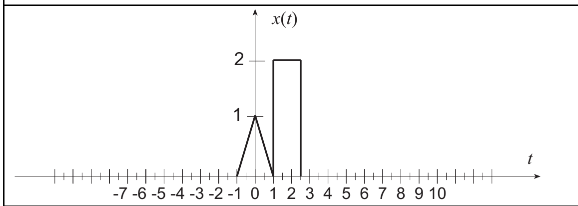
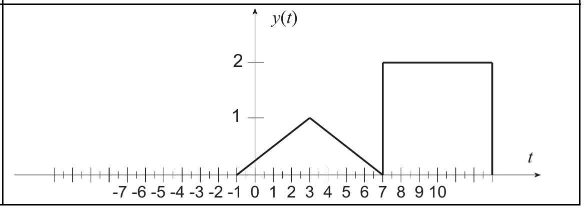
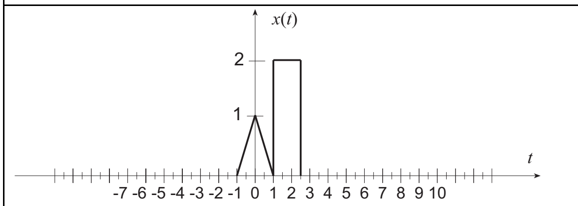
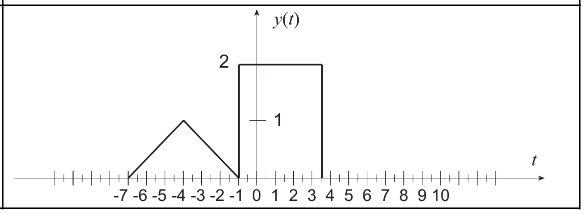
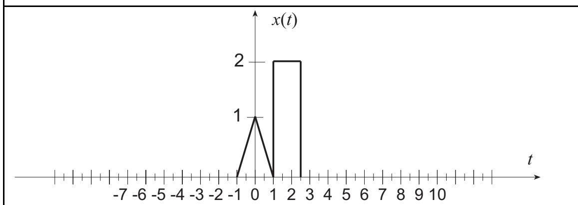
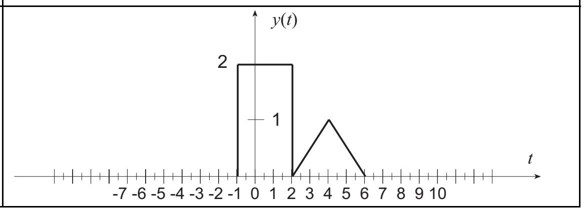
PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI
9 novembre 2006

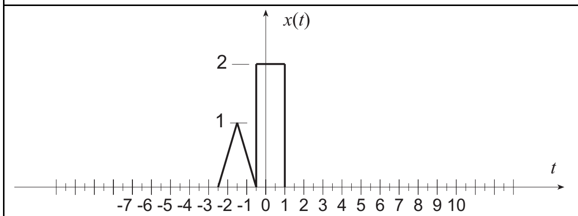
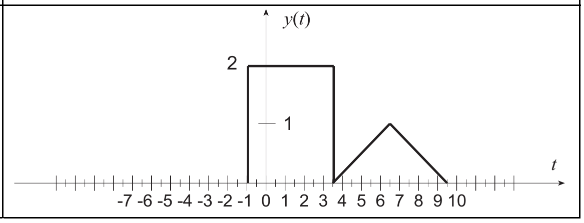
Esercizio N. 1

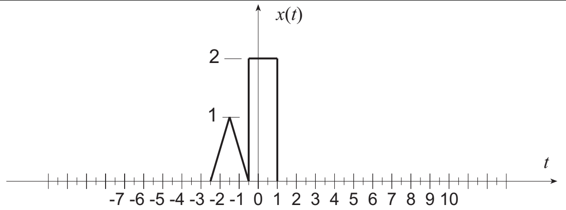
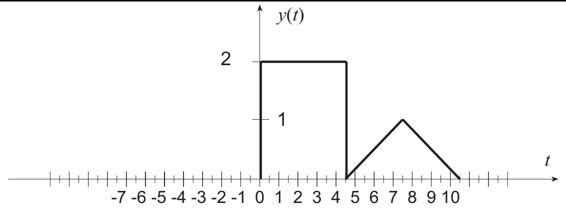
Dato il segnale $x(t)$, il cui grafico è riportato in figura, si disegni il grafico del segnale $y(t)$.

