meccanica delle vibrazioni

laurea magistrale
ingegneria meccanica

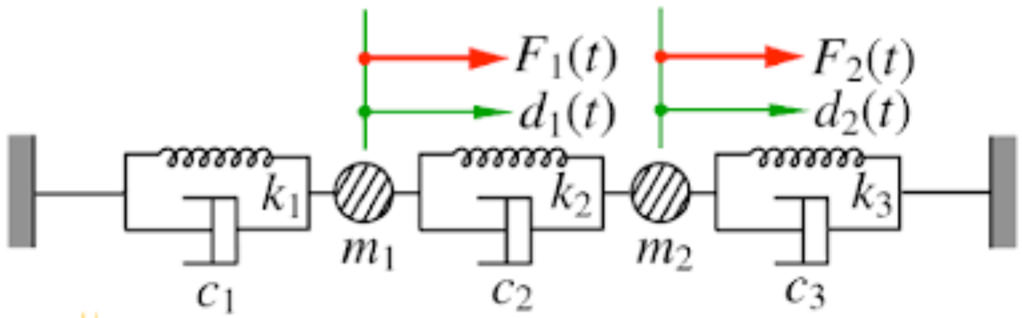
parte 4
modelli matematici per sistemi MDOF

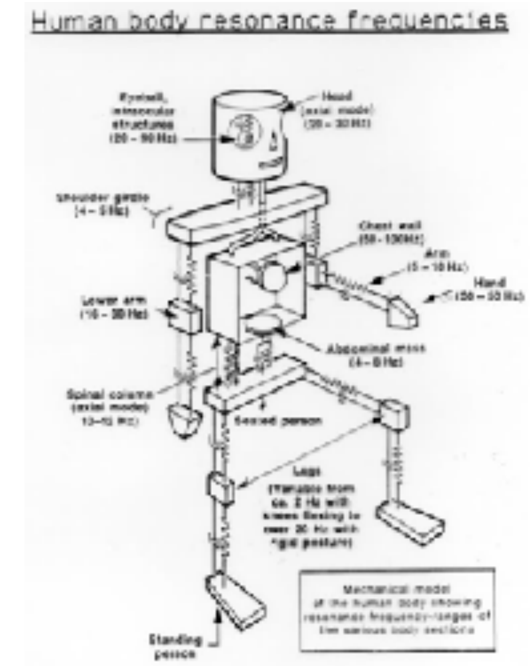


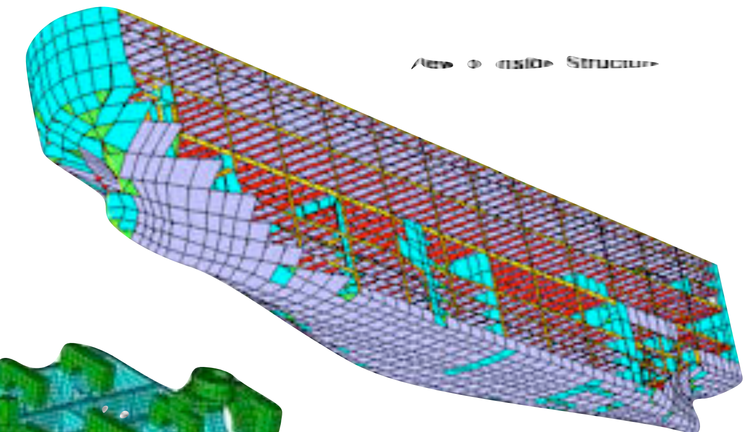


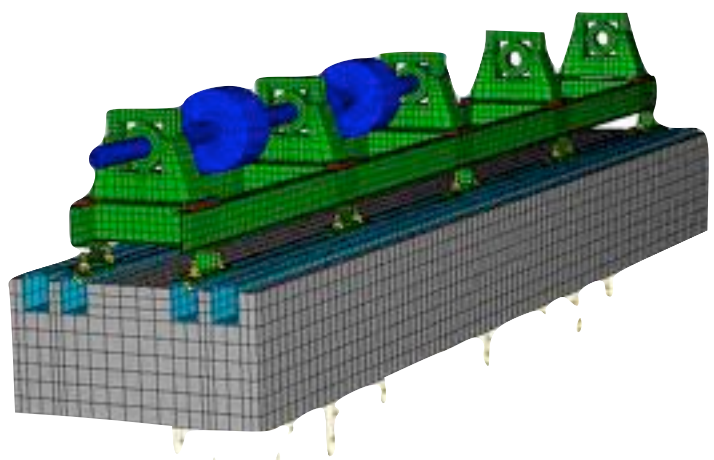
Luigi BREGANT
bregant@units.it

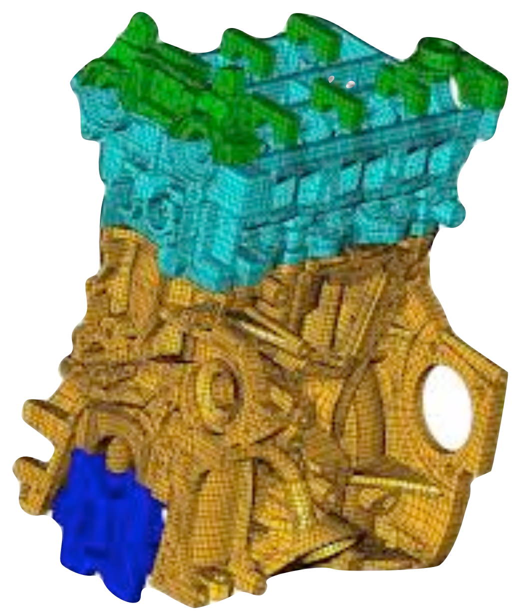
# Sistemi a Molti Gradi Di Libertà - Multiple Degrees of Freedom

