Teoria dei Segnali

(Appello del 23 gennaio 2006)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema lineare tempo continuo risponde all'impulso centrato in t_0 (cioè a $\delta(t-t_0)$) con la funzione $u(t-t_0)-u\left(\frac{t}{2}-t_0\right)$. Il sistema è invariante nel tempo? (giustificare la risposta).

Calcolare la risposta del sistema al segnale $x(t)=e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$

Soluzione

In corrispondenza all'impulso centrato nell'origine $(t_0=0)$, la risposta del sistema risulta essere $u(t)-u\left(\frac{t}{2}\right)$. Se il sistema fosse tempo invariante, in corrispondenza ad un ingresso pari a $\delta(t-t_0)$ dovrebbe rispondere con $u(t-t_0)-u\left(\frac{t-t_0}{2}\right)$. Pertanto il sistema non è tempo invariante. In questa circostanza la risposta ad un segnale $x(t)$ è calcolata secondo la seguente regola:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t,\tau)d\tau$$

che nel caso specifico diventa:

$$y(t)=\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\tau}\left\{u(t-\tau)-u\left(\frac{t}{2}-\tau\right)\right\}d\tau$$

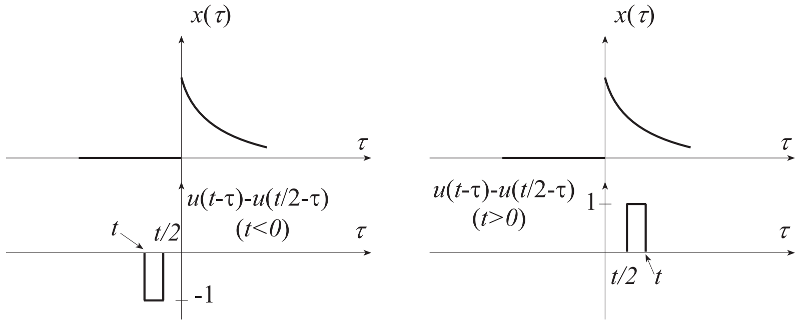

Fig. I

Osservando la figura I si vede che:

$$y(t)=\begin{cases}0 & \text{per } t<0\\ \displaystyle\int_{t/2}^{t} e^{-\frac{1}{2}\tau}\,d\tau = 2\left[e^{-\frac{1}{4}t}-e^{-\frac{1}{2}t}\right] & \text{per } t>0\end{cases}$$

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente risposta impulsiva:

$$h[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-2]$$

Calcolare la sua risposta in frequenza e la sua risposta al segnale

$$x[n]=\delta[n]-\frac{1}{6}\delta[n-1]$$

Soluzione

La funzione $h[n]$ può convenientemente essere posta nella forma:

$$h[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}u[n-2]=\frac{1}{18}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2}u[n-2]$$

la cui trasformata di Fourier è:

$$H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{18}\frac{e^{-j2\Omega}}{1-\frac{1}{6}e^{-j\Omega}}$$

La risposta a $x[n]=\delta[n]-\frac{1}{6}\delta[n-1]$ è data da:

$$y[n]=\frac{1}{18}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2}u[n-2]-\frac{1}{6}\frac{1}{18}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-3}u[n-3]$$

$$=\frac{1}{18}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2}\delta[n-2]=\frac{1}{18}\delta[n-2]$$

Esercizio N. 3

Si consideri il sistema LTI tempo discreto rappresentato in figura 1, in cui gli elementi indicati con la lettera D (*Delay*) producono un ritardo pari a 1. Si calcoli la sua risposta in frequenza e la corrispondente risposta impulsiva.

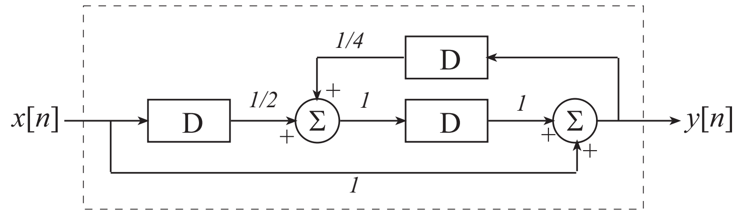

Fig. 1

<u>Soluzione</u>

Il sistema è retto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-2]=x[n]+\frac{1}{2}x[n-2]$$