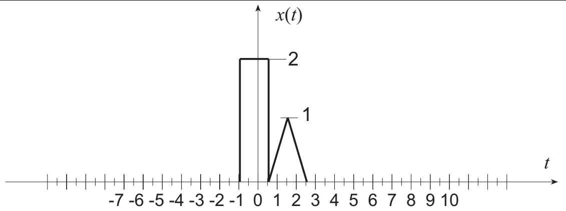
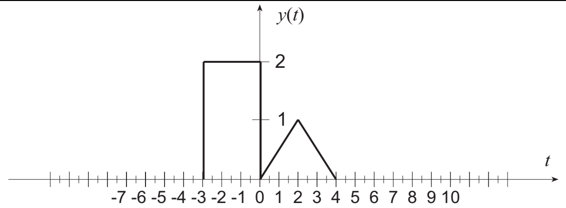
$x(t)$	$y(t)=x\left(\frac{t-3}{4}\right)$
	

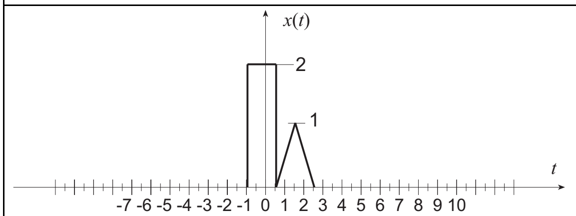
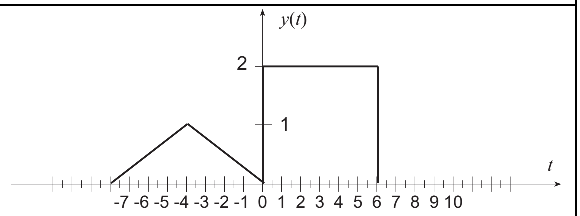
$x(t)$	$y(t)=x\left(\frac{t+4}{3}\right)$
	

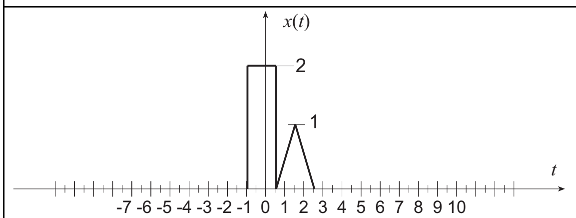
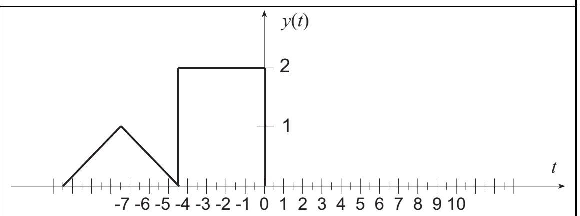
$x(t)$	$y(t)=x\left(2-\frac{t}{2}\right)$
	

$x(t)$	$y(t)=x\left(\frac{2-t}{3}\right)$
	

$x(t)$	$y(t)=x\left(1-\frac{t}{3}\right)$
	

$x(t)$	$y(t)=x\left(\frac{t+1}{2}\right)$
	

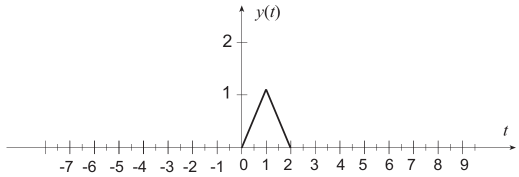
$x(t)$	$y(t)=x\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{4}\right)$
	

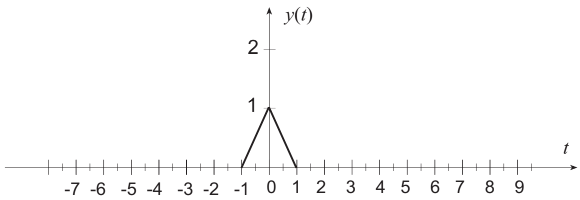
$x(t)$	$y(t)=x\left(-\frac{t}{3}-1\right)$
	

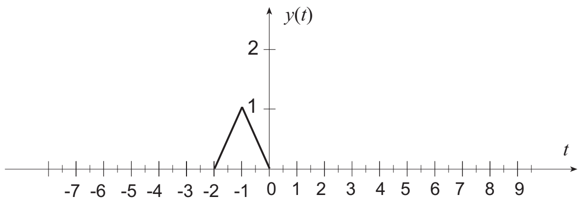
Esercizio N. 2

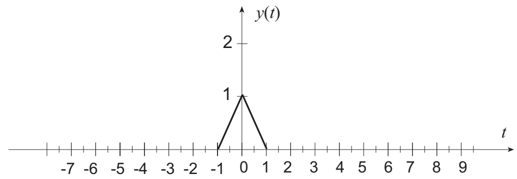
Per ciascuno dei sistemi LTI indicati di seguito e caratterizzati dalla risposta impulsiva $h(t)$, dire, giustificando la risposta, se è stabile e se è causale.

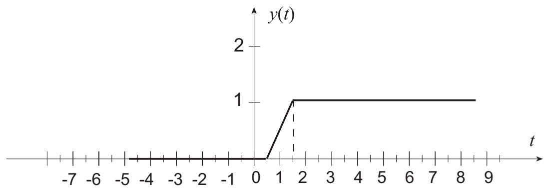
Disegnare con cura la sua risposta al segnale $x(t)$.

