Teoria dei Segnali

(Appello del 10 settembre 2009)

Prova scritta

Parte prima

<u>Esercizio N. 1</u>

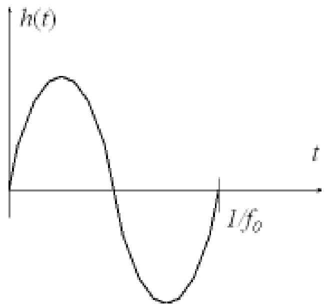
La risposta impulsiva di un sistema LTI tempo continuo è data dalla seguente espressione:

$$h(t) = \sin(2\pi f_0 t)\mathrm{rect}\left(f_0 t - \frac{1}{2}\right)$$

Calcolare la risposta del sistema al gradino unitario.

Soluzione

Nella figura è riportato il grafico di $h(t)$. La risposta al gradino corrisponde all'integrale corrente di $h(t)$, e pertanto $y(t) = \frac{1-\cos(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0} rect\left(f_0 t - \frac{1}{2}\right)$



<u>Esercizio N. 2</u>

Un sistema lineare tempo discreto risponde all'impulso unitario centrato in un generico istante n_0 (vale a dire $\delta[n-n_0]$) con il segnale

$$h[n, n_0] = \left(\frac{1}{8}\right)^{n+n_0} u[n-n_0]$$

Calcolare la sua risposta al segnale $x[n] = \left(\frac{1}{8}\right)^{-n} u[n]$.

Soluzione

Il sistema non è tempo-invariante. La risposta è data dalla sommatoria $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n,k]x[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^{-k} u[k]\left(\frac{1}{8}\right)^{n+k} u[n-k] = (n+1)\left(\frac{1}{8}\right)^{n} u[n]$

Esercizio N. 3

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente risposta in frequenza:

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = e^{-|\Omega|} \qquad per\ |\Omega| < \pi$$

(ovviamente questo andamento si ripete con periodo 2π lungo tutto l'asse Ω).
Dire quanto vale la risposta impulsiva in $n = 1$.

Soluzione

Tenendo conto del fatto che $H\left(e^{j\Omega}\right)$ è una funzione reale e pari, si può calcolare la risposta impulsiva con l'integrale seguente:

$$h[n] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-\Omega}\cos(\Omega n)d\Omega$$

che per $n = 1$ diventa $h[n] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-\Omega}\cos(\Omega)d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-\Omega}\left(e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}\right)d\Omega$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-\Omega}\left(e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}\right)d\Omega = \frac{1 + e^{-\pi}}{2\pi}$$

Parte seconda

Esercizio N. 4

La funzione di trasferimento di un sistema LTI tempo discreto è data da una funzione razionale nella variabile z. Si sa che tale funzione ha un polo in $z = -\frac{1}{2}$ e che la sua risposta impulsiva soddisfa alla relazione:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < M \quad \text{(numero reale positivo)}$$

Può la risposta $h[n]$ essere:

a) di durata finita?
b) Un segnale destro?
c) Un segnale sinistro?
d) Un segnale bilaterale?

Ogni risposta deve essere giustificata in maniera convincente.

Soluzione

a) No, la regione di convergenza dovrebbe essere tutto il piano escluso al più l'origine e/o il punto all'infinito.

b) Sì, a patto che non ci siano degli ulteriori poli con modulo maggiore di 1. Altrimenti la circonferenza di raggio unitario non sarebbe inclusa nella ROC, mentre la condozione sulla risposta impulsiva ci dice che si tratta di un sistema stabile.

c) No, perché l'eventuale ROC non conterrebbe la circonferenza di raggio unitario.

d) Sì, a patto che ci siano altri poli con modulo maggiore di 1.

Esercizio N. 5

Un segnale radio ha la seguente espressione analitica:

$$x(t) = m(t)\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

ove $m(t)$ è un processo aleatorio stazionario gaussiano, a valor medio nullo e varianza pari a 0.5. La fase ϕ è una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra $-\pi$ e π ed è indipendente da $m(t)$. La frequenza f_0 è una costante. Mostrare che il segnale radio $x(t)$ è un processo stazionario (in senso debole). E' importante l'ipotesi di indipendenza tra ϕ e $m(t)$? (giustificare la risposta). Calcolare infine la potenza media di $x(t)$.

Soluzione

Valor medio:

$$E[m(t)\cos(2\pi f_0 t + \phi)] = E[m(t)]E[\cos(2\pi f_0 t + \phi)] = 0$$

Questo passaggio è lecito grazie grazie all'ipotesi di indipendenza tra ϕ e $m(t)$.

Funzione di auto correlazione:

$$R_x(t, t+\tau) = E[m(t)\cos(2\pi f_0 t + \phi) m(t+\tau)\cos(2\pi f_0 (t+\tau) + \phi)]$$

$$= E[m(t)m(t+\tau)]E[\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 (t+\tau))] = R_m(\tau)\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$$

Il processo è stazionario. La sua potenza media è pari a $R_x(0) = \frac{1}{2}\sigma_m^2 = \frac{1}{4}W$.

Esercizio N. 6

Si consideri il processo aleatorio associato all'esperimento "estrazione di una carta da un mazzo di 52 carte", così definito:

a) Se la carta estratta mostra un punteggio p_1 inferiore a 7, la realizzazione del processo è $x_1(t) = \cos(2\pi f_1 t)$.

b) Se la carta estratta mostra un punteggio p_2 tale che $7 \le p_2 \le 10$, la realizzazione del processo è $x_2(t) = \cos(2\pi f_2 t)$.

c) Se la carta estratta è una figura, la realizzazione del processo è $x_3(t) = \cos(2\pi f_3 t)$, con f_3 variabile aleatoria uniformemente distribuita tra f_1 e f_2 e indipendente dalla figura estratta.

Sapendo che $f_1 = 1MHz$ e $f_2 = 2MHz$, disegnare con cura la densità spettrale di potenza del processo aleatorio.

Soluzione

Qualunque sia la realizzazione la sua potenza media è sempre $\frac{1}{2}$. La realizzazione $x_1(t)$ si presenta con probabilità $P_1 = \frac{6}{13}$, $x_2(t)$ si presenta con probabilità $P_2 = \frac{4}{13}$ e $x_3(t)$ si presenta con probabilità $P_3 = \frac{3}{13}$. Pertanto la potenza $\frac{1}{2}$ è distribuita nel seguente modo: $\frac{6}{26}$ W sono concentrati a 1 MHz, $\frac{4}{26}$ W sono concentrati a 2 MHz e i restanti $\frac{3}{26}$ W sono distribuiti uniformemente tra 1 e 2 MHz. La densità spettrale unilatera di potenza si presenta dunque così: