Teoria dei Segnali

(Appello del 12 giugno 2008)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Il segnale periodico $x(t)$ è posto all'ingresso di un sistema LTI con risposta in frequenza $H(f)$ (vedi figura 1). Determinare il valore efficace del segnale di uscita.

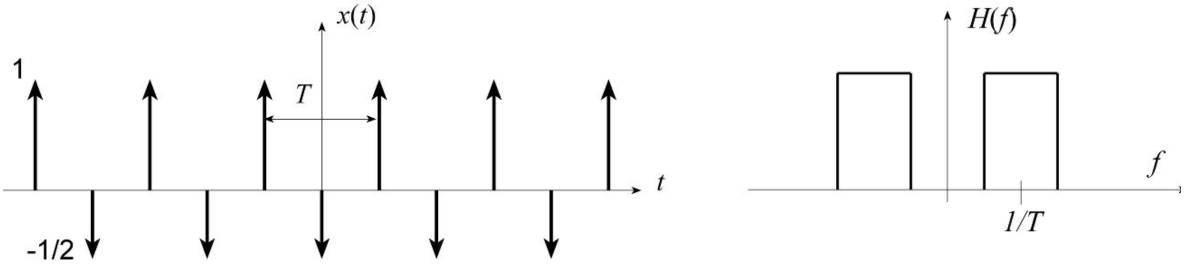


Fig. 1

Soluzione

Il generico coefficiente c_n dello sviluppo in serie di Fourier di $x(t)$ è dato da:

$$c_n = \frac{1}{T}\left(e^{-j\omega\frac{T}{2}} - \frac{1}{2}\right)\Bigg|_{\omega = n\frac{2\pi}{T}} = \frac{1}{T}\left(e^{-jn\pi} - \frac{1}{2}\right)$$

Attraverso il sistema LTI transiterà solamente la prima armonica, costituita da una sinusoide di ampiezza $\frac{3}{T}$ e pertanto di valore efficace $\frac{3}{T\sqrt{2}}$.

Esercizio N. 2

Un sistema lineare risponde all'impulso unitario centrato in $n = k$ con il segnale $u[n] - u[n-k]$. Si calcoli la sua risposta al segnale $u[n] - u[n-10]$.

Soluzione

Ovviamente il sistema non è tempo invariante. La risposta è data dalla seguente sommatoria:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{u[k] - u[k-10]\}\{u[n] - u[n-k]\} = 10u[n] - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{u[k] - u[k-10]\} u[n-k]$$

La seconda sommatoria corrisponde alla somma di convoluzione tra $u[n] - u[n-10]$ e $u[n]$, che vale:

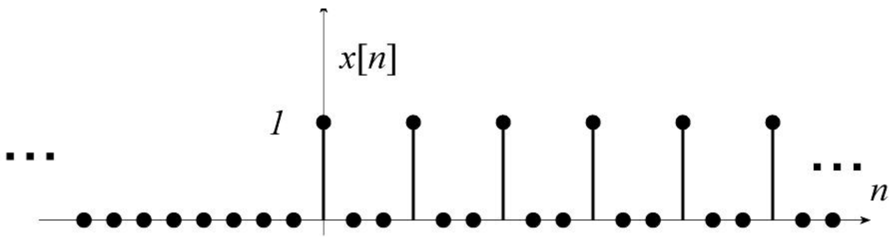
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\{u[k]-u[k-10]\}u[n-k]=\begin{cases}0 \quad \text{per } n<0\\ n+1 \quad \text{per } 0\le n\le 9\\ 10 \ \text{ per } \ n>9\end{cases}$$

In conclusione

$$y[n]=\begin{cases}0 \quad \text{per } n<0\\ n+11 \quad \text{per } 0\le n\le 9\\ 20 \ \text{ per } \ n>9\end{cases}$$

Esercizio N. 3

Calcolare la trasformata di Fourier del segnale riportato in figura:



Soluzione

Formalmente, la trasformata di Fourier è:

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-j3n\Omega}$$

Essa corrisponde alla trasformata di Fourier del gradino unitario, calcolata in 3Ω . Pertanto

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{1+e^{j3\Omega}}+\pi\frac{1}{3}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-n2\pi)$$

Esercizio N. 4

Un segnale passa banda ha la seguente espressione analitica:

$$s(t)=m(t)\cos(\omega_0 t)+\cos[\omega_0 t+m(t)]$$

essendo $m(t)$ un segnale a bassa frequenza e a banda limitata.

Dire quale, tra le funzioni di seguito indicate, è l'inviluppo complesso di $s(t)$ rispetto alla frequenza angolare ω_0 .

1) $e^{jm(t)}$

2) $\cos(m(t))-\sin(m(t))$

3) $m(t)+e^{jm(t)}$

4) $e^{j\cos(m(t))}$

Soluzione

Si ponga $s(t)$ nella forma canonica, in modo da evidenziare le sue parti in fase e in quadratura:

$$s(t) = m(t)\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_0 t)\cos[m(t)] - \sin(\omega_0 t)\sin[m(t)]$$

Per quanto riguarda l'inviluppo complesso, risulta:

$$\tilde{s}(t) = m(t) + \cos[m(t)] + j\sin[m(t)] = m(t) + e^{jm(t)}$$

La risposta corretta è la N. 3

Esercizio N. 5

Si consideri il seguente processo aleatorio associato al lancio di una moneta:

$$\begin{aligned} T &\rightarrow \quad x(t) = 1 + \sin^2(2\pi f_0 t) \\ C &\rightarrow \quad x(t) = 1 - \cos^2(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

Calcolare la sua densità spettrale di potenza.

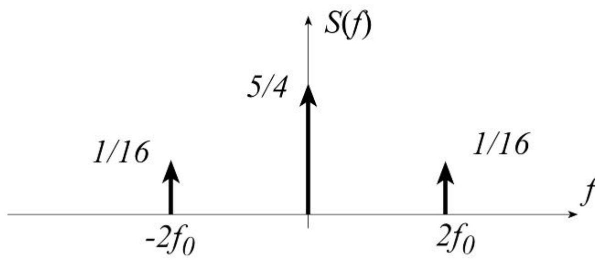
Soluzione

Le due realizzazioni distinte del processo possono essere messe nella forma::

$$x^{(1)}(t) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t)$$

$$x^{(2)}(t) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t)$$

Ciascuna di esse è costituita da una componente continua e da una sinusoide a frequenza $2f_0$. La densità spettrale di potenza sarà quindi costituita da un impulso a frequenza zero e da due impulsi a frequenza $\pm 2f_0$. Tenendo conto del fatto che le due realizzazioni sono equiprobabili, si perviene al risultato riportato in figura:



Esercizio N. 6

Un processo gaussiano bianco ha una densità spettrale di potenza pari a 1W/Hz. Esso è applicato all'ingresso di un sistema la cui risposta impulsiva è:

$$h(t) = e^{-\frac{1}{4}t}u(t-1)$$

Calcolare la potenza media del processo di uscita.

Soluzione

La potenza media del processo di uscita corrisponde a $R_y(0)$. Il processo all'ingresso del sistema ha una funzione di autocorrelazione pari a $\delta(\tau)$. La funzione di autocorrelazione del processo d'uscita è data da:

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau) = h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

Pertanto:

$$R_y(0) = \int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{4}\tau} e^{-\frac{1}{4}\tau} d\tau = \int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\tau} d\tau = \frac{2}{\sqrt{e}}$$