PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI

9 novembre 2007

Esercizio N. 1

Un sistema lineare risponde all'impulso ideale $\delta(t-\tau)$ con il segnale $h(t,\tau)$. Dire, giustificando la risposta, se il sistema è tempo invariante e calcolare la sua risposta al segnale $x(t)=\mathrm{rect}\left(t-\frac{1}{2}\right)$.

Soluzione esercizio 1

a) $h(t,\tau)=\sin\left(\frac{\pi}{2}(t-\tau)\right)u(t-\tau)$

Il sistema è tempo invariante, poiché $h(t,\tau)=h(t-\tau)\quad \forall(t,\tau)$.

$$y(t)=\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}(t-\tau)\right)u(t-\tau)d\tau=\begin{cases}0 & t<0\\ \int_0^t \sin\left(\frac{\pi}{2}(t-\tau)\right)d\tau=\frac{2}{\pi}\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right] & 0<t<1\\ \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}(t-\tau)\right)d\tau=\frac{2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right] & t>1\end{cases}$$

---

b) $h(t,\tau)=\sin\left(\frac{\pi}{2}(t-\tau)\right)u(t)$

Il sistema non è tempo invariante, poiché $h(t,\tau)\neq h(t-\tau)$.

$$y(t)=\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}(t-\tau)\right)u(t)d\tau=u(t)\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}(t-\tau)\right)d\tau=\frac{2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]u(t)$$

---

c) $h(t,\tau)=\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)u(t-\tau)$

Il sistema non è tempo invariante, poiché $h(t,\tau)\neq h(t-\tau)$.

$$y(t)=\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\int_0^1 u(t-\tau)d\tau=\begin{cases}0 & t<0\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\int_0^t d\tau=t\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) & 0<t<1\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\int_0^1 d\tau=\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) & t>1\end{cases}$$

---

d) $h(t,\tau)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)u(t-\tau)$

Il sistema non è tempo invariante, poiché $h(t,\tau)\neq h(t-\tau)$.

$$y(t)=\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)u(t-\tau)d\tau=\begin{cases}0 & t<0\\ \int_0^t \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)d\tau=\frac{2}{\pi}\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right] & 0<t<1\\ \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)d\tau=\frac{2}{\pi} & t>1\end{cases}$$

---

e) $h(t,\tau)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)}u(t-\tau)$

Il sistema è tempo invariante, poiché $h(t,\tau)=h(t-\tau)\quad\forall(t,\tau)$.

$$y(t)=\int_0^1 \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau=\begin{cases}0 & t<0\\ \int_0^t \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)}d\tau=1-e^{-\frac{1}{2}t} & 0<t<1\\ \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)}d\tau=e^{-\frac{1}{2}t}\left(e^{\frac{1}{2}}-1\right) & t>1\end{cases}$$

f) $h(t,\tau)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)}u(t)$

Il sistema non è tempo invariante, poiché $h(t,\tau)\neq h(t-\tau)$.

$$y(t)=\int_0^1 \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)}u(t)d\tau=u(t)\int_0^1 \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)}d\tau=\left(e^{\frac{1}{2}}-1\right)e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$$

---

g) $h(t,\tau)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}u(t-\tau)$

Il sistema non è tempo invariante, poiché $h(t,\tau)\neq h(t-\tau)$.

$$y(t)=\int_0^1 \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}u(t-\tau)d\tau=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\int_0^1 u(t-\tau)d\tau=0 & t<0\\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\int_0^t u(t-\tau)d\tau=t\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} & 0<t<1\\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\int_0^1 d\tau=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} & t>1\end{cases}$$

---

h) $h(t,\tau)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\tau}u(t-\tau)$

Il sistema non è tempo invariante, poiché $h(t,\tau)\neq h(t-\tau)$.

$$y(t)=\int_0^1 \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\tau}u(t-\tau)d\tau=\begin{cases}0 & t<0\\ \int_0^t \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\tau}d\tau=1-e^{-\frac{1}{2}t} & 0<t<1\\ \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\tau}d\tau=1-e^{-\frac{1}{2}} & t>1\end{cases}$$

Esercizio N. 2

Un sistema lineare tempo discreto risponde all'impulso $\delta[n-k]$ con il segnale $h[n,k]$. Dire, giustificando la risposta, se il sistema è tempo invariante e calcolare la sua risposta al segnale $x[n]=\begin{cases}1 & \text{per} \quad n=0,1,2\ e\ 3\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$