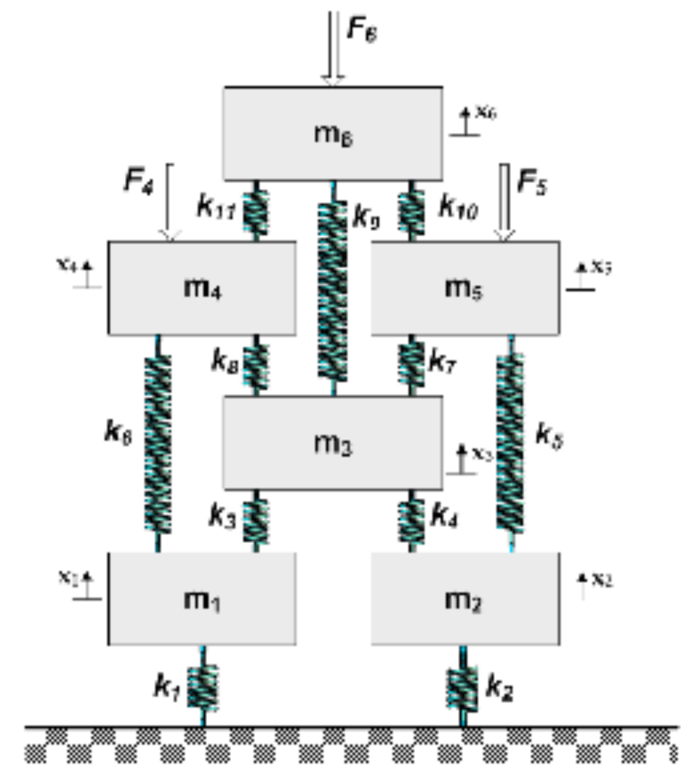


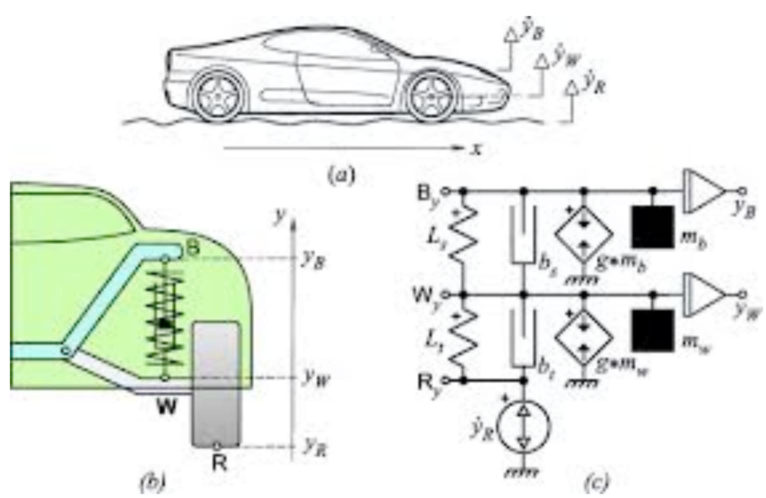



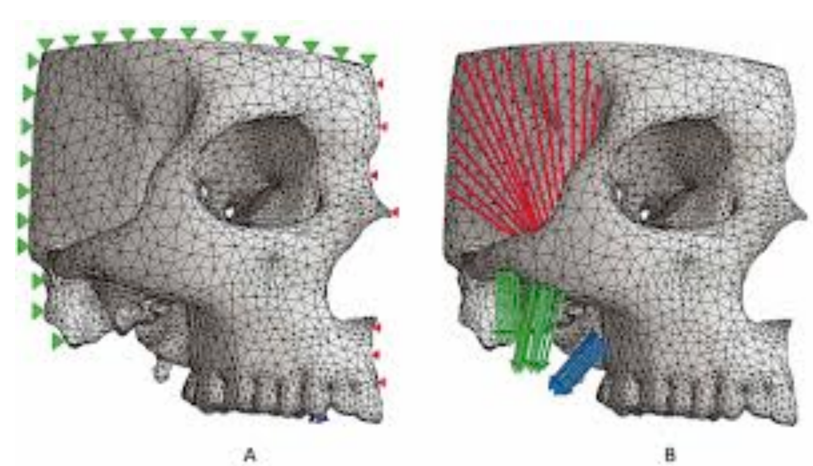