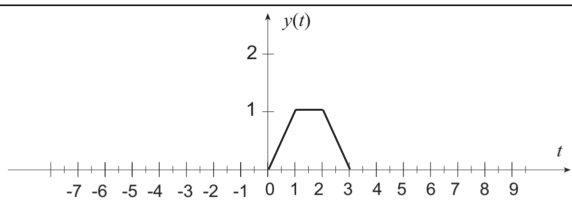
$h(t) = \mathrm{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right)$	Causale: Sì, ($h(t) = 0$ per $t < 0$)
	Stabile: Sì ($\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert h(t) \rvert dt < \infty$)
$x(t) = \mathrm{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right)$	

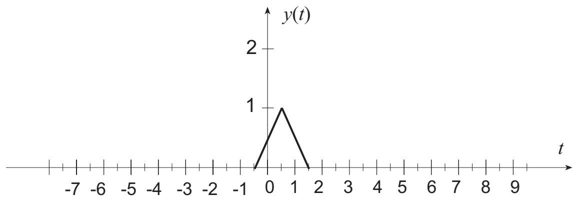
$h(t) = \mathrm{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right)$	Causale: Sì, ($h(t) = 0$ per $t < 0$)
	Stabile: Sì ($\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert h(t) \rvert dt < \infty$)
$x(t) = \mathrm{rect}\left(t + \frac{1}{2}\right)$	

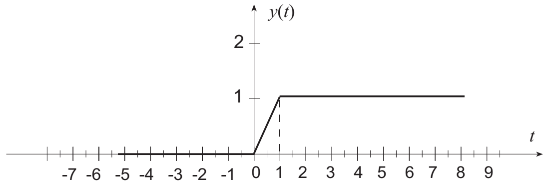
$h(t) = \mathrm{rect}\left(t + \frac{1}{2}\right)$	Causale: No, ($h(t) \neq 0$ per $-1 < t < 0$)
	Stabile: Sì ($\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert h(t) \rvert dt < \infty$)
$x(t) = \mathrm{rect}\left(t + \frac{1}{2}\right)$	

$h(t) = \mathrm{rect}\left(-t - \frac{1}{2}\right)$	Causale: No, ($h(t) \neq 0$ per $-1 < t < 0$)
	Stabile: Sì ($\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert h(t) \rvert dt < \infty$)
$x(t) = \mathrm{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right)$	

$h(t) = \mathrm{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right)$	Causale: Sì, ($h(t) = 0$ per $t < 0$)
	Stabile: Sì ($\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert h(t) \rvert dt < \infty$)
$x(t) = u\left(t - \frac{1}{2}\right)$	

$h(t) = \mathrm{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right)$	Causale: Sì, ($h(t) = 0$ per $t < 0$)
	Stabile: Sì ($\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert h(t) \rvert dt < \infty$)
$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\right)$	

$h(t) = \mathrm{rect}(t)$	Causale: No ($h(t) \neq 0$ per $-\frac{1}{2} < t < 0$)
	Stabile: Sì ($\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert h(t) \rvert dt < \infty$)
$x(t) = \mathrm{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right)$	

$h(t)=\mathrm{rect}\left(\frac{1}{2}-t\right)$	Causale: Sì ($h(t)=0$ per $t<0$)
	Stabile: Sì ($\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert h(t)\rvert dt<\infty$)
$x(t)=u(t)$	

Esercizio N. 3

Dati i seguenti sistemi LTI, caratterizzati dalla risposta in frequenza, calcolare la loro risposta al segnale $x(t)$

a) $H(\omega)=1+\frac{1}{5}j\omega$, $\quad x(t)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{5}t}u(t)$

L'uscita è pari a $x(t)+\frac{1}{5}\frac{d(x(t))}{dt}$. Pertanto: $y(t)=\frac{12}{25}e^{-\frac{1}{5}t}u(t)+\frac{1}{10}\delta(t)$

b) $H(\omega)=\frac{1}{j\omega}$, $\quad x(t)=e^{-\frac{1}{5}t}u(t)$.

La risposta in frequenza può essere scritta così: $H(\omega)=\underbrace{\left\{\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right\}}_{\text{integratore}}-\pi\delta(\omega)$.

Pertanto: $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau-\frac{1}{2}X(0)=5\left(1-e^{-\frac{1}{5}t}\right)u(t)-\frac{5}{2}$

c) $H(\omega)=\frac{1}{j\omega}$, $\quad x(t)=e^{-\frac{2}{3}t}u(t)$.

La risposta in frequenza può essere scritta così: $H(\omega)=\underbrace{\left\{\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right\}}_{\text{integratore}}-\pi\delta(\omega)$.

Pertanto: $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau-\frac{1}{2}X(0)=\frac{3}{2}\left(1-e^{-\frac{2}{3}t}\right)u(t)-\frac{3}{4}$

d) $H(\omega) = 1 - j\omega$, $\qquad x(t) = \cos\left(\omega_0\, t + \dfrac{\pi}{6}\right)u(t)$.