Soluzione esercizio 2

a) $h[n,k]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-k]$

Il sistema non è tempo invariante, poiché $h[n,k]\neq h[n-k]$.

$$y[n]=\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-k]=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{3} u[n-k]=0 & n<0\\ \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n} u[n-k]=(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n & 0\leq n\leq 3\\ \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{3} u[n-k]=4\left(\frac{1}{2}\right)^n & n>3\end{cases}$$

---

b) $h[n,k]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[k]$

Il sistema non è tempo invariante, poiché $h[n,k]\neq h[n-k]$.

$$y[n]=\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[k]=\left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{3} u[k]=4\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

---

c) $h[n,k]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} u[n-k]$

Il sistema è tempo invariante, poiché $h[n,k]=h[n-k] \quad \forall(n,k)$.

$$y[n]=\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}u[n-k]=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}u[n-k]=0 & n<0\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n} & 0\le n\le 3\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}=15\left(\frac{1}{2}\right)^{n} & n>3\end{cases}$$

---

d) $h[n,k]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}u[n]$

Il sistema non è tempo invariante, poiché $h[n,k]\neq h[n-k]$.

$$y[n]=\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}u[n]\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}=15\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$$

---

e) $h[n,k]=\left(\frac{1}{2}\right)^{k}u[n-k]$

Il sistema non è tempo invariante, poiché $h[n,k]\neq h[n-k]$.

$$y[n]=\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}u[n-k]=\begin{cases}\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}u[n-k]=0 & n<0\\ \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n} & 0\le n\le 3\\ \sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=\frac{15}{8} & n>3\end{cases}$$

---

f) $h[n,k]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}u[k-n]$

Il sistema è tempo invariante, poiché $h[n,k]=h[n-k]\quad\forall(n,k)$.

$$y[n]=\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}u[k-n]=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}=15\left(\frac{1}{2}\right)^{n} & n\le 0\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sum_{k=n}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}=16\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-1 & 0<n\le 3\\ 0 \quad n>3 & \end{cases}$$

---

g) $h[n,k]=\left(\frac{1}{2}\right)^{k}u[n]$

Il sistema non è tempo invariante, poiché $h[n,k]\neq h[n-k]$.

$$y[n]=\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}u[n]=\frac{15}{8}u[n]$$

---

h) $h[n,k]=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-n}u[n-k]$

Il sistema è tempo invariante, poiché $h[n,k]=h[n-k] \quad \forall(n,k)$.

$$y[n]=\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-n}u[n-k]=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}u[n-k]=0 & n<0\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-n-1}-1 & 0\le n\le 3\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=\frac{15}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} & n>3\end{cases}$$

Esercizio N. 3

La trasformata di Fourier del segnale $x(t)$ è data da $X(\omega)=\dfrac{1}{\frac{1}{2}+j\omega}$.

Qual è la trasformata del segnale $y(t)$?

Soluzione esercizio 3

a) $y(t) = x\left(2 - \frac{t}{3}\right)$?

$t \to -t \qquad F[x(-t)] = F^*[x(t)] = \dfrac{1}{\frac{1}{2} - j\omega}$

$t \to (t-2) \qquad F[x(2-t)] = F^*[x(t)]e^{-j2\omega} = \dfrac{e^{-j2\omega}}{\frac{1}{2} - j\omega}$

$t \to \frac{t}{3} \qquad F\left[x\left(2 - \frac{t}{3}\right)\right] = 3\dfrac{e^{-j6\omega}}{\frac{1}{2} - j3\omega}$

---

b) $y(t) = x\left(1 - \frac{t}{2}\right)$

$t \to -t \qquad F[x(-t)] = F^*[x(t)] = \dfrac{1}{\frac{1}{2} - j\omega}$

$t \to (t-1) \qquad F[x(1-t)] = F^*[x(t)]e^{-j\omega} = \dfrac{e^{-j\omega}}{\frac{1}{2} - j\omega}$

$t \to \frac{t}{2} \qquad F\left[x\left(1 - \frac{t}{2}\right)\right] = 2\dfrac{e^{-j2\omega}}{\frac{1}{2} - j2\omega}$

---

c) $y(t) = x(3t-1)$

$t \to (t-1) \qquad F[x(t-1)] = F[x(t)]e^{-j\omega} = \dfrac{e^{-j\omega}}{\frac{1}{2} + j\omega}$

