Geometria 1 per Matematica e IADA

Diario delle lezioni

A.A. 2020-2021

Docente: Prof. Daniele Zuddas

Lezione 1. Spazi vettoriali, assiomi, esempi: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$.

Lezione 2. Esempi: vettori geometrici, $\mathbb{Q}^n$. Alcune prime proprietà degli spazi vettoriali.

Lezione 3. Spazio dei polinomi. Spazio delle matrici $m \times n$. Combinazioni lineari. Sottospazi vettoriali.

Lezione 4. Sottospazio generato da un sottoinsieme, intersezione e somma di sottospazi.

Lezione 5. Somma diretta, dipendenza e indipendenza lineare, basi.

Lezione 6. Unicità delle componenti rispetto a vettori linearmente indipendenti. Esistenza delle basi (per spazi vettoriali finitamente generati). Lemma di Steinitz (o dello scambio): disuguaglianza tra numero di vettori linearmente indipendenti e numero di generatori.

Lezione 7. Invarianza del numero di vettori di una base, dimensione. Formula di Grassmann.

Lezione 8. Esempi di spazi vettoriali di dimensione infinita: spazio dei polinomi, spazio delle successioni reali. Relazioni di equivalenza e quozienti. Generalità sulle funzioni, relazione d'equivalenza indotta da una funzione sul dominio.

Lezione 9. Inverse destre e sinistre di funzioni, funzione inversa, insiemi infiniti. Relazione d'equivalenza indotta da un sottospazio vettoriale, sottospazi affini di uno spazio vettoriale, traslazioni in spazi vettoriali.

Lezione 10. Spazio vettoriale quoziente. Applicazioni lineari, nucleo e immagine, nullità e rango di un'applicazione lineare. Iniettività e nucleo. Introduzione allo spazio delle applicazioni lineari, spazio vettoriale duale e biduale.

Lezione 11. Esempi di forme lineari, somma diretta e proiezioni canoniche, isomorfismi. Teorema della dimensione per applicazioni lineari. Dimensione dello spazio vettoriale quoziente.

Lezione 12. Teorema di determinazione delle applicazioni lineari mediante una base. Criterio di iniettività, suriettività e biiettività mediante una base. Isomorfismi e dimensione. Definizione di endomorfismi e automorfismi. Matrice associata ad un'applicazione lineare mediante basi.

Lezione 13. Matrici di applicazioni lineari, prodotto righe per colonne e composizione, applicazione lineare associata ad una matrice. Isomorfismo tra lo spazio delle applicazioni lineari e lo spazio delle matrici.

Lezione 14. Matrice trasposta, alcune proprietà del prodotto righe per colonne, matrici invertibili e isomorfismi, matrici diagonali, matrici del cambiamento di base.

Lezione 15. Cambiamenti di base, gruppo lineare generale, rango di una matrice, uguaglianza tra rango per righe e rango per colonne,

Lezione 16. Disuguaglianza per il rango di un prodotto, sistemi lineari e loro forma matriciale, soluzioni, sistemi compatibili e incompatibili, sistemi omogenei, spazio delle soluzioni, sottospazi affini di $\mathbb{K}^n$ e giacitura, teorema di struttura, condizioni di compatibilità.

Lezione 17. Teorema di Rouché-Capelli, sistemi lineari equivalenti, metodo di eliminazione di Gauss-Jordan, matrici e sistemi a gradini, esempi.

Lezione 18. Calcolo del rango col metodo di Gauss-Jordan. Operazioni elementari sulle righe (risp. sulle colonne) come moltiplicazione a sinistra (risp. a destra) per matrici elementari. Calcolo della matrice inversa. Dipendenza e indipendenza lineare mediante il metodo di Gauss-Jordan.

Lezione 19. Sistemi lineari di n equazioni in n incognite con matrice invertibile. Ripasso sul completamento della base col metodo dello scambio. Generalità sui gruppi, prime proprietà, esempi. Gruppi abeliani, gruppi finiti, generatori. Omomorfismi di gruppi. Gruppi ciclici, gruppo delle radici n-esime dell'unità e radici primitive. Sottogruppi.

Lezione 20. Generalità sui campi, sottocampi, esempi. Campo dei numeri complessi. Cenni sulle congruenze e costruzione di $\mathbb{Z}_n$. Addizione e moltiplicazione di classi di congruenza di interi modulo n, divisori dello zero. Algoritmo di Euclide per il massimo comun divisore. Struttura di campo di $\mathbb{Z}_p$ con p primo e determinazione degli inversi in $\mathbb{Z}_p$ col metodo della divisione con resto.

Lezione 21. Generalità sulle permutazioni, gruppo simmetrico e calcolo dell'ordine di Σ_n. Cicli e trasposizioni. Fattorizzazione di una permutazione in cicli disgiunti, esempi. Fattorizzazione in trasposizioni.

Lezione 22. Parità e segno delle permutazioni. Calcolo del segno mediante inversioni. Proprietà moltiplicativa del segno. Segno delle trasposizioni e dei cicli. Gruppo alterno.