Per la proprietà della trasformata relativa alla derivata rispetto al tempo, la risposta di questo sistema è $y(t) = x(t) - \dfrac{dx(t)}{dt}$ e quindi:

$$y(t) = \cos\left(\omega_0\, t + \frac{\pi}{6}\right)u(t) + \omega_0 \sin\left(\omega_0\, t + \frac{\pi}{6}\right)u(t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\delta(t)$$

e) $H(\omega) = \dfrac{1}{2} - j\omega$, $\qquad x(t) = \dfrac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} u(t)$.

Per la proprietà della trasformata relativa alla derivata rispetto al tempo, la risposta di questo sistema è $y(t) = \dfrac{1}{2}x(t) - \dfrac{dx(t)}{dt}$ e quindi:

$$y(t) = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}t} u(t) + \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}t} u(t) - \frac{1}{2}\delta(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2}\delta(t)$$

f) $H(\omega) = 1 - \dfrac{1}{j\omega}$, $\qquad x(t) = e^{-t}u(t)$.

La risposta in frequenza può essere scritta così:

$$H(\omega) = 1 - \underbrace{\left\{\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right\}}_{\text{integratore}} + \pi\delta(\omega).$$

Pertanto: $y(t) = x(t) - \displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau + \frac{1}{2}X(0)$

In questo caso $X(0) = 1$, pertanto

$$y(t) = e^{-t}u(t) - \left(1 - e^{-t}\right)u(t) + \frac{1}{2} = \left(2e^{-t} - 1\right)u(t) + \frac{1}{2}$$

g) $H(\omega) = j\omega e^{j\frac{1}{2}\omega}$, $\qquad x(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$.

Per le proprietà di derivazione rispetto al tempo e di traslazione nel tempo, si vede che il sistema può essere visto come la cascata di un derivatore e di un traslatore di un tempo pari a $-\frac{1}{2}$.

Pertanto $y(t) = \dfrac{dx\left(t+\frac{1}{2}\right)}{dt} = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)}u\left(t+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)$

h) $H(\omega) = \dfrac{1}{j\omega}$, $\qquad x(t) = e^{-t}u(t)$.

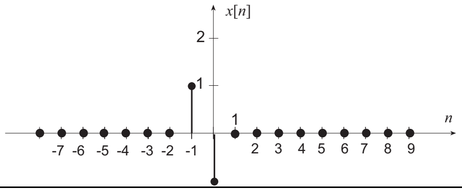
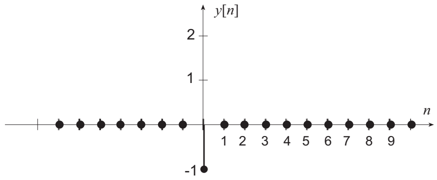
La risposta in frequenza può essere scritta così: $H(\omega) = \underbrace{\left\{\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right\}}_{\text{integratore}} - \pi\delta(\omega)$.

Pertanto: $y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau - \frac{1}{2}X(0) = \left(1-e^{-t}\right)u(t) - \frac{1}{2}$

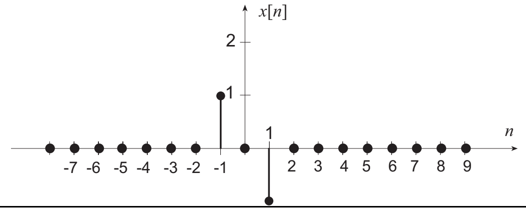
Esercizio N. 4

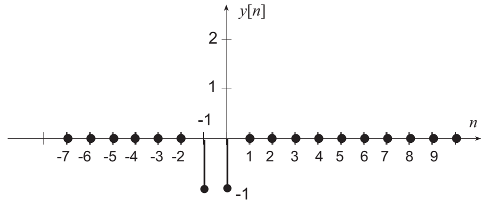
Di un sistema tempo discreto è data la risposta $h[n, n_0]$ all'impulso unitario centrato in n_0. Dire, giustificando la risposta, se il sistema è tempo invariante.

Disegnare con cura la risposta del sistema al segnale $x[n]$.

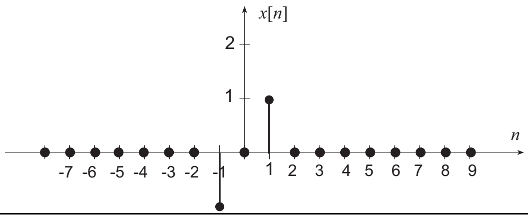
$h[n, n_0] = u[n + n_0]$	Tempo invariante? No. $\delta[n] \to u[n]$, $\quad \delta[n - n_0] \to u[n + n_0]$ invece di $u[n - n_0]$
	

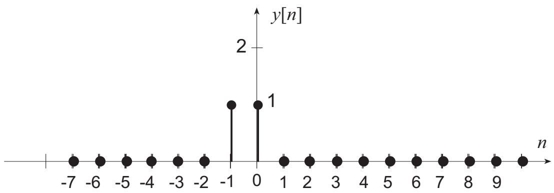
$h[n,n_0]=u[n+n_0]$	Tempo invariante? No. $\delta[n]\to u[n]$, $\delta[n-n_0]\to u[n+n_0]$ invece di $u[n-n_0]$

