Teoria dei Segnali
(Appello del 12 giugno 2006)

Prova scritta

Esercizio N. 1

La trasformata di Fourier del segnale $x(t)$ è:

$$X(\omega) = \frac{2e^{j\omega}}{\frac{1}{2} + j\omega}.$$

Il segnale $x(t)$ è reale?

Se il segnale $x(t)$ è applicato all'ingresso di un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t) = u(t)$, qual è il segnale all'uscita di tale sistema?

Soluzione

Poiché $X(\omega) = X^*(-\omega)$, il segnale $x(t)$ è reale (tra l'altro si riconosce facilmente che $x(t) = 2e^{-\frac{1}{2}(t+1)}u(t+1)$).

Il sistema è un integratore. Poiché $\int_0^t 2e^{-\frac{1}{2}\tau} d\tau = 4\left[1 - e^{-\frac{1}{2}t}\right]u(t)$, la risposta cercata sarà: $y(t) = 4\left[1 - e^{-\frac{1}{2}(t+1)}\right]u(t+1)$.

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto risponde al segnale $x[n]$ con il segnale $y[n]$, rappresentati in figura 1.

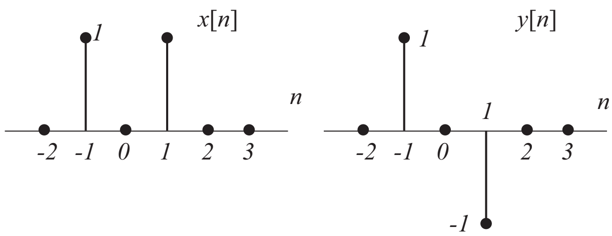

Fig. 1

Qual è la risposta in frequenza del sistema?
Disegnare con cura la sua risposta impulsiva.

Soluzione

Le trasformate di Fourier di $x[n]$ e $y[n]$ sono rispettivamente:

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=e^{j\Omega}+e^{-j\Omega} \qquad Y\left(e^{j\Omega}\right)=e^{j\Omega}-e^{-j\Omega}$$

Pertanto la risposta in frequenza è $H\left(e^{j\Omega}\right)=\dfrac{e^{j\Omega}-e^{-j\Omega}}{e^{j\Omega}+e^{-j\Omega}}=\dfrac{1-e^{-j2\Omega}}{1+e^{-j2\Omega}}$.

Conviene innanzitutto identificare l'antitrasformata di $H_1\left(e^{j\Omega}\right)=\dfrac{1}{1+e^{-j2\Omega}}$

Essa è data dalla funzione rappresentata in figura I.

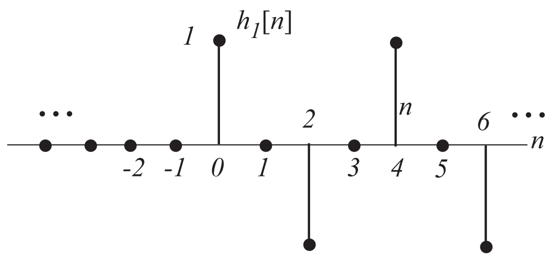

Fig. I

La risposta impulsiva cercata è data da $h[n]=h_1[n]-h_1[n-2]$. (figura II)

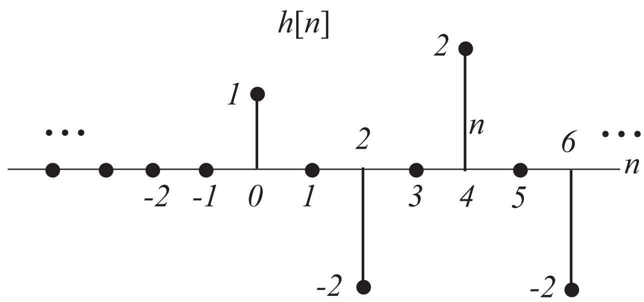

Fig. II

Esercizio N. 3

Un sistema LTI tempo discreto ha la risposta impulsiva indicata in figura 2.

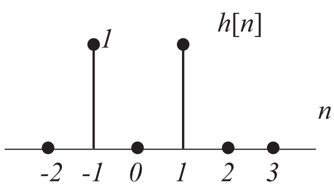

Fig. 2

Qual è la risposta del sistema al segnale $x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\{u[n] - u[n-4]\}$?

Soluzione

Il segnale $x[n]$ può essere posto nella forma: $x[n] = \delta[n-1] - \delta[n-3]$. Di conseguenza la risposta del sistema è pari a $h[n-1] - h[n-3]$, vale a dire:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \delta[n] + \delta[n-2] - \delta[n-2] - \delta[n-4] \\
&= \delta[n] - \delta[n-4]
\end{aligned}
$$

<u>Esercizio N. 4</u>

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{(1-z)^2}{1-z^{-2}}$$

con regione di convergenza $|z| > 1$.

Si ricavi la risposta impulsiva del sistema. Dire, giustificando la risposta, se il sistema è causale.

<u>Soluzione</u>

La funzione $H(z)$ può essere semplificata:

$$H(z) = \frac{(1-z)^2}{1-z^{-2}} = \frac{(1-z)^2}{(1-z^{-1})(1+z^{-1})} = \frac{(1-z)^2}{-(1-z)(1+z^{-1})z^{-1}} = -\frac{z-z^2}{(1+z^{-1})}$$

Nell'ultima espressione si riconosce la trasformata Z della funzione

$$-(-1)^{n+1}u[n+1] + (-1)^{n+2}u[n+2] = (-1)^n\{u[n+1] + u[n+2]\}.$$

Tale risposta impulsiva è propria di un sistema non causale. Inoltre il sistema non è stabile, poiché la circonferenza di raggio unitario non appartiene alla regione di convergenza

<u>Esercizio N. 5</u>

Si consideri il processo aleatorio associato all'esperimento "lancio di una moneta", in cui alle uscite "testa" e "croce" corrispondono rispettivamente le funzioni:

$$x_1(t) = u(t)$$
$$x_2(t) = u(-t)$$

Si indichi, sul piano (t, τ), il dominio ove la funzione di auto correlazione $R_x(t, t+\tau)$ è nulla.

Soluzione

Le due realizzazioni distinte del processo hanno l'andamento riportato in figura III

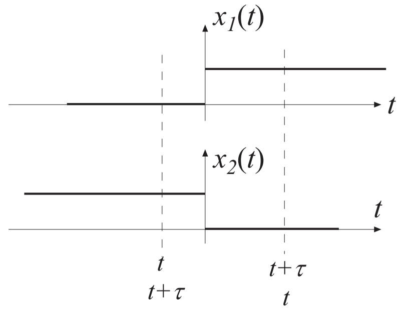

Fig. III

Se è $t < 0$, affinché la funzione di auto correlazione sia nulla deve essere $\tau > |t|$, mentre quando è $t > 0$ essa si annulla se è $\tau < -t$. Pertanto $R_x(t, t+\tau) = 0$ nelle aree indicate in figura IV.

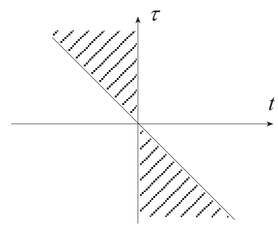

Fig. II

Esercizio N. 6

Un processo aleatorio stazionario ha una densità spettrale di potenza data dalla funzione $S_x(f) = \dfrac{1}{1+f^2}$. Calcolare la sua varianza.

Soluzione

Il processo ha valor medio nullo (perché?). Pertanto la sua varianza coincide con il valore quadratico medio del processo, che è dato da:

$$E\left[x(t)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+f^2} df = \arctan(f)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$