Lezione 23. Determinante di una matrice quadrata, definizione, esempi, invarianza per trasposizione. Richiami ed esempi sulle matrici del cambiamento di base e matrici simili.

Lezione 24. Determinanti di matrici diagonali e triangolari. Multilinearità e alternanza del determinante.

Lezione 25. Permutazione delle righe (o delle colonne) di una matrice e suo determinante. Operazioni elementari. Calcolo del determinante col metodo di Gauss-Jordan (riduzione a matrice triangolare). Teorema di Binet e determinante della matrice inversa. Definizione dei cofattori (o complementi algebrici).

Lezione 26. Formula di Laplace ed esempi.

Lezione 27. Prodotto di una matrice per la sua matrice cofattore, criterio di invertibilità mediante il determinante, formula per la matrice inversa, esempi. Regola di Cramer. Introduzione al problema della diagonalizzabilità degli endomorfismi. Determinante di un endomorfismo. Basi diagonalizzanti, autovalori e autovettori di un endomorfismo.

Lezione 28. Polinomio caratteristico di un endomorfismo e di una matrice quadrata. Invarianza del polinomio caratteristico per similitudine. Teorema fondamentale dell'algebra (senza dimostrazione). Scomposizione di un polinomio complesso in fattori di primo grado e molteplicità degli zeri. Autospazio di un autovalore. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore, esempi.

Lezione 29. Disuguaglianza tra la molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di un autovalore. Teorema di indipendenza lineare di autovettori relativi ad autovalori distinti. Teorema di diagonalizzazione (corollario del teorema di indipendenza lineare), esempi.

Lezione 30. Forme bilineari su uno spazio vettoriale, alcuni esempi. Forme bilineari simmetriche, antisimmetriche, degeneri e non degeneri. Spazi vettoriali reali, forme bilineari simmetriche (semi)definite positive o negative e indefinite. Prodotti scalari su spazi vettoriali reali, prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^n$. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Norma e distanza Euclidea. Disuguaglianza triangolare per la norma e per la distanza.

Lezione 31. Angolo Euclideo tra due vettori. Vettori e sottospazi vettoriali ortogonali. Matrice di una forma bilineare rispetto ad una base. Matrici simmetriche e antisimmetriche. Rappresentazione matriciale di una forma bilineare. Cambiamenti di base e matrici congruenti. Rango di una forma bilineare. Esempi: prodotti scalari su $\mathbb{R}^2$.

Lezione 32. Ortogonalità negli spazi vettoriali Euclidei: spazio ortogonale, somma diretta ortogonale, proiezione ortogonale. Restrizione di una forma bilineare ad un sottospazio vettoriale. Sistemi di vettori ortogonali e ortonormali. Indipendenza lineare di un sistema di vettori ortogonali non nulli e basi ortonormali. Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

Lezione 33. Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, esistenza di basi ortonormali, completamento ad una base ortonormale, calcolo delle proiezioni ortogonali. Caratterizzazione delle matrici simmetriche definite positive. Applicazioni simmetriche su spazi vettoriali Euclidei e matrici simmetriche. Dimensione complessa e dimensione reale di uno spazio vettoriale complesso, forme e prodotti Hermitiani, prodotto Hermitiano canonico di $\mathbb{C}^n$.

Lezione 34. Coordinate rispetto ad una base ortonormale. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz complessa, disuguaglianza triangolare per la norma e per la distanza, angolo tra vettori in spazi Hermitiani, ortogonalità tra vettori e tra sottospazi vettoriali, complemento ortogonale, basi ortonormali, ortogonalizzazione di Gram-Schmidt (caso complesso), esistenza di basi ortonormali, calcolo delle proiezioni ortogonali. Matrici Hermitiane e rappresentazione matriciale delle forme Hermitiane, cambiamenti di base e congruenza complessa, caratterizzazione delle matrici Hermitiane definite positive. Applicazioni autoaggiunte tra spazi vettoriali Hermitiani e matrici Hermitiane, autovalori di matrici complesse Hermitiane e di matrici reali simmetriche.

Lezione 35. Teorema spettrale per endomorfismi simmetrici (caso reale) e per endomorfismi autoaggiunti (caso complesso). Isometrie tra spazi vettoriali Euclidei e loro caratterizzazione mediante la norma e mediante basi ortonormali. Matrici ortogonali e matrici ortogonali speciali. Teorema di classificazione degli spazi vettoriali Euclidei di dimensione finita (isomorfismo isometrico con $\mathbb{R}^n$).

Lezione 36. Caso complesso: isomorfismi unitari e loro caratterizzazione mediante la norma e mediante basi ortonormali. Teorema di classificazione degli spazi vettoriali Hermitiani di dimensione finita (isomorfismo unitario con $\mathbb{C}^n$). Matrici unitarie e matrici unitarie speciali. Teorema spettrale per automorfismi unitari. Teoremi spettrali per matrici simmetriche reali, autoaggiunte complesse, unitarie. Prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$.