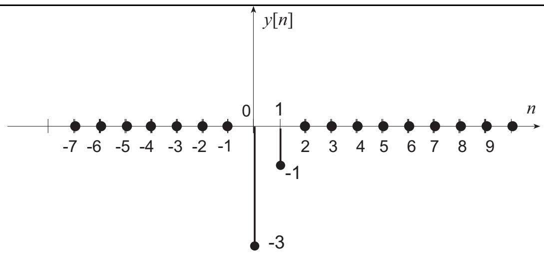


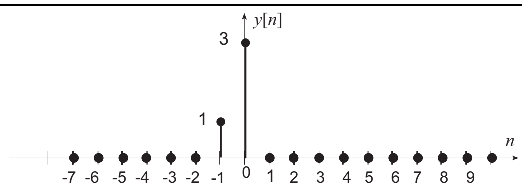


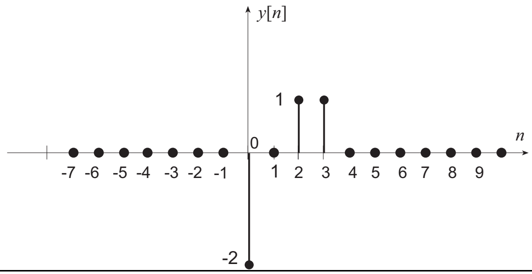
$h[n,n_0]=u[n+n_0]$	Tempo invariante? No. $\delta[n]\to u[n]$, $\delta[n-n_0]\to u[n+n_0]$ invece di $u[n-n_0]$

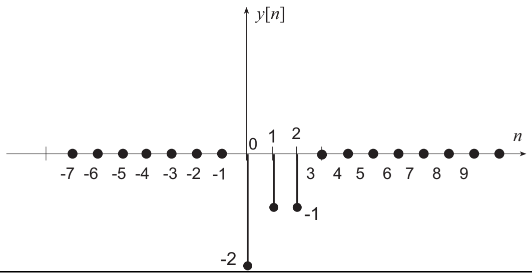


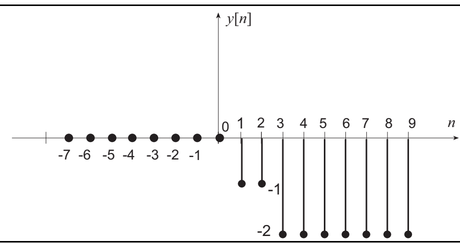


$h[n,n_0]=$ $\delta[n]+\delta[n+n_0]$	Tempo invariante? No. $\delta[n]\to 2\delta[n]$, $\delta[n-n_0]\to\delta[n]+\delta[n+n_0]$ invece di $2\delta[n-n_0]$
$x[n]=u[n-1]-u[n+1]$ (equivale a $-\delta[n+1]-\delta[n]$)	

$h[n,n_0]=$ $\delta[n]+\delta[n+n_0]$	Tempo invariante? No. $\delta[n]\to 2\delta[n]$, $\delta[n-n_0]\to\delta[n]+\delta[n+n_0]$ invece di $2\delta[n-n_0]$
$x[n]=u[n]-u[n-2]$ (equivale a $\delta[n]+\delta[n-1]$)	

$h[n,n_0]=\delta[n]-\delta[n+n_0]$	Tempo invariante? No. $\delta[n]\rightarrow 0$, $\delta[n-n_0]\rightarrow\delta[n]-\delta[n+n_0]$ invece di 0.
$x[n]=u[n+1]-u[n+3]$ (equivale a $-\delta[n+3]-\delta[n+2]$)	

$h[n,n_0]=$ $\delta[n]+\delta[n+n_0]$	Tempo invariante? No. $\delta[n]\rightarrow 2\delta[n]$, $\delta[n-n_0]\rightarrow\delta[n]+\delta[n+n_0]$ invece di $2\delta[n-n_0]$.
$x[n]=u[n]-u[n+2]$ (equivale a $-\delta[n+2]-\delta[n+1]$)	

$h[n,n_0]=u[n+n_0]$	Tempo invariante? No. $\delta[n]\rightarrow u[n]$, $\delta[n-n_0]\rightarrow u[n+n_0]$ invece di $u[n-n_0]$
$x[n]=u[n+1]-u[n+3]$ (equivale a $-\delta[n+3]-\delta[n+2]$) $y[n]=-u[n-3]-u[n-2]$	

Esercizio N. 5

Calcolare la trasformata di Fourier di ciascuno dei seguenti segnali tempo discreto:

$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n]$	$x[n]=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n] \Leftrightarrow X\left(e^{j\Omega}\right)=\dfrac{2}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$
$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-2]$	$x[n]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-2]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}u[n-2]$ Pertanto: $X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{2}\dfrac{e^{-j2\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$
$x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u[n+1]$	$x[n]=3\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}u[n+1]$ Pertanto: $X\left(e^{j\Omega}\right)=3\dfrac{e^{j\Omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$
$x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u[n+1]$	$x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u[n+1]=9\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}u[n+1]$ Pertanto: $X\left(e^{j\Omega}\right)=9\dfrac{e^{j\Omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$
$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}u[-n-1]$	$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}u[-n-1]=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n-1}u[-n-1]$ Poiché $\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}u[-n]\Leftrightarrow \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\Omega}}$, $X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{4}\dfrac{e^{j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\Omega}}$.
$x[n]=(3)^{n}\{u[n]-u[n-2]\}$	$x[n]$ è dato anche da $\delta[n]+3\delta[n-1]$, la cui trasformata è: $X\left(e^{j\Omega}\right)=1+3e^{-j\Omega}$
$x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}\{u[n]-u[n-3]\}$	$x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\delta[n-k]$ $X\left(e^{j\Omega}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\sum_{n=0}^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}e^{-j\Omega n}=\dfrac{27-e^{-j3\Omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$

Esercizio N. 6 a

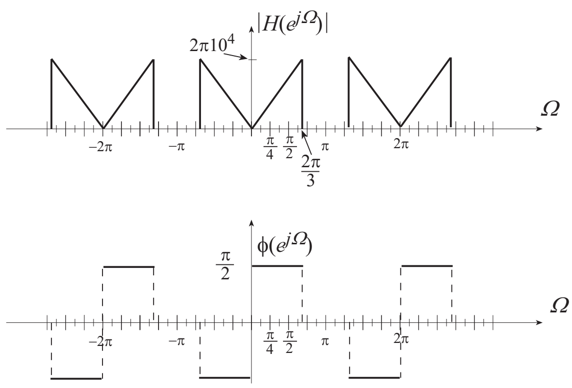
Disegnare la risposta in frequenza (att.ne: modulo e fase) di un sistema LTI tempo discreto che deve eseguire, in forma numerica, la derivata di un segnale tempo continuo con banda limitata a 10 KHz, campionato a 30 KHz.

Soluzione esercizio 6 a

Un differenziatore nel tempo continuo ha risposta in frequenza $H(\omega) = j\omega$.
Quindi il corrispondente sistema tempo-discreto ha risposta in frequenza:

$$H_d\left(e^{j\Omega}\right) = j\left(\frac{\Omega}{T_s}\right) = j\Omega \times 30 \times 10^3$$

Questa espressione deve valere tra $-\pi$ e π, ma in realtà è sufficiente che valga entro la banda del segnale tempo discreto, che è limitata a $2\pi/3$. Deve poi essere (ovviamente!) periodica di periodo 2π. Pertanto il suo andamento sarà il seguente:



Esercizio N. 6 b

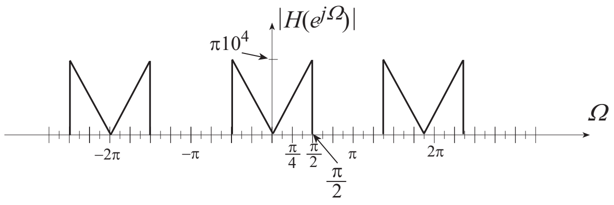
Disegnare la risposta in frequenza (att.ne: modulo e fase) di un sistema LTI tempo discreto che deve eseguire, in forma numerica, la derivata di un segnale tempo continuo con banda limitata a 5 KHz, campionato a 20 KHz.

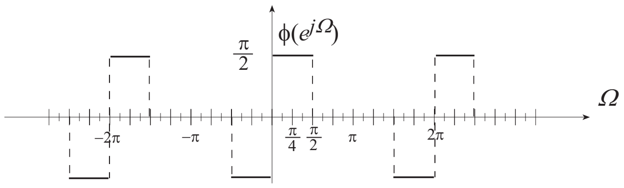
Soluzione esercizio 6 b

Un differenziatore nel tempo continuo ha risposta in frequenza $H(\omega) = j\omega$.
Quindi il corrispondente sistema tempo-discreto ha risposta in frequenza:

$$H_d\left(e^{j\Omega}\right) = j\left(\frac{\Omega}{T_s}\right) = j\Omega \times 20 \times 10^3$$

Questa espressione deve valere tra $-\pi$ e π, ma in realtà è sufficiente che valga entro la banda del segnale tempo discreto, che è limitata a $\pi/2$. Deve poi essere (ovviamente!) periodica di periodo 2π. Pertanto il suo andamento sarà il seguente:





Esercizio N. 6 c

Disegnare la risposta in frequenza (att.ne: modulo e fase) di un sistema LTI tempo discreto che deve ritardare, in forma numerica, di 10 μsec un segnale tempo continuo con banda limitata a 4 KHz, campionato a 10 KHz.