$t \to 3t \qquad F[x(3t-1)] = \dfrac{1}{3}\dfrac{e^{-j\frac{\omega}{3}}}{\frac{1}{2} + j\frac{\omega}{3}}$

---

d) $y(t) = x(1-2t)$

$$t \to -t \qquad F[x(-t)] = F^*[x(t)] = \frac{1}{\frac{1}{2} - j\omega}$$

$$t \to (t-1) \qquad F[x(1-t)] = F^*[x(t)]e^{-j\omega} = \frac{e^{-j\omega}}{\frac{1}{2} - j\omega}$$

$$t \to 2t \qquad F[x(1-2t)] = \frac{1}{2}\frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}}{\frac{1}{2} - j\frac{\omega}{2}}$$

---

e) $y(t) = x\left(\frac{1}{3} + \frac{t}{4}\right)$

$$t \to \left(t + \frac{1}{3}\right) \qquad F\left[x\left(t + \frac{1}{3}\right)\right] = F[x(t)]e^{j\frac{1}{3}\omega} = \frac{e^{j\frac{1}{3}\omega}}{\frac{1}{2} + j\omega}$$

$$t \to \frac{t}{4} \qquad F\left[x\left(\frac{1}{3} + \frac{t}{4}\right)\right] = 4\frac{e^{j\frac{4}{3}\omega}}{\frac{1}{2} + j4\omega}$$

---

f) $y(t) = x(2-t)\cos(3t)$

$$t \to -t \qquad F[x(-t)] = F^*[x(t)] = \frac{1}{\frac{1}{2} - j\omega}$$

$$t \to (t-2) \qquad F[x(2-t)] = F^*[x(t)]e^{-j2\omega} = \frac{e^{-j2\omega}}{\frac{1}{2} - j\omega}$$

$$\times\cos(3t) \qquad F[x(2-t)\cos(3t)] = \frac{1}{2}\frac{e^{-j2(\omega-3)}}{\frac{1}{2} - j(\omega-3)} + \frac{1}{2}\frac{e^{-j2(\omega+3)}}{\frac{1}{2} - j(\omega+3)}$$

---

g) $y(t) = x(2t)\sin(2t)$

$$t \to (2t) \qquad F[x(2t)] = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2} + j\frac{\omega}{2}} = \frac{1}{1 + j\omega}$$

$$\times\sin(2t) \qquad F[x(2t)\sin(2t)] = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{j - (\omega-2)} - \frac{1}{j - (\omega+2)}\right\}$$

---

h) $y(t) = x(-t)\cos(t)$

$$t \to -t \qquad F[x(-t)] = F^*[x(t)] = \frac{1}{\frac{1}{2} - j\omega}$$

$$\times\cos(t) \qquad F[x(-t)\cos(t)] = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2} - j(\omega-1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2} - j(\omega+1)}$$

Esercizio N. 4

Si consideri la coppia di segnali $\{x[n], y[n]\}$
Esiste un sistema LTI che risponde con $y[n]$ quando al suo ingresso viene posto $x[n]$? (giustificare la risposta).
Se tale sistema esiste, calcolare la sua risposta in frequenza e dire se tale sistema è unico (giustificare la risposta)

Soluzione esercizio 4

a) $x[n] = (j)^n \qquad y[n] = (-j)^n$

Il segnale $x[n] = (j)^n = e^{j\frac{\pi}{2}n}$ è un'autofunzione per i sistemi LTI. Quindi la risposta può essere soltanto del tipo $x[n] = Q(j)^n$. Conclusione: non esiste un sistema LTI che a $x[n]$ risponda con $y[n]$.

---

b) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \qquad y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

I due segnali possiedono entrambi trasformata di Fourier, definita per ogni valore di Ω. La risposta in frequenza del sistema LTI che a $x[n]$ risponde con $y[n]$ è univocamente definita per ogni valore di Ω tramite:

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{Y\left(e^{j\Omega}\right)}{X\left(e^{j\Omega}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

Pertanto esiste uno e uno solo sistema LTI che a $x[n]$ risponde con $y[n]$.