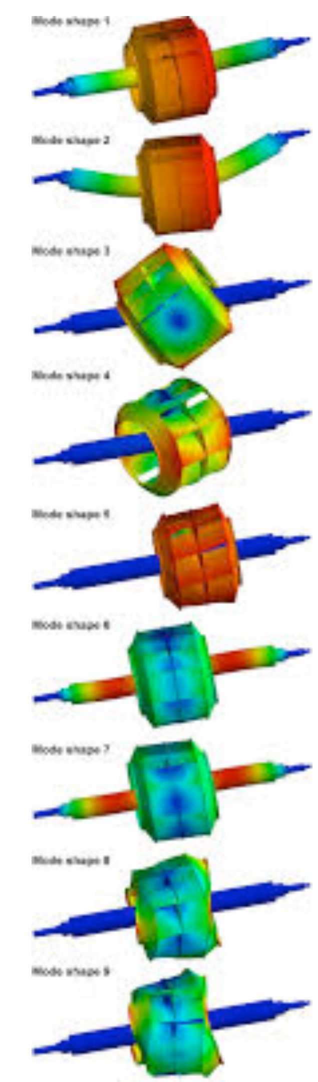



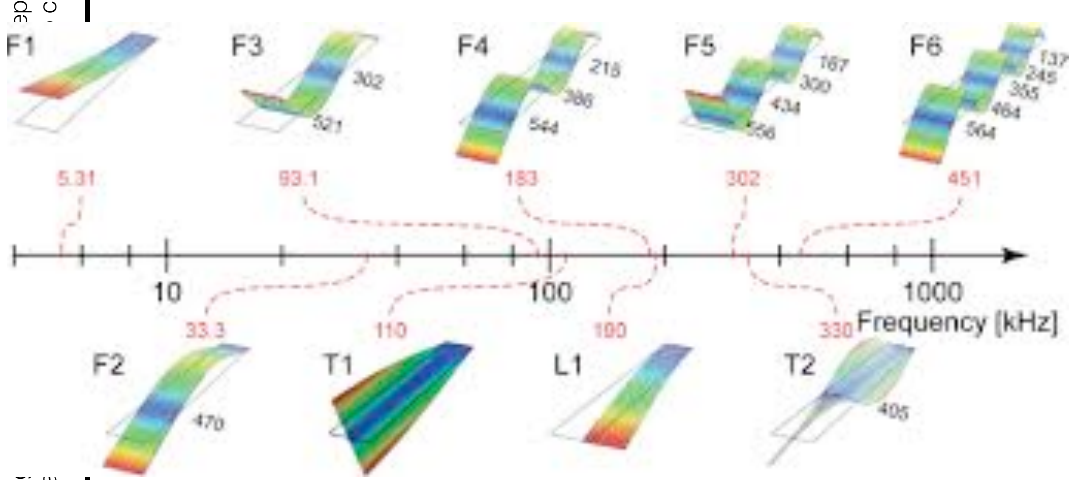

..abituatevi a considerare analizzare risolvere sistemi con TRASLAZIONI e ROTAZIONI!

