PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI

20 dicembre 2007

Esercizio N. 1

Si consideri il segnale passa banda $s(t)$. Calcolare il suo inviluppo complesso rispetto alla frequenza di f_0, nonché le sue parti in fase e in quadratura.

Soluzione esercizio N. 1

a) $s(t) = \cos\left(2\pi 6\times 10^6 t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(2\pi 6.02\times 10^6 t - \frac{\pi}{3}\right),\quad f_0 = 6\times 10^6\ Hz$

Spettro di $s(t)$ per $f > 0$: $\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f - 6\times 10^6\right) + \frac{1}{4j}e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f - 6.02\times 10^6\right)$

Spettro di $\tilde{s}(t)$: $e^{j\frac{\pi}{3}}\delta(f) + \frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f - 0.02\times 10^6\right)$

$$\tilde{s}(t) = e^{j\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2j}e^{j\left(2\pi\times 0.02\times 10^6 t - \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$s_c(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(2\pi\times 0.02\times 10^6 t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$s_s(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(2\pi\times 0.02\times 10^6 t - \frac{\pi}{3}\right)$$

b) $s(t) = \cos\left(2\pi 6\times 10^6 t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi 6.02\times 10^6 t\right),\quad f_0 = 6.01\times 10^6\ Hz$

Spettro di $s(t)$ per $f > 0$: $\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f - 6\times 10^6\right) + \frac{1}{4}\delta\left(f - 6.02\times 10^6\right)$

Spettro di $\tilde{s}(t)$: $e^{j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f + 0.01\times 10^6\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f - 0.01\times 10^6\right)$

$$\tilde{s}(t) = e^{j\frac{\pi}{3}}e^{-j\left(2\pi\times 0.01\times 10^6 t\right)} + \frac{1}{2}e^{j\left(2\pi\times 0.01\times 10^6 t\right)}$$

$$s_c(t) = \cos\left(2\pi\times 0.01\times 10^6 t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi\times 0.01\times 10^6 t\right)$$

$$s_s(t) = -\sin\left(2\pi\times 0.01\times 10^6 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(2\pi\times 0.01\times 10^6 t\right)$$

c) $s(t)=\cos\left(2\pi 6\times10^6 t+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(2\pi 5\times10^6 t-\frac{\pi}{3}\right)$, $f_0=6.5\times10^6$ Hz

Spettro di $s(t)$ per $f>0$: $\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f-6\times10^6\right)+\frac{1}{4j}e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f-5\times10^6\right)$

Spettro di $\tilde{s}(t)$: $e^{j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f+0.5\times10^6\right)+\frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f+1.5\times10^6\right)$

$$\tilde{s}(t)=e^{j\left(-2\pi\times0.5\times10^6 t+\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{1}{2j}e^{j\left(-2\pi\times1.5\times10^6 t-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$s_c(t)=\cos\left(2\pi\times0.5\times10^6 t-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(2\pi\times1.5\times10^6 t+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$s_s(t)=-\sin\left(2\pi\times0.5\times10^6 t-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\cos\left(2\pi\times1.5\times10^6 t+\frac{\pi}{3}\right)$$

d) $s(t)=\cos\left(2\pi 6\times10^6 t+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(2\pi 6.2\times10^6 t-\frac{\pi}{3}\right)$, $f_0=5.8\times10^6$ Hz,

Spettro di $s(t)$ per $f>0$: $\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f-6\times10^6\right)-\frac{1}{4j}e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f-6.2\times10^6\right)$

Spettro di $\tilde{s}(t)$: $e^{j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f-0.2\times10^6\right)-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f-0.4\times10^6\right)$

$$\tilde{s}(t)=e^{j\left(2\pi\times0.2\times10^6 t+\frac{\pi}{3}\right)}-\frac{1}{2j}e^{j\left(2\pi\times0.4\times10^6 t-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$s_c(t)=\cos\left(2\pi\times0.2\times10^6 t+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(2\pi\times0.4\times10^6 t-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$s_s(t)=\sin\left(2\pi\times0.2\times10^6 t+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(2\pi\times0.4\times10^6 t-\frac{\pi}{3}\right)$$

Esercizio N. 2

Si consideri la funzione di trasferimento $H(z)$:
Quanti sono i sistemi LTI tempo discreto che possono avere tale funzione di trasferimento?

