Teoria dei Segnali

(Appello dell'8 gennaio 2007)

Prova scritta

Esercizio N. 1

La risposta di un sistema lineare al segnale $x_1(t)$ indicato in figura 1a è quella indicata in figura 1b. Calcolare e disegnare la risposta del sistema al segnale $x_2(t)$ rappresentato in figura 1c.

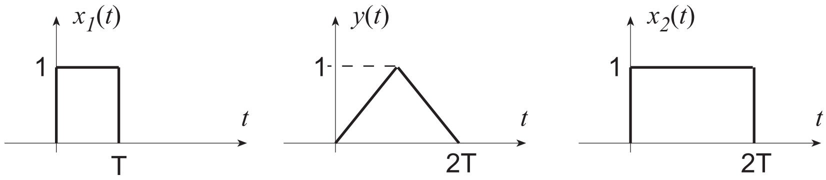
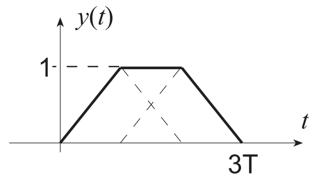


Fig. 1a Fig. 1b Fig. 1c

Soluzione

Poiché $x_2(t) = x_1(t) + x_1(t-T)$, la risposta cercata sarà pari a $y(t) + y(t-T)$. Il suo andamento è quello riportato nella seguente figura:



Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto ha, come risposta in frequenza, la funzione:

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = 1 - e^{-j4\Omega}$$

Ricavare la trasformata di Fourier della risposta del sistema al segnale

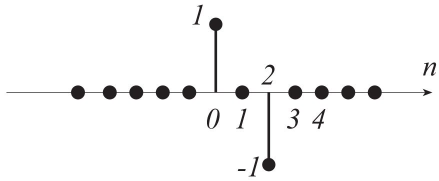
$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)u[n]$$

(si consiglia di disegnare alcuni valori del segnale all'uscita del sistema).

Soluzione

La risposta del sistema è pari a $x[n] - x[n-4] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\{u[n] - u[n-4]\}$.

Questo segnale ha il seguente andamento:



Ad esso corrisponde la seguente trasformata di Fourier:

$$Y\left(e^{j\Omega}\right) = 1 - e^{-j2\Omega}$$

Esercizio N. 3 *(6 CFU)*

Si consideri la funzione:

$$H(z) = \frac{z}{z^2 + \frac{1}{4}}$$

Quanti sono i sistemi LTI tempo discreto che possono avere questa $H(z)$ quale funzione di trasferimento?

Di essi uno è stabile: Si valuti la sua risposta impulsiva.

Soluzione

La funzione $H(z)$ ha due poli complessi coniugati per $z_{1,2} = \pm j\frac{1}{2}$. Essi determinano due regioni di convergenza: $R_1 : \left(|z| > \frac{1}{2}\right)$ e $R_2 : \left(|z| < \frac{1}{2}\right)$. La regione R_1 contiene la circonferenza di raggio unitario e pertanto è propria di una sistema stabile. La sua risposta impulsiva può essere calcolata con lo sviluppo in frazioni parziali:

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{\left(1 + j\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - j\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{1}{2}z^{-1}\left\{\frac{1}{1 + j\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - j\frac{1}{2}z^{-1}}\right\}$$

Ad essa corrisponde la funzione:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right)u(n-1)$$

Esercizio N. 3 *(3 CFU)*

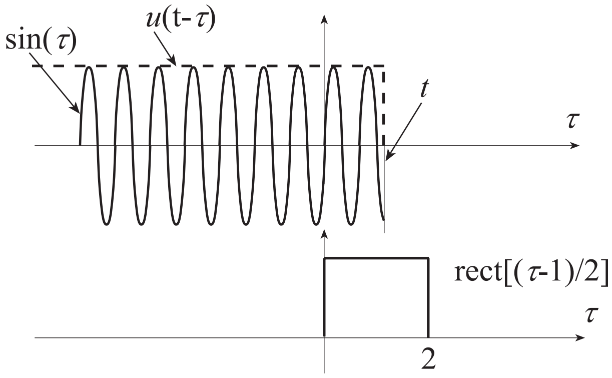
Il segnale $x(t) = \text{rect}\left[\frac{t-1}{2}\right]$ è applicato all'ingresso di un sistema lineare che risponde all'impulso $\delta(t-\tau)$ con la funzione $h(t,\tau) = \sin(\tau)u(t-\tau)$. Calcolare la relativa risposta $y(t)$

Soluzione

Si tratta di un sistema lineare, ma non tempo invariante. La risposta va calcolata tramite il seguente integrale:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t,\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{\tau-1}{2}\right) \sin(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

La funzione da integrare ha il seguente andamento:



Da questo grafico si vede che:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \int_0^t \sin(\tau) d\tau = 1 - \cos(\tau) & \text{per } 0 < t < 2 \\ \int_0^2 \sin(\tau) d\tau = 1 - \cos(2) & \text{per } t > 2 \end{cases}$$

<u>Esercizio N. 4</u>

Sia $x(t)$ un segnale a banda limitata, con $f_M = 1\,\mathrm{KHz}$. Questo segnale è posto all'ingresso di un sistema LTI avente risposta impulsiva proprio uguale a $x(t)$. Si indichi con $y(t)$ il segnale all'uscita di tale sistema (pertanto $y(t) = x(t) \otimes x(t)$).