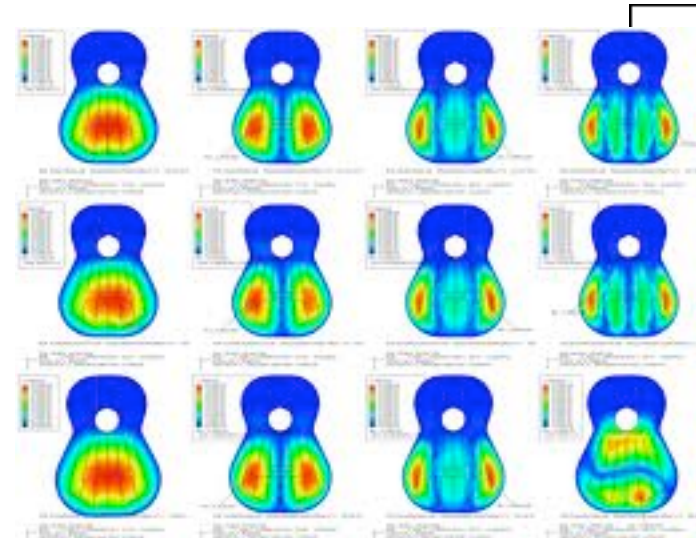
# Sistemi MDOF

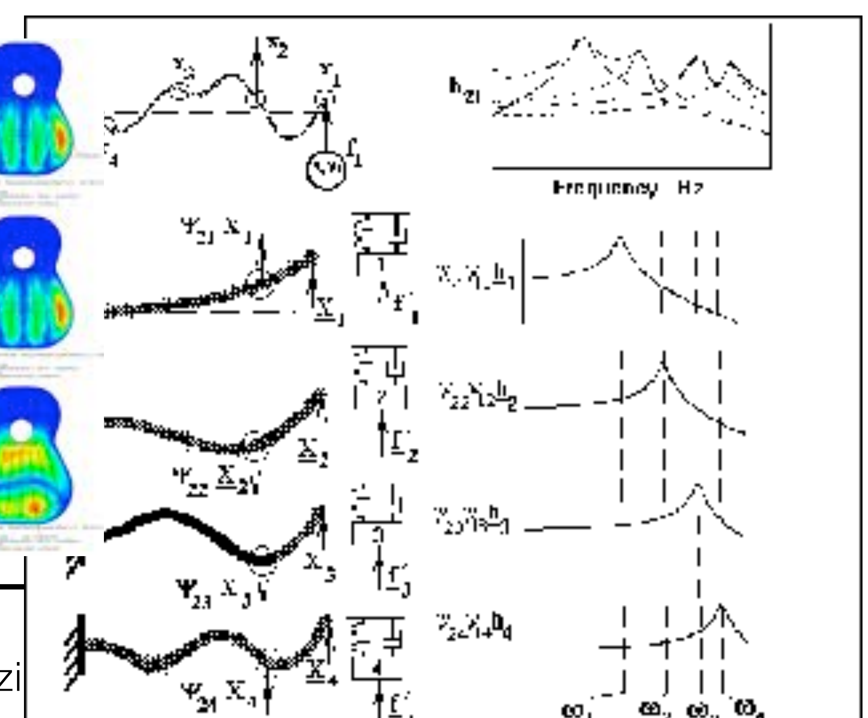
..scrivere le equazioni del moto..
..risolverle.. >

- trovare l'andamento delle coordinate libere
- in funzione, dei parametri del modello,
- delle condizioni iniziali,
- delle forzanti applicate,
- in forma chiusa / risoluzione numerica