Soluzione esercizio N. 2

a) $H(z)=\dfrac{z^5-z^3+z-3}{z^7+\frac{1}{2}}$

Uno di essi ha una risposta impulsiva $h[n]$ che è un segnale destro. Si tratta di un sistema stabile?
Qual è il minimo valore di n per cui $h[n]\neq 0$?

Il denominatore ha 7 poli tutti di modulo pari a $\sqrt[7]{\frac{1}{2}}<1$. Pertanto i sistemi sono 2 e le rispettive regioni di convergenza delle loro funzione di trasferimento sono definite rispettivamente da $|z|<\sqrt[7]{\frac{1}{2}}$ e $|z|>\sqrt[7]{\frac{1}{2}}$. Quest'ultima regione è propria di un segnale destro. Il corrispondente sistema è stabile poiché la sua regione di convergenza contiene la circonferenza di raggio unitario. Eseguendo la divisione lunga si vede che il primo valore diverso da zero si manifesta per $n=2$.

b) $H(z)=\dfrac{z^7-z^4+2}{z^5-3}$

Uno di essi ha una risposta impulsiva $h[n]$ che è un segnale destro. Si tratta di un sistema stabile?
Qual è il minimo valore di n per cui $h[n]\neq 0$?

Il denominatore ha 5 poli tutti di modulo pari a $\sqrt[5]{3}>1$. Pertanto i sistemi sono 2 e le rispettive regioni di convergenza delle loro funzione di trasferimento sono definite rispettivamente da $|z|<\sqrt[5]{3}$ e $|z|>\sqrt[5]{3}$. Quest'ultima regione è propria di un segnale destro. Il sistema corrispondente non è stabile poiché la sua regione di convergenza non contiene la circonferenza di raggio unitario. Eseguendo la divisione lunga si vede che il primo valore diverso da zero si manifesta per $n=-2$.

c) $H(z)=\dfrac{z^3-1}{z^8+1}$

Uno di essi ha una risposta impulsiva $h[n]$ che è un segnale sinistro. Si tratta di un sistema stabile?

Qual è il massimo valore di n per cui $h[n]\neq 0$?

Il denominatore ha 8 poli tutti di modulo pari a 1. Pertanto i sistemi sono 2 e le rispettive regioni di convergenza delle loro funzione di trasferimento sono definite rispettivamente da $|z|<1$ e $|z|>1$. La prima regione è propria di un segnale sinistro. Il corrispondente sistema non è stabile poiché la sua regione di convergenza non contiene la circonferenza di raggio unitario. Eseguendo la divisione lunga (att.ne: per segnali sinistro ordinare numeratore e denominatore secondo potenze crescenti di *n*) si vede che il massimo valore di n per cui $h[n]\neq 0$ è $n=0$.

d) $H(z)=\dfrac{z^4+z^2-z+1}{z^4-2}$

Uno di essi ha una risposta impulsiva $h[n]$ che è un segnale sinistro. Si tratta di un sistema stabile?

Qual è il massimo valore di n per cui $h[n]\neq 0$?