Il segnale $y(t)$ è a banda limitata? Giustificare la risposta.

Si consideri ora il segnale passa banda $s(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$, essendo $f_0 = 10\,\mathrm{MHz}$. Tale segnale viene posto all'ingresso di un sistema LTI avente risposta impulsiva data da:

$$h(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t) - \hat{x}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

Si ricavi (in termini di $y(t)$) la risposta di tale sistema a $s(t)$.

Soluzione

Il segnale $y(t)=x(t)\otimes x(t)$ ha spettro $Y(f)=X^2(f)$: è quindi un segnale a banda limitata, anch'esso con $f_M=1\ \text{KHz}$. Le due funzioni $s(t)$ e $h(t)$ sono già poste in forma canonica e si vede immediatamente che gli inviluppi complessi sono:

$$\tilde{s}(t)=x(t)$$

$$\tilde{h}(t)=\frac{1}{2}\left[x(t)+j\hat{x}(t)\right]$$

L'inviluppo complesso del segnale di uscita è dato da:

$$\tilde{w}(t)=\tilde{s}(t)\otimes\tilde{h}(t)=\frac{1}{2}\left[\underbrace{x(t)\otimes x(t)}_{y(t)}+j\underbrace{x(t)\otimes\hat{x}(t)}_{\hat{y}(t)}\right]$$

Di conseguenza $w(t)=\mathrm{Re}\left\{\tilde{w}(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\}=\frac{1}{2}\left\{y(t)\cos(2\pi f_0 t)-\hat{y}(t)\sin(2\pi f_0 t)\right\}$

Esercizio N. 5

Un processo aleatorio stazionario ha valor medio $m_x=-3$ volt. Esso è posto all'ingresso di un filtro LTI che ha la seguente risposta impulsiva:

$$h(t)=\begin{cases}1-10^6t^2 & \text{per } 0<t<10^{-3}\ \text{sec}\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Quanto vale il valor medio del processo all'uscita del filtro?

Soluzione

Il valor medio del processo all'uscita del filtro è dato dalla relazione:

$$m_y=m_x\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)dt=-3\int_0^{10^{-3}}\left(1-10^6t^2\right)dt=-3\left[t-10^6\frac{1}{3}t^3\right]_0^{10^{-3}}=-2\cdot10^{-3}\ \text{volt}$$

Esercizio N. 6

Un processo aleatorio stazionario $x(t)$ con densità spettrale di potenza

$$S_x(f)=\begin{cases}10^{-4} & |f|<100\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

è posto all'ingresso di un sistema LTI avente la seguente risposta in frequenza:

$$H(f)=\frac{1}{100\pi+j\pi f}$$

Sia $y(t)$ il processo di uscita

a) Quanto vale $E\left[x^2(t)\right]$?

b) Come è fatta $S_{xy}(f)$?

c) Come è fatta $S_{yx}(f)$?

d) Quanto vale $E\left[y^2(t)\right]$?

Soluzione

a) $E\left[x^2(t)\right] = \int_{-100}^{100} S_x(f)df = 2\times10^{-2}$ W

b) $S_{xy}(f) = S_x(f)H(f) = \begin{cases} \dfrac{10^{-4}}{100\pi + j\pi f} & \text{per } |f| < 100 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

c) $S_{yx}(f) = S_x(f)H^*(f) = \begin{cases} \dfrac{10^{-4}}{100\pi - j\pi f} & \text{per } |f| < 100 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

d) $E\left[y^2(t)\right] = \int_{-100}^{100} S_x(f)|H(f)|^2 df$

$$= \int_{-100}^{100} \frac{10^{-4}}{100^2\pi^2 + \pi^2 f^2} df = \frac{10^{-8}}{\pi^2} \int_{-100}^{100} \frac{1}{1+\left(\dfrac{f}{100}\right)^2} df$$

Ponendo $x = \dfrac{f}{100}$, si ha

$$E\left[y^2(t)\right] = \frac{10^{-6}}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{10^{-6}}{\pi^2} \arctan(x)\Big|_{-1}^{1} = \frac{10^{-6}}{2\pi} \text{ W}$$