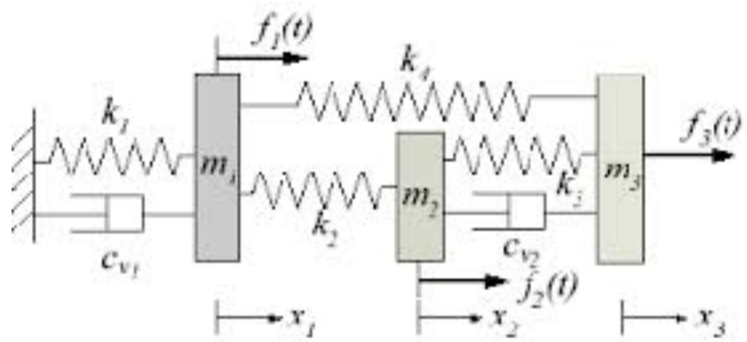






# Sistemi MDOF - approccio newtoniano




..valgono le stesse regole che per i sistemi SDOF…
..diagramma di corpo libero..
..equilibrio delle forze..

.. sistema di equazioni!

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) + k_4(x_1 - x_3) = f_1 \\ m_2\ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_2 - x_3) = f_2 \\ m_3\ddot{x}_3 + c_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + k_4(x_3 - x_1) + k_3(x_3 - x_2) = f_3 \end{cases}$$

..matrici SIMMETRICHE
(principio reciprocità)

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2+k_4 & -k_2 & -k_4 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ -k_4 & -k_3 & k_3+k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

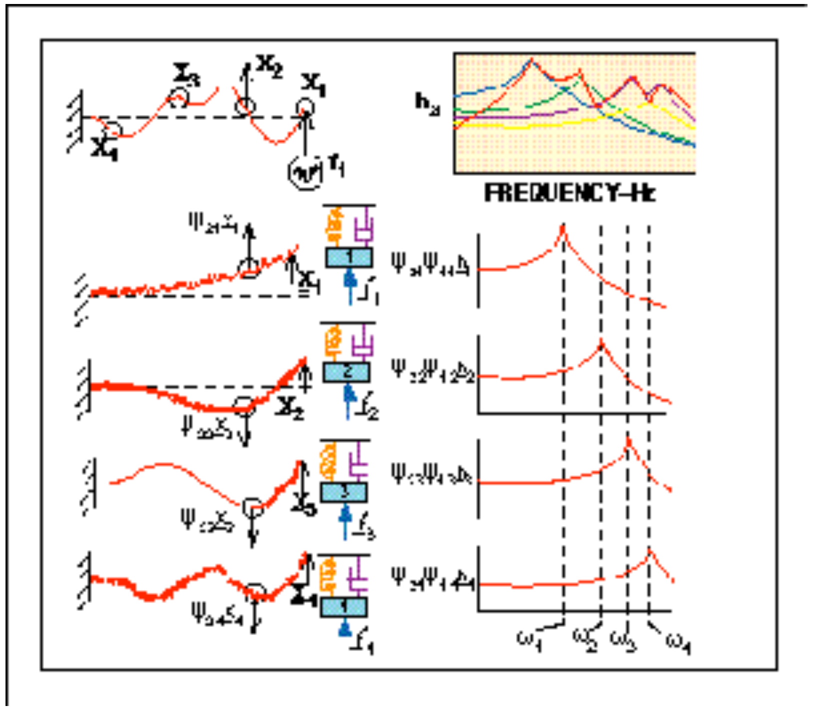
in forma compattata: $[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f\}$

# Sistemi MDOF - approccio newtoniano

..sistemi solitamente accoppiati (termini fuori diagonale diversi da 0)
..risolvere tutte le equazioni contemporaneamente…