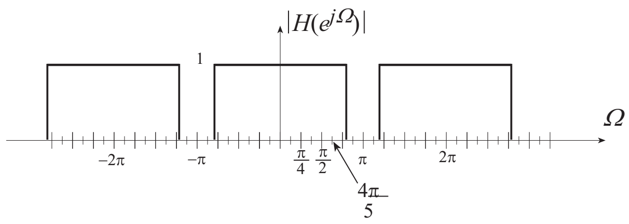
Soluzione esercizio 6 c

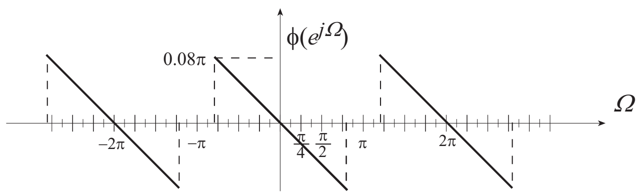
Un ritardatore nel tempo continuo ha risposta in frequenza $H(\omega)=e^{-j\omega t_0}$. In particolare, per $t_0 = 10\mu s$ sarà $H(\omega)=e^{-j\omega 10^{-5}}$.

Quindi il corrispondente sistema tempo-discreto ha risposta in frequenza:

$$H_d\left(e^{j\Omega}\right)=H\left(\frac{\Omega}{T_s}\right)=e^{-j\frac{\Omega}{T_s}10^{-5}}=e^{-j\Omega 10^4 10^{-5}}=e^{-j\Omega 10^{-1}}$$

Questa espressione deve valere tra $-\pi$ e π, ma in realtà è sufficiente che valga entro la banda del segnale tempo discreto, che è limitata a $4\pi/5$. Deve poi essere (ovviamente!) periodica di periodo 2π. Pertanto il suo andamento sarà il seguente:





Esercizio N. 6 d

Disegnare la risposta in frequenza (att.ne: modulo e fase) di un sistema LTI tempo discreto che deve eseguire, in forma numerica, la derivata di un segnale tempo continuo con banda limitata a 4 KHz, campionato a 10 KHz.

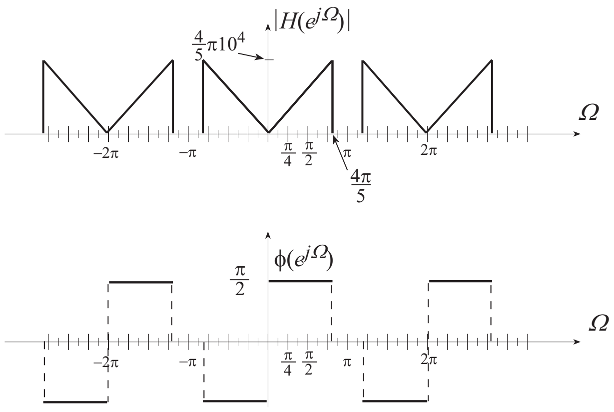
Soluzione esercizio 6 d

Un differenziatore nel tempo continuo ha risposta in frequenza $H(\omega) = j\omega$.

Quindi il corrispondente sistema tempo-discreto ha risposta in frequenza:

$$H_d\left(e^{j\Omega}\right) = j\left(\frac{\Omega}{T_s}\right) = j\Omega \times 10 \times 10^3 = j\Omega \times 10^4$$

Questa espressione deve valere tra $-\pi$ e π, ma in realtà è sufficiente che valga entro la banda del segnale tempo discreto, che è limitata a $4\pi/5$. Deve poi essere (ovviamente!) periodica di periodo 2π. Pertanto il suo andamento sarà il seguente:



Esercizio N. 6 e

Disegnare la risposta in frequenza (att.ne: modulo e fase) di un sistema LTI tempo discreto che deve ritardare, in forma numerica, di 20 µsec un segnale tempo continuo con banda limitata a 8 KHz, campionato a 20 KHz.

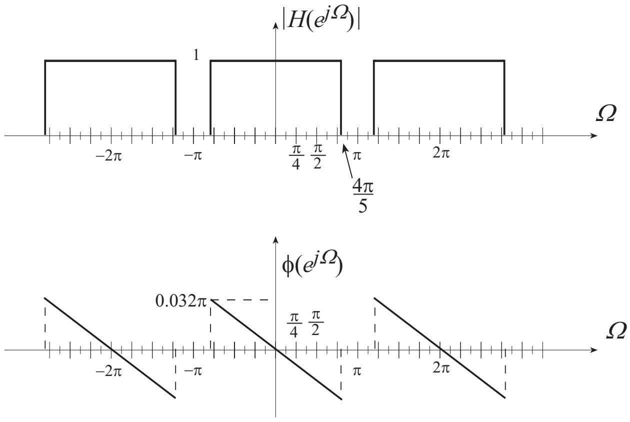
Soluzione esercizio 6 e

Un ritardatore nel tempo continuo ha risposta in frequenza $H(\omega) = e^{-j\omega t_0}$. In particolare, per $t_0 = 20\mu s$ sarà $H(\omega) = e^{-j\omega 2\times 10^{-5}}$.