Trasformando tale equazione secondo Fourier si ottiene la risposta in frequenza del sistema:

$$Y\left(e^{j\Omega}\right)\left\{1-\frac{1}{4}e^{-j2\Omega}\right\}=X\left(e^{j\Omega}\right)\left\{1+\frac{1}{2}e^{-j2\Omega}\right\}\Rightarrow H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1+\frac{1}{2}e^{-j2\Omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j2\Omega}}$$

Per ricavare facilmente la risposta impulsiva conviene trasformare $H\left(e^{j\Omega}\right)$ nel modo seguente:

$$H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1+\frac{1}{2}e^{-j2\Omega}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)}$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)}+\frac{\frac{1}{2}e^{-j2\Omega}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)}$$

La prima parte ha come antitrasformata la funzione:

$$h_1[n]=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}u[n]$$

mentre la seconda parte corrisponde alla funzione $h_2[n]=\frac{1}{2}h_1[n-2]$. In conclusione:

$$h[n]=h_1[n]+h_2[n]=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}\left\{\frac{1}{2}u[n]-u[n-2]\right\}$$

<u>Esercizio N. 4</u>

Si consideri il seguente segnale passa banda:

$$s(t)=Am(t)\cos(\omega_0 t+\sin\Omega t)$$

con $m(t)$ un segnale con spettro limitato alla frequenza Ω_M e sia inoltre:

$\Omega_M << \omega_0$ e $\Omega << \omega_0$.

Si determini l'inviluppo complesso (riferito a ω_0) e la trasformata di Hilbert di $s(t)$.

Soluzione

Le condizioni su Ω_M e su Ω consentono di dire che con ottima approssimazione $s(t)$ è un segnale passa banda. Esso risulta essere dato da:

$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{Am(t)e^{j\sin\Omega t}e^{j\omega_0 t}\right\}$$

da cui si riconosce che $\tilde{s}(t) = Am(t)e^{j\sin\Omega t}$. Inoltre il segnale analitico associato a $s(t)$, che per definizione è:

$$s_+(t) = s(t) + j\hat{s}(t),$$

è anche dato da:

$$s_+(t) = Am(t)e^{j\sin\Omega t}e^{j\omega_0 t} = Am(t)\{\cos(\omega_0 t + \sin\Omega t) + j\sin(\omega_0 t + \sin\Omega t)\}$$

Dal confronto si deduce che $\hat{s}(t) = Am(t)\sin(\omega_0 t + \sin\Omega t)$.

Esercizio N. 5

Si consideri il processo aleatorio $\{x(t)\}$ definito tramite il seguente esperimento: lancio contemporaneo di un dado e di una moneta. Ad ogni prova rimane associata la funzione $x(t) = u(t \pm t_k)$, ove t_k corrisponde al numero indicato sulla faccia superiore del dado, e vale il segno + se sulla moneta è apparso "testa" e il segno – se invece è apparso "croce".

Il processo, almeno in senso debole, è regolare?
Si tratta di un processo stazionario?
(giustificare le risposte).

Soluzione

Il valor medio temporale di ciascuna realizzazione è pari a $\frac{1}{2}$, e la funzione di autocorrelazione temporale è pari a $\frac{1}{2}$ per ciascuna di esse. Pertanto il processo è regolare. Esso però non può essere stazionario: infatti il valor medio di insieme è certamente nullo in corrispondenza a un valore di t inferiore a –6, mentre è certamente pari a 1 per $t > 6$.

Esercizio N. 6

Un rumore gaussiano bianco di densità spettrale di potenza pari a 4 W/Hz è applicato all'ingresso di un sistema LTI avente la seguente risposta impulsiva:

$$h(t) = \frac{1}{8} e^{-\frac{1}{4}t} u(t)$$

Calcolare la potenza media del processo all'uscita del sistema.

Soluzione

La funzione di autocorrelazione del processo è $R_x(\tau) = 4\delta(\tau)$. La potenza media all'uscita corrisponde a $R_y(0)$ e quindi è calcolabile attraverso il seguente integrale:

$$R_y(0) = 4 \int_0^{+\infty} \frac{1}{8} e^{-\frac{1}{4}\alpha} \frac{1}{8} e^{-\frac{1}{4}\alpha} d\alpha = \frac{1}{16} \left(-2e^{-\frac{1}{2}\alpha} \right) \Bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{8} = 0.125 \quad W$$