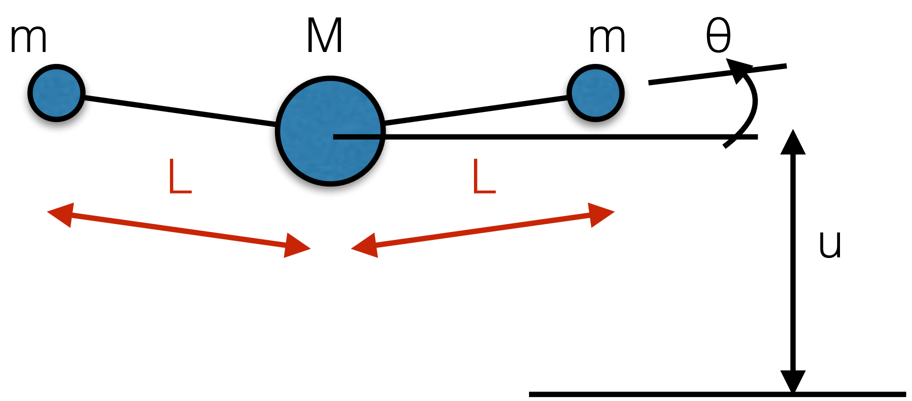
..disaccoppiare il sistema (termini fuori diagonale uguali a 0)
(trasformazione di coordinate: da coordinate fisiche a coordinate modali)
..risolvere equazioni indipendentemente..

…> ANALISI MODALE!




Se il sistema è composto da diversi pezzi, l'approccio newtoniano non è favorevole… meglio approccio Lagrangiano
(o energetico)

# Sistemi MDOF - approccio lagrangiano




..coordinate lagrangiane..

$$\begin{cases} q_1 = u \\ q_2 = \theta \end{cases}$$

..energia cinetica del sistema..

$$T = \frac{1}{2} M\dot{u}^2 + 2\left[\frac{1}{2} m\dot{y}_m^2\right]$$

$$y_m = u + L\sin\theta \simeq u + L\theta$$ ..piccoli spostamenti

$$T = \frac{1}{2} M\dot{u}^2 + m\left(\dot{u} + L\dot{\theta}\right)^2$$

..energia potenziale elastica..

$$V = 2\frac{1}{2} k\theta^2$$

Eq. Lagrange..

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_{knc}$$

# Sistemi MDOF - approccio lagrangiano

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = M\dot{u} + 2m\left(\dot{u} + L\dot{\theta}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = 2mL\left(\dot{u} + L\dot{\theta}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 2k\theta$$

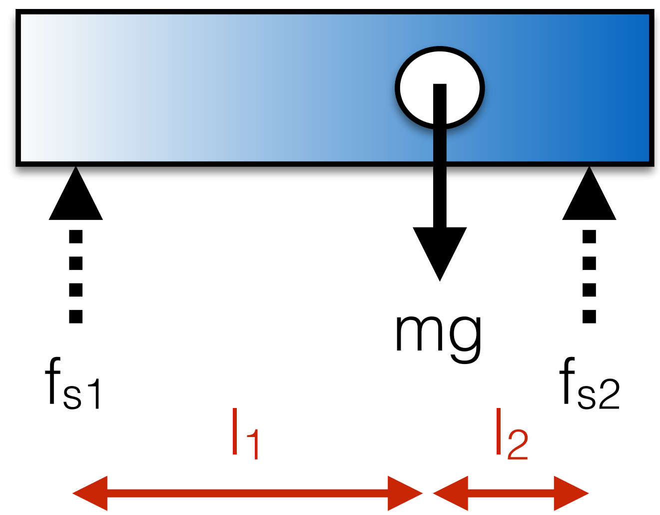
$$M\ddot{u} + 2m\left(\ddot{u} + L\ddot{\theta}\right) = 0$$ rispetto $q_1$

$$2mL\left(\ddot{u} + L\ddot{\theta}\right) + 2k\theta = 0$$ rispetto $q_2$

$$\begin{bmatrix} M+2m & 2mL \\ 2mL & 2mL^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

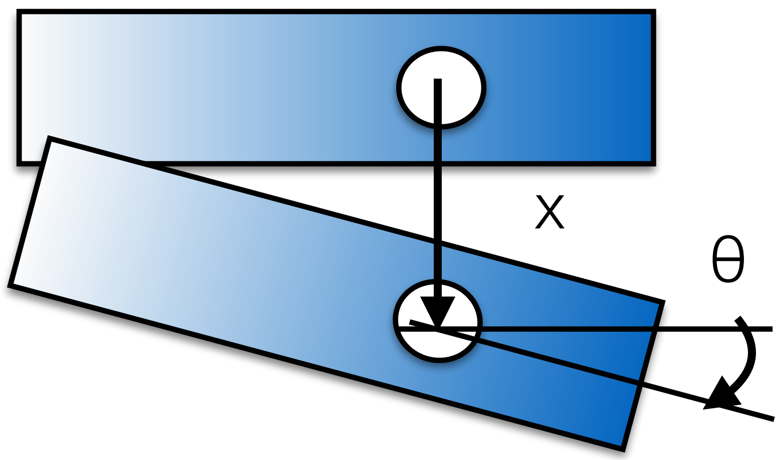
..matrice di rigidezza singolare!
(ordine diverso da rango)
…moto di corpo rigido!