Quindi il corrispondente sistema tempo-discreto ha risposta in frequenza:

$$H_d\left(e^{j\Omega}\right) = H\left(\frac{\Omega}{T_s}\right) = e^{-j\frac{\Omega}{T_s}2\,10^{-5}} = e^{-j4\Omega\,10^4\,10^{-5}} = e^{-j4\Omega\,10^{-1}}$$

Questa espressione deve valere tra $-\pi$ e π, ma in realtà è sufficiente che valga entro la banda del segnale tempo discreto, che è limitata a $4\pi/5$. Deve poi essere (ovviamente!) periodica di periodo 2π. Pertanto il suo andamento sarà il seguente:

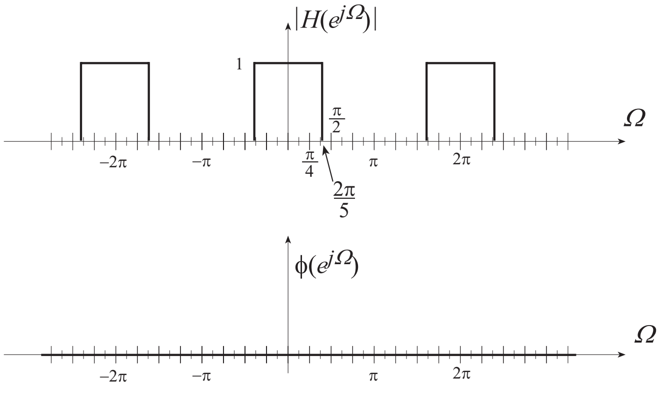


Esercizio N. 6 f

Disegnare la risposta in frequenza (att.ne: modulo e fase) di un sistema LTI tempo discreto che deve filtrare, in forma numerica, un segnale tempo continuo con banda limitata a 10 KHz, campionato a 30 KHz, eliminando tutte le componenti di frequenza superiore ai 6 KHz e lasciando inalterate le altre.

Soluzione esercizio 6 f

Nel tempo continuo il sistema è un filtro passa basso ideale con frequenza di taglio $f_c = 6$ KHz. Quindi il corrispondente sistema tempo-discreto ha risposta in frequenza di modulo costante nella banda $|\Omega| < 2\pi \frac{f_c}{f_s} = \frac{2}{5}\pi$ e nulla sulla rimanente parte dell'intervallo $-\pi < \Omega < \pi$. La fase invece è nulla su tutto l'asse Ω. Deve poi essere (ovviamente!) periodica di periodo 2π. Pertanto il suo andamento sarà il seguente:

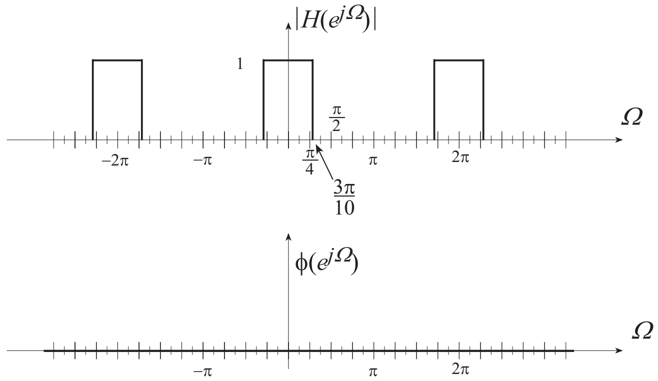


Esercizio N. 6 g

Disegnare la risposta in frequenza (att.ne: modulo e fase) di un sistema LTI tempo discreto che deve filtrare, in forma numerica, un segnale tempo continuo con banda limitata a 5 KHz, campionato a 20 KHz, eliminando tutte le componenti a frequenza superiore ai 3 KHz e lasciando invariate le altre .

Soluzione esercizio 6 g

Nel tempo continuo il sistema è un filtro passa basso ideale con frequenza di taglio $f_c = 3\,\text{KHz}$. Quindi il corrispondente sistema tempo-discreto ha risposta in frequenza di modulo costante nella banda $|\Omega| < 2\pi \dfrac{f_c}{f_s} = \dfrac{3}{10}\pi$ e nulla sulla rimanente parte dell'intervallo $-\pi < \Omega < \pi$. La fase invece è nulla su tutto l'asse Ω. Deve poi essere (ovviamente!) periodica di periodo 2π. Pertanto il suo andamento sarà il seguente:



Esercizio N. 6 h

Disegnare la risposta in frequenza (att.ne: modulo e fase) di un sistema LTI tempo discreto che deve eseguire, in forma numerica, la derivata di un segnale tempo continuo con banda limitata a 6 KHz, campionato a 16 KHz.

Soluzione esercizio 6 h

Un differenziatore nel tempo continuo ha risposta in frequenza $H(\omega) = j\omega$.
Quindi il corrispondente sistema tempo-discreto ha risposta in frequenza:

$$H_d\left(e^{j\Omega}\right) = j\left(\frac{\Omega}{T_s}\right) = j\Omega \times 16 \times 10^3$$

Questa espressione deve valere tra $-\pi\ e\ \pi$, ma in realtà è sufficiente che valga entro la banda del segnale tempo discreto, che è limitata a $|\Omega| < 2\pi \dfrac{f_M}{f_s} = \dfrac{3}{4}\pi$. Deve poi essere (ovviamente!) periodica di periodo 2π. Pertanto il suo andamento sarà il seguente: