Teoria dei Segnali

(Appello del I° giugno 2007)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema lineare tempo continuo risponde all'impulso ideale centrato in $t=\tau$ con il segnale

$$h(t,\tau)=e^{-\frac{t-|\tau|}{2}}u(t-\tau)$$

Il sistema è tempo invariante? (giustificare la risposta)

Calcolare la sua risposta quando all'ingresso c'è il segnale $x(t)=e^{-\frac{t}{2}}u(t)$

Soluzione

IL sistema non è tempo invariante. Poiché la risposta all'impulso centrato in $t=0$ è data da $h(t,0)=e^{-\frac{t}{2}}u(t)$, per essere tempo invariante quella a $\delta(t-\tau)$ dovrebbe essere $h(t,\tau)=e^{-\frac{t-\tau}{2}}u(t-\tau)$.

La risposta a $x(t)$ è calcolabile con l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\tau}{2}}u(\tau)e^{-\frac{t-|\tau|}{2}}u(t-\tau)d\tau=\begin{cases}0 & per\, t<0\\ e^{-\frac{t}{2}}\int_0^t e^{-\frac{\tau}{2}}e^{\frac{\tau}{2}}d\tau=te^{-\frac{t}{2}} & per\, t>0\end{cases}$$

Esercizio N. 2

All'ingresso di un sistema LTI tempo discreto c'è il seguente segnale:

$$x[n]=\left\{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}\right\}u[n]$$

Dire quale deve essere la sua risposta impulsiva affinché il segnale di uscita sia

$$y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Soluzione

Osservando l'espressione che definisce $x[n]$ si deduce che

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \otimes \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

Ricorrendo alle trasformate di Fourier, si ha:

$$X\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}\right)} \qquad Y\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

Pertanto: $H\left(e^{j\Omega}\right) = \dfrac{Y\left(e^{j\Omega}\right)}{X\left(e^{j\Omega}\right)} = 1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}$, e quindi

$$h[n] = \delta[n] - \frac{1}{3}\delta[n-1]$$

<u>Esercizio N. 3</u>

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente risposta in frequenza:

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{e^{j\Omega} + 1}{e^{j\Omega} - 1}$$

Per 3 CFU: Calcolare la parte pari della sua risposta impulsiva.
Per 6 CFU: Calcolare la sua risposta impulsiva.

Soluzione

La funzione $H\left(e^{j\Omega}\right)$ è puramente immaginaria: infatti

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{e^{j\Omega} + 1}{e^{j\Omega} - 1} = \frac{\left(e^{j\Omega} + 1\right)\left(e^{-j\Omega} - 1\right)}{\left(e^{j\Omega} - 1\right)\left(e^{-j\Omega} - 1\right)} = \frac{-j\sin(\Omega)}{1 - \cos(\Omega)}$$

Pertanto la parte pari della sua risposta in frequenza è identicamente nulla.
La risposta in frequenza è immediatamente valutabile dopo aver posto la funzione $H\left(e^{j\Omega}\right)$ nella forma:

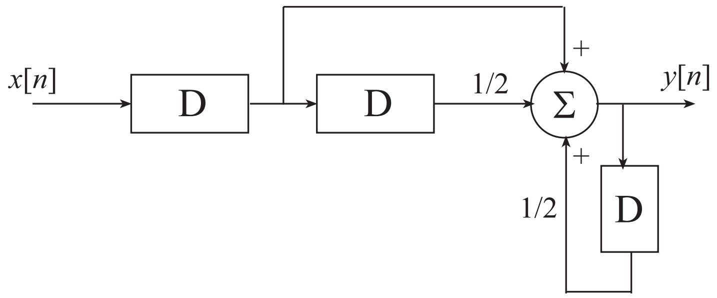
$$H\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{1 + e^{-j\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}}$$

cui corrisponde la funzione (dispari)

$$h[n] = u[n] + u[n-1] - 1$$

<u>Esercizio N. 4</u>

Determinare la risposta impulsiva del sistema tempo discreto rappresentato in figura, in cui D rappresenta un elemento di ritardo unitario.



Soluzione

Il sistema è retto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n-1]+\frac{1}{2}x[n-2]$$

Per mezzo della trasformata Z si ricava che la funzione di trasferimento del sistema è:

$$H(z)=\frac{z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

cui corrisponde la seguente risposta impulsiva:

$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}u[n-2]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\{u[n-1]+u[n-2]\}$$

Esercizio N. 5

Si consideri il processo aleatori

$$x(t)=e^{\alpha t}u(-t)+e^{-\beta t}u(t)$$

in cui α e β sono due variabili aleatorie continue, indipendenti, distribuite tra 0 e $+\infty$ con densità di probabilità congiunta $p(\alpha,\beta)=Ce^{-\alpha-\beta}u(\alpha)u(\beta)$.

Si calcoli il valore della costante C e la funzione di auto correlazione del processo in corrispondenza alle seguenti coppie di istanti:

$(t_1=-1,\quad t_2=0)$, $(t_1=0,\quad t_2=1)$, $(t_1=-1,\quad t_2=1)$.

Soluzione

Calcolo della costante C:

per una nota proprietà della densità di probabilità dovrà essere

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}p(\alpha,\beta)d\alpha d\beta=1 \quad\Rightarrow\quad C=1$$

Calcolo della funzione di auto correlazione:

$(t_1=-1,\quad t_2=0)$

$$R_x(t_1,t_2)=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha}e^{-\alpha}d\alpha=\frac{1}{2}$$

$(t_1=0,\quad t_2=1)$

$$R_x(t_1,t_2)=\int_0^{+\infty} e^{-\beta}e^{-\beta}d\beta=\frac{1}{2}$$

$(t_1=-1,\quad t_2=1)$

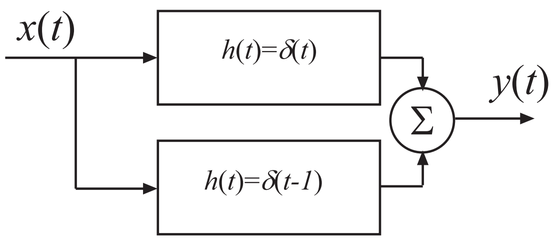
$$R_x(t_1,t_2)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(e^{-\alpha}e^{-\beta}\right)\left(e^{-\alpha}e^{-\beta}\right)d\alpha d\beta=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-2\alpha}e^{-2\beta}d\alpha d\beta=\frac{1}{4}$$

Esercizio N. 6

Un processo aleatorio stazionario ha la seguente funzione di auto correlazione:

$$R_x(\tau)=\begin{cases}1-|\tau| & \text{per } |\tau|<1\\ 0 & \text{per } |\tau|>1\end{cases}$$

Esso è posto all'ingresso del sistema lineare tempo invariante rappresentato in figura:



Determinare la potenza media del processo all'uscita del sistema

Soluzione:

Si calcoli la funzione di auto correlazione del processo di uscita.

$$R_y(\tau)=R_x(\tau)h(\tau)h(-\tau)=\begin{cases}2\left(1-\dfrac{|\tau|}{2}\right) & \text{per } |\tau|<2\\ 0 & \text{per } |\tau|>2\end{cases}$$

Ricordando che la potenza media di un processo stazionario è pari a $R_y(0)$, si ricava che la potenza media del processo di uscita è di 2 W.