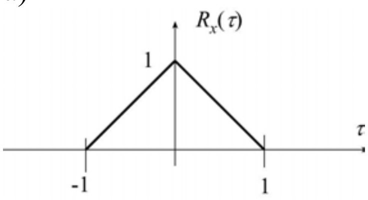
Il denominatore ha 4 poli tutti di modulo pari a $\sqrt[4]{2}>1$. Pertanto i sistemi sono 2 e le rispettive regioni di convergenza delle loro funzione di trasferimento sono definite rispettivamente da $|z|<\sqrt[4]{2}$ e $|z|>\sqrt[4]{2}$. La prima regione è propria di un segnale sinistro. Il corrispondente sistema è stabile poiché la sua regione di convergenza contiene la circonferenza di raggio unitario. Eseguendo la divisione lunga (att.ne: per segnali sinistro ordinare numeratore e denominatore secondo potenze crescenti di *n*) si vede che il massimo valore di n per cui $h[n]\neq 0$ è $n=0$.

Esercizio N. 3

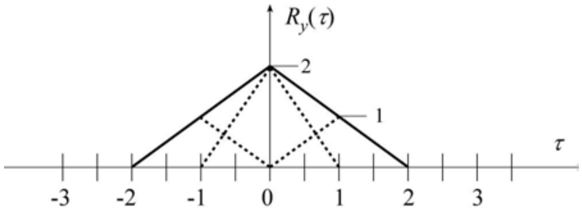
Un processo aleatorio stazionario ha funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$. Esso è posto all'ingresso di un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t)$. Disegnare con cura il grafico della funzione di autocorrelazione del processo di uscita.

Soluzione esercizio N. 3

a)



$$h(t)=\delta(t)+\delta(t-1)$$

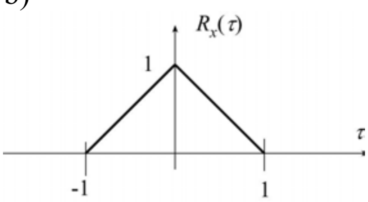


$R_y(\tau)=R_x(\tau)\otimes h(\tau)\otimes h(-\tau)$.

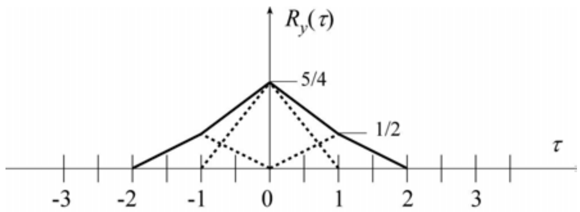
Si ha: $[\delta(\tau)+\delta(\tau-1)]\otimes[\delta(-\tau)+\delta(-\tau-1)]=2\delta(\tau)+\delta(\tau-1)+\delta(\tau+1)$, per cui

$R_y(\tau)=2R_x(\tau)+R_x(\tau-1)+R_x(\tau+1)$

b)



$$h(t)=\delta(t)+\frac{1}{2}\delta(t+1)$$

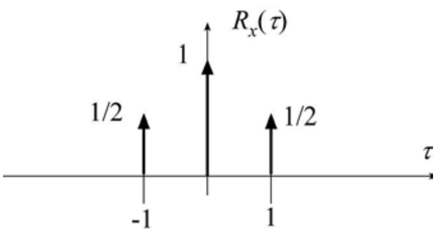


$R_y(\tau)=R_x(\tau)\otimes h(\tau)\otimes h(-\tau)$.

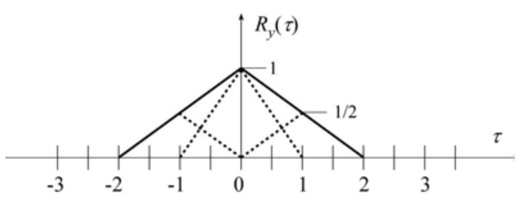
$\left[\delta(\tau)+\frac{1}{2}\delta(\tau+1)\right]\otimes\left[\delta(-\tau)+\frac{1}{2}\delta(-\tau+1)\right]=\frac{5}{4}\delta(\tau)+\frac{1}{2}\delta(\tau-1)+\frac{1}{2}\delta(\tau+1)$, per cui

$R_y(\tau)=\frac{5}{4}R_x(\tau)+\frac{1}{2}R_x(\tau-1)+\frac{1}{2}R_x(\tau+1)$

c)



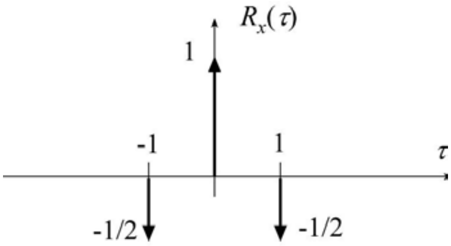
$$h(t)=\mathrm{rect}(t)$$



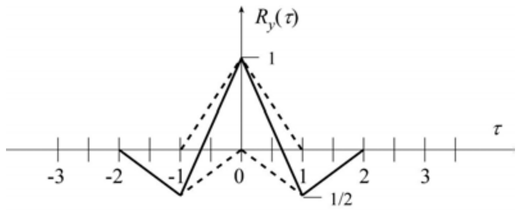
Si ha: $\mathrm{rect}(\tau)\otimes\mathrm{rect}(-\tau)=\begin{cases}1-|\tau| & per\ |\tau|<1\\ 0 & per\ |\tau|>1\end{cases}$

$R_y(\tau)$ come in figura

d)



$$h(t) = \mathrm{rect}(t-1)$$



$$\mathrm{rect}(\tau-1) \otimes \mathrm{rect}(-\tau-1) = \begin{cases} 1-|\tau| & per\ |\tau| < 1 \\ 0 & per\ |\tau| > 1 \end{cases}$$

$R_y(\tau)$ come in figura

Esercizio N. 4

La generica realizzazione $x(t)$ di un processo aleatorio dipende dalla variabile aleatoria α, definita sull'intero asse reale con densità di probabilità $p_\alpha(\alpha)$.
Dopo aver determinato la costante *C*, calcolare il valor medio del processo.

Soluzione esercizio N. 4

a) $x(t) = \frac{1}{2} e^{-(t-\alpha)} u(t-\alpha)$ $\qquad p_\alpha(\alpha) = Ce^{-|\alpha|}$

Calcolo della costante C: $C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\alpha|} d\alpha = 2C \int_0^{+\infty} e^{-\alpha} d\alpha = 2C = 1 \quad \rightarrow \quad C = \frac{1}{2}$

$$E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-(t-\alpha)} u(t-\alpha) \frac{1}{2} e^{-|\alpha|} d\alpha =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{2\alpha} d\alpha = \frac{1}{8} e^{t} & per\ t < 0 \\ \frac{1}{4} e^{-t} \left\{ \int_{-\infty}^{0} e^{2\alpha} d\alpha + \int_0^t d\alpha \right\} = \frac{1}{8} e^{-t} + \frac{1}{4} t e^{-t} & per\ t > 0 \end{cases}$$

b) $x(t)=\frac{1}{2}e^{-t}u(t-\alpha)$ $\qquad p_\alpha(\alpha)=Ce^{-|\alpha|}$

Calcolo della costante C: $C\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|\alpha|}d\alpha=2C\int_{0}^{+\infty}e^{-\alpha}d\alpha=2C=1 \quad\rightarrow\quad C=\frac{1}{2}$

$$E[x(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-t}u(t-\alpha)\frac{1}{2}e^{-|\alpha|}d\alpha=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-t}\int_{-\infty}^{t}e^{\alpha}d\alpha \quad =\frac{1}{4} & per\ t<0\\ \frac{1}{4}e^{-t}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{\alpha}d\alpha+\int_{0}^{t}e^{-\alpha}d\alpha\right\}=\frac{1}{4}e^{-t}\left(2-e^{-t}\right) & per\ t>0\end{cases}$$

c) $x(t)=\frac{1}{2}e^{-(t+\alpha)}u(t+\alpha)$ $\qquad p_\alpha(\alpha)=Ce^{-|\alpha|}$

Calcolo della costante C: $C\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|\alpha|}d\alpha=2C\int_{0}^{+\infty}e^{-\alpha}d\alpha=2C=1 \quad\rightarrow\quad C=\frac{1}{2}$

$$E[x(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-t}e^{-\alpha}u(t+\alpha)\frac{1}{2}e^{-|\alpha|}d\alpha=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-t}\left\{\int_{-t}^{0}d\alpha+\int_{0}^{+\infty}e^{-2\alpha}d\alpha\right\}=\frac{1}{4}e^{-t}\left(t+\frac{1}{2}\right) & per\ t>0\\ \frac{1}{4}e^{-t}\int_{-t}^{+\infty}e^{-2\alpha}d\alpha=\frac{1}{8}e^{t} & per\ t<0\end{cases}$$

d) $x(t)=\frac{1}{2}e^{-(t-\alpha)}u(t+\alpha)$ $\qquad p_\alpha(\alpha)=Ce^{-2|\alpha|}$

Calcolo della costante C: $C\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2|\alpha|}d\alpha=2C\int_{0}^{+\infty}e^{-2\alpha}d\alpha=C=1 \quad\rightarrow\quad C=1$

$$E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-t} e^{\alpha} u(t+\alpha) e^{-2|\alpha|} d\alpha =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-t} \left\{ \int_{-t}^{0} e^{3\alpha} d\alpha + \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha} d\alpha \right\} = \frac{1}{2} e^{-t} \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3} e^{-3t} \right) & per\ t > 0 \\ \frac{1}{2} e^{-t} \int_{-t}^{+\infty} e^{-\alpha} d\alpha = \frac{1}{2} \quad per\ t < 0 \end{cases}$$

Esercizio N. 5

All'ingresso di un sistema LTI viene messo un rumore gaussiano bianco stazionario, caratterizzato da una densità spettrale di potenza bilatera $S_x(f) = 0.5\ \mu\text{W/Hz}$. Sapendo che la risposta impulsiva del sistema è $h(t)$, calcolare la potenza media del processo all'uscita del sistema.

,

Soluzione esercizio N. 5

(Conviene risolvere l'esercizio nel dominio del tempo).

La funzione di autocorrelazione del processo di ingresso è pari a $\frac{1}{2} 10^{-6} \delta(\tau)$.

La potenza media di uscita corrisponde a $R_y(0)$.

Siccome $R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$, si avrà:

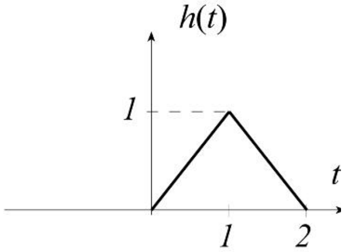
a) $h(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right)$ $\qquad R_y(0) = \frac{1}{2} 10^{-6} \int_0^1 e^{-\alpha} d\alpha = \frac{1}{2} 10^{-6} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$ W

b) $h(t) = kt \operatorname{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right)$

calcolare per quale valore di k la potenza media del processo all'uscita del sistema risulterà pari a 6 μW.

$$R_y(0) = \frac{1}{2} 10^{-6} \int_0^1 k^2 \alpha^2 d\alpha = \frac{1}{6} 10^{-6} k^2 \quad \rightarrow \quad k = 6$$

c)



$$R_y(0) = \frac{1}{2} 10^{-6} 2 \int_0^1 \alpha^2 d\alpha = \frac{1}{3} 10^{-6} \text{ W.}$$

d) $h(t) = \sin(2\pi t)\mathrm{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right)$

$$R_y(0) = \frac{1}{2}10^{-6}\int_0^1 \sin^2(2\pi\alpha)d\alpha = \frac{1}{4}10^{-6}\int_0^1 [1-\cos(4\pi\alpha)]d\alpha = \frac{1}{4}10^{-6} \text{ W.}$$