impulsiva:

$$h[n] = u[n]$$

Calcolare la sua risposta al segnale $x[n] = (-1)^n u[n]$.

Soluzione

Eseguendo la somma di convoluzione, si vede che la risposta è nulla per $n < 0$, uguale a 1 per n pari e uguale a zero per n dispari. Può essere indicata convenzionalmente come $y[n] = u\left[\frac{n}{2}\right]$.

Esercizio N. 3

Un sistema LTI tempo-discreto ha la seguente risposta impulsiva:

$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$$

Calcolare la sua risposta al segnale $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$.

Soluzione

Il segnale $x[n]$ è combinazione lineare di due autofunzioni: infatti $x[n]=\frac{e^{j\frac{\pi}{2}n}}{2}+\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}n}}{2}$. La risposta sarà pari a:

$$H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)\frac{e^{j\frac{\pi}{2}n}}{2}+H\left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}n}}{2}=\mathrm{Re}\left\{H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)e^{j\frac{\pi}{2}n}\right\}.$$

La risposta in frequenza è data da $\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$ e dunque $H\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{1}{1+j\frac{1}{2}}=\frac{4}{5}-j\frac{2}{5}$.

Il segnale all'uscita del sistema sarà $y[n]=\frac{4}{5}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)+\frac{2}{5}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$.

Esercizio N. 4

Si consideri il segnale $x(t)=\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\{\cos(\omega_0 t)+\cos(\omega_1 t)\}$, con $\omega_1>\omega_0$. Sotto le seguenti ipotesi:

$$T>>\frac{2\pi}{\omega_0}$$
$$T>>\frac{2\pi}{\omega_1}$$

esso può essere considerato un segnale passa banda. Scrivere l'espressione del suo inviluppo complesso rispetto alla frequenza angolare ω_0.

Soluzione

Come sarà fatto grossomodo lo spettro di $x(t)$? Possiamo disegnarlo (fig. I) per frequenze positive, ricordando che lo spettro della funzione $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ è la funzione $T\,\mathrm{Sa}\left(\omega\frac{T}{2}\right)$.

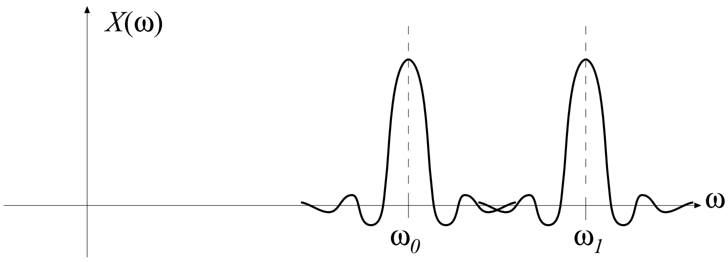

fig. I

Lo spettro dell'inviluppo complesso si ottiene traslando la parte a frequenze positive di $2X(\omega)$. Pertanto lo spettro di $\tilde{x}(t)$sarà fatto come in fig. II.

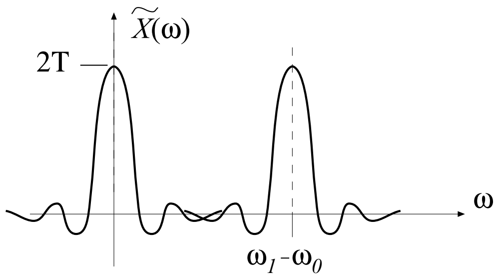

Fig. II

Questo è lo spettro della funzione $\tilde{x}(t) = 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\left(1 + e^{j(\omega_1-\omega_0)t}\right)$

<u>Esercizio N. 5</u>

Un processo aleatorio è associato all'esperimento del lancio di due monete. La corrispondenza tra uscite elementari dell'esperimento e realizzazioni del processo aleatorio è la seguente:

$$TT \rightarrow x(t) = \cos(\omega_0 t)$$
$$TC \rightarrow x(t) = -\cos(\omega_0 t)$$
$$CT \rightarrow x(t) = \sin(\omega_0 t)$$
$$CC \rightarrow x(t) = -\sin(\omega_0 t)$$

ove ω_0 è una costante.

Dire, giustificando le risposte, se il processo è (in senso debole) stazionario e/o regolare.

Soluzione

Calcolo del valor medio:

$$E[x(t)] = \frac{1}{4}\cos(\omega_0 t) - \frac{1}{4}\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{4}\sin(\omega_0 t) - \frac{1}{4}\sin(\omega_0 t) = 0$$

Funzione di auto correlazione

$$R_x(t, t+\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = \frac{1}{4}\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 (t+\tau)) + \frac{1}{4}\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 (t+\tau)) +$$

$$+ \frac{1}{4}\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0 (t+\tau)) + \frac{1}{4}\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0 (t+\tau))$$

$$= \frac{1}{2}\cos(\omega_0 \tau)$$

Il processo è stazionario.

Per tutte le realizzazioni il valor medio temporale è nullo. La funzione di autocorrelazione temporale per la prima e per la seconda realizzazione risulta:

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 (t+\tau))dt = \frac{1}{2}\cos(\omega_0 \tau)$$

Per la terza e quarta realizzazione si ha:

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0 (t+\tau))dt = \frac{1}{2}\cos(\omega_0 \tau)$$

Il processo aleatorio è regolare.

Esercizio N. 6

All'ingresso del sistema di figura 1 è applicato un processo aleatorio $\{x(t)\}$ stazionario gaussiano bianco, con densità spettrale di potenza bilatera pari a *1* W/Hz. Calcolare la funzione di autocorrelazione e la densità spettrale di potenza del processo di uscita.

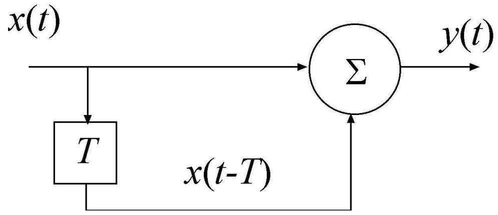

Fig. 1

Soluzione

La risposta impulsiva del sistema è pari a $\delta(t) + \delta(t-T)$ e la sua risposta in frequenza è pari a $1 + e^{-j\omega T}$. Risulta quindi:

$$S_y(\omega) = S_x(\omega)|H(\omega)|^2 = \left|1 + e^{-j\omega T}\right|^2$$

$$= 1 + \cos^2(\omega T) + \sin^2(\omega T) + 2\cos(\omega T) = 4\cos^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

$$R_y(\tau) = 2\delta(\tau) + \delta(\tau - T) + \delta(\tau + T)$$