---

c) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \qquad y[n] = (4)^n u[-n]$

I due segnali possiedono entrambi trasformata di Fourier, definita per ogni valore di Ω. La risposta in frequenza del sistema LTI che a $x[n]$ risponde con $y[n]$ è univocamente definita per ogni valore di Ω tramite:

$$H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\Omega}\right)}{X\left(e^{j\Omega}\right)}=\frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{4}e^{j\Omega}}$$

Pertanto esiste uno e uno solo sistema LTI che a $x[n]$ risponde con $y[n]$.

---

d) $x[n]=e^{j\frac{n}{8}}$ $\qquad$ $y[n]=2e^{j\frac{n}{8}}$

Il segnale $x[n]=e^{j\frac{n}{8}}$ è un autofunzione per i sistemi LTI. Quindi la risposta può essere soltanto del tipo $y[n]=Qe^{j\frac{n}{8}}$. In effetti $y[n]$ ha proprio tale forma (Q=2). Conclusione: esistono infiniti sistemi LTI che a $x[n]$ rispondono con $y[n]$. La loro risposta in frequenza è caratterizzata dal fatto che $H\left(e^{j\frac{1}{8}}\right)=2$.

---

e) $x[n]=j^n$ $\qquad$ $y[n]=2j^n(1-j)$

Il segnale $x[n]=j^n=e^{j\frac{\pi}{2}n}$ è un autofunzione per i sistemi LTI. Quindi la risposta può essere soltanto del tipo $y[n]=Qe^{j\frac{\pi}{2}n}$. In effetti $y[n]$ ha proprio tale forma $(Q=2-2j)$. Conclusione: esistono infiniti sistemi LTI che a $x[n]$ rispondono con $y[n]$. La loro risposta in frequenza è caratterizzata dal fatto che $H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)=2(1-j)$.

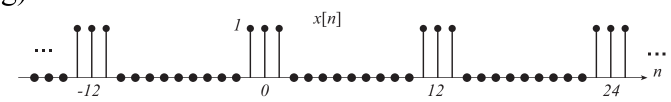
---

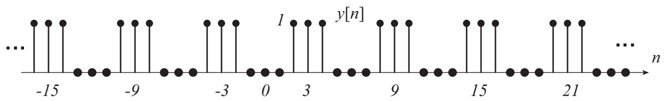
f) $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$ $\qquad$ $y[n]=\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$

Il segnale $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$ è somma di due autofunzioni per i sistemi LTI, e precisamente $\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}n}$ e $\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}n}$. Quindi la risposta può essere soltanto del tipo $y[n]=Q\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}n}+Q^*\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}n}$. In effetti $y[n]$ ha proprio tale forma $\left(Q=1-j\sqrt{3}\right)$.

Conclusione: esistono infiniti sistemi LTI che a $x[n]$ rispondono con $y[n]$. La loro risposta in frequenza è caratterizzata dal fatto che $H\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\right)=1-j\sqrt{3}$.

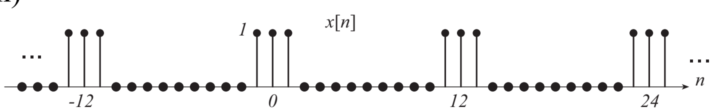
g)

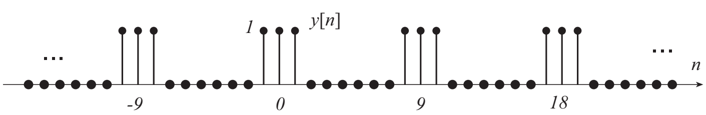




Il segnale $x[n]$ è periodico di periodo $N_x = 12$. Esso è quindi una combinazione lineare di 12 autofunzioni: $x[n]=\sum_{k=0}^{11} c_k e^{jk\frac{2\pi}{12}n}$. Il segnale $y[n]$ è periodico di periodo $N_y = 6$, e quindi è combinazione lineare di 6 autofunzioni: $y[n]=\sum_{k=0}^{5} d_k e^{jk\frac{2\pi}{6}n}$. Le sue autofunzioni sono comprese tra quelle che caratterizzano $x[n]$. Pertanto qualsiasi sistema la cui risposta in frequenza vale 0 nei punti $\Omega = k\frac{\pi}{6}$ con *k* dispari e vale $\frac{c_k}{d_{\frac{k}{2}}}$ nei punti $\Omega = k\frac{\pi}{6}$ con *k* pari trasforma $x[n]$ in $y[n]$.

h)

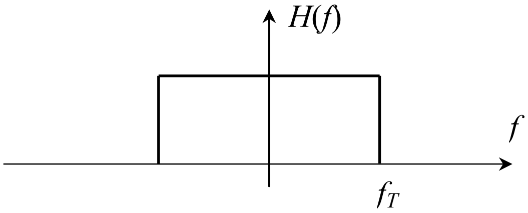




I segnali $x[n]$ ed $y[n]$ sono entrambi periodici, ma di periodi diversi ($N1 = 12,\quad N2 = 9$) che non sono uno multiplo dell'altro. Pertanto non può esistere un sistema LTI che dia in uscita $y[n]$ quando all'ingresso c'è $x[n]$.

