Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 10.09.19

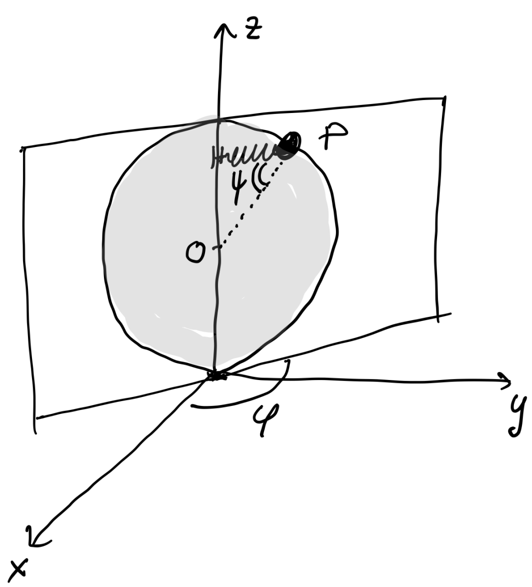
Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2018/2019

Esercizio 1

Si consideri un sistema Lagrangiano a n gradi di libertà.

1. Si definisca cosa si intende per punto di equilibrio in un sistema autonomo descritto dall'equazione differenziale $\dot{\vec{x}} = \vec{\mathsf{f}}(\vec{x})$. [1pt]
2. Si definisca cosa si intende per configurazione di equilibrio in un sistema Lagrangiano e come si collega alla definizione precedente. [2pt]
3. Si enunci e si dimostri il teorema di Lagrange-Dirichlet. [3pt]
4. Si descriva il procedimento di linearizzazione del sistema lagrangiano attorno a una configurazione di equilibrio. [3pt]
5. Si risolvano le equazioni del sistema Lagrangiano linearizzato. [2pt]
6. Cosa sono i modi normali di oscillazione? [1pt]
7. *Facoltativo: Linearizzare un sistema Hamiltoniano. (Che operazione si deve fare su $H(\vec{p}, \vec{q})$? Perché?) [1pt]*

Esercizio 2



Si consideri un cerchio rigido libero di ruotare attorno al suo diametro fissato su un asse verticale parallelo all'asse z (come in figura). Sia R il raggio del cerchio, O il suo centro, M la sua massa distribuita con densità uniforme. Sul cerchio è libero di scorrere (senza attrito) un punto materiale P di massa m, collegato da una molla di constante elastica k all'asse z (la molla è sempre parallela al piano xy). Sul sistema agisce la forza di gravità.

1. Dimostrare che il momento d'inerzia del cerchio in questione è $I = \frac{MR^2}{2}$. [0,5pt]
2. Scrivere la Lagrangiana L del sistema, usando come coordinate libere gli angoli φ e ψ in figura [2pt].
3. Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema [1pt].
4. Individuare la coordinata ciclica e calcolare la lagrangiana ridotta a un solo grado di libertà. [1,5 pt]
5. Si trovino *due* costanti del moto del sistema, spiegando perché sono costanti del moto. [2pt]
6. Si considerino i moti con dato iniziale $\dot{\varphi}(t=0) = 0$. Si trovino i punti di equilibrio del sistema ridotto e se ne discuta la stabilità [3pt].
7. *Facoltativo: Linearizzare la Lagrangiana ridotta attorno a $\psi = -\frac{\pi}{2}$ e determinare la frequenza delle piccole oscillazioni. [1pt]*

Esercizio 3

Si consideri una particella quantistica il cui stato, al tempo $t = 0$, è descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A\, e^{\frac{-(x-x_0)^2}{2\ell^2}}$$

1. Si determini la costante A in modo che lo stato sia normalizzato. [1pt]
2. Si trovi la probabilità che la particella venga misurata nella regione $R = \{x \in \mathbb{R} | x \geq x_0\}$. [2pt]
3. Calcolare il valor medio della posizione X e la varianza $\Delta X^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$. [3pt]
4. Calcolare il trasformato di ψ rispetto all'operatore P, i.e. $P \cdot \psi$. [1pt]
5. Calcolare il valor medio di P. [1pt]
6. *Facoltativo: Nel caso la particella sia libera, scrivere la funzione d'onda che descrive lo stato evoluto al tempo t. [1pt]*