Esercizio N. 5

Un segnale tempo continuo ha uno spettro con banda limitata alla frequenza f_M. Si desidera filtrare questo segnale con un filtro avente la risposta in frequenza riportata in figura. A tale scopo, esso viene convertito in un segnale tempo discreto attraverso un campionamento alla frequenza f_s. Si calcoli la risposta impulsiva del filtro tempo discreto da usare per eseguire per via numerica il filtraggio desiderato.



Soluzione esercizio 5

Nell'intervallo $-\pi < \Omega < \pi$ la risposta in frequenza del filtro tempo discreto sarà quella indicata in figura I.

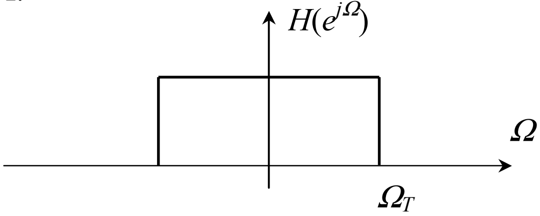


Fig. I

La pulsazione Ω_T è data da $\Omega_T = 2\pi \frac{f_T}{f_c}$.

La corrispondente risposta impulsiva risulta:

a) $f_M = 10 \quad KHz, \quad f_T = 8 \quad KHz, \qquad f_s = 30 \quad KHz \quad \rightarrow \quad \Omega_T = 2\pi \frac{4}{15}$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_T}^{\Omega_T} e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{\sin\left(2\pi \frac{4}{15} n\right)}{\pi n}$$

---

b) $f_M = 10 \quad KHz, \quad f_T = 5 \quad KHz, \qquad f_s = 25 \quad KHz \quad \rightarrow \quad \Omega_T = \frac{2\pi}{5}$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_T}^{\Omega_T} e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{5} n\right)}{\pi n}$$

---

c) $f_M = 10 \quad KHz, \quad f_T = 5 \quad KHz, \qquad f_s = 50 \quad KHz \quad \rightarrow \quad \Omega_T = \frac{2\pi}{10}$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_T}^{\Omega_T} e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{5} n\right)}{\pi n}$$

---

d) $f_M = 5 \quad KHz, \quad f_T = 1 \quad KHz, \qquad f_s = 15 \quad KHz \quad \rightarrow \quad \Omega_T = \frac{2\pi}{15}$

$$h[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_T}^{\Omega_T} e^{jn\Omega}\,d\Omega=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{15}n\right)}{\pi n}$$

---

e) $f_M=5\quad KHz,\quad f_T=2\quad KHz,\qquad f_s=20\quad KHz\quad\rightarrow\quad \Omega_T=\frac{2\pi}{10}$

$$h[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_T}^{\Omega_T} e^{jn\Omega}\,d\Omega=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}n\right)}{\pi n}$$

---

f) $f_M=5\quad KHz,\quad f_T=3\quad KHz,\qquad f_s=15\quad KHz\quad\rightarrow\quad \Omega_T=2\pi\frac{3}{15}$

$$h[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_T}^{\Omega_T} e^{jn\Omega}\,d\Omega=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{5}n\right)}{\pi n}$$

---

g) $f_M=2\quad KHz,\quad f_T=1\quad KHz,\qquad f_s=6\quad KHz\quad\rightarrow\quad \Omega_T=2\pi\frac{1}{6}$

$$h[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_T}^{\Omega_T} e^{jn\Omega}\,d\Omega=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)}{\pi n}$$

---

h) $f_M=2\quad KHz,\quad f_T=0.5\quad KHz,\qquad f_s=5\quad KHz\quad\rightarrow\quad \Omega_T=\frac{2\pi}{10}$

$$h[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_T}^{\Omega_T} e^{jn\Omega}\,d\Omega=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}n\right)}{\pi n}$$