# Sistemi MDOF - accoppiamento coordinate




In funzione della scelta delle coordinate cambiano le equazioni del moto, e le matrici del sistema!

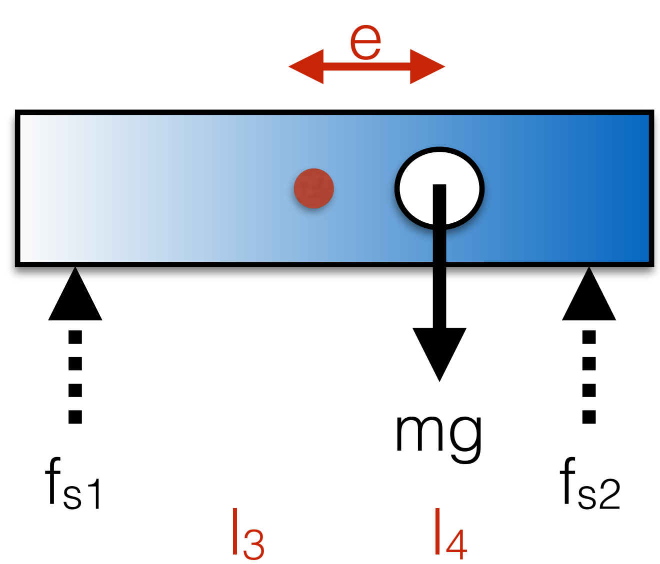
x abbassamento baricentro
θ rotazione attorno al baricentro




$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l_2 - k_1 l_1 \\ k_2 l_2 - k_1 l_1 & k_1 l_1^2 - k_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

matrice di massa diagonale
matrice di rigidezza non diagonale
> accoppiamento STATICO

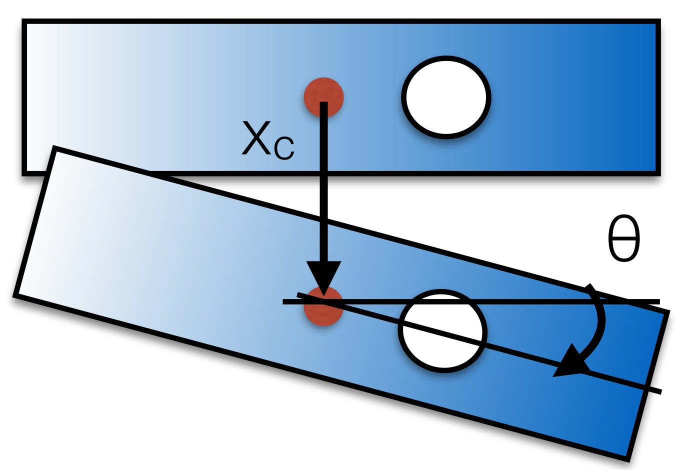
# Sistemi MDOF - accoppiamento coordinate




centro elastico: punto di equilibrio dei momenti delle forze applicate

$$l_3 k_1 = l_4 k_2$$

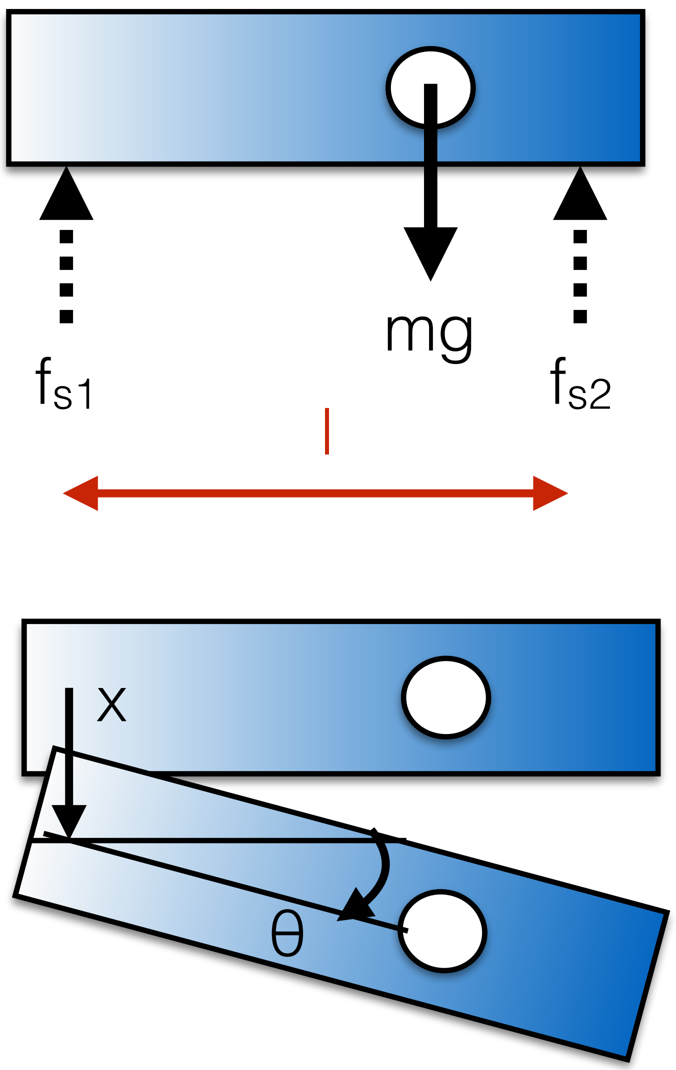
$x_c$ abbassamento centro elastico
θ rotazione attorno al centro elastico




$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & J_{ce} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & k_1 l_3^2 - k_2 l_4^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_c \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

matrice di massa non diagonale
matrice di rigidezza diagonale
> accoppiamento DINAMICO

# Sistemi MDOF - accoppiamento coordinate



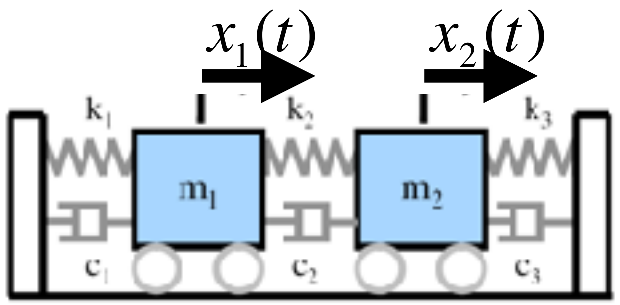

x abbassamento estremo 1
θ rotazione attorno estremo 1

$$\begin{bmatrix} m & ml \\ ml & J_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l \\ k_2 l & k_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

matrice di massa non diagonale
matrice di rigidezza non diagonale
> accoppiamento STATICO e DINAMICO

la matrice di massa e la matrice di rigidezza sono comunque SIMMETRICHE !

# Sistemi MDOF - non smorzati - vibrazioni libere




..per generalità di espressione…

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

1..vibrazioni libere, senza forzante…

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2..soluzione di tentativo…con le sue derivate…

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos(\omega t - \alpha) \\ x_2 = X_2 \cos(\omega t - \alpha) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = -\omega X_1 \sin(\omega t - \alpha) \\ \dot{x}_2 = -\omega X_2 \sin(\omega t - \alpha) \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega^2 X_1 \cos(\omega t - \alpha) \\ \ddot{x}_2 = -\omega^2 X_2 \cos(\omega t - \alpha) \end{cases}$$

3..sostituendo e semplificando..

$$\left[ -\omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

# Sistemi MDOF - non smorzati

$$[k]\{x\}=\omega^2[m]\{x\}$$
$$\frac{1}{\omega^2}[k]\{x\}=[m]\{x\}$$

..problema agli autovalori.. $\left[[k]-\omega^2[m]\right]\{x\}=\{0\}$

..NB se il vettore {x} è nullo non si “muove” nulla,

4..si cercano i valori di $\omega^2$ che annullano il determinate della matrice di rigidezza dinamica..

$$\left\|\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\right\| = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

..equazione caratteristica in $\omega^2$..

5..le radici di $\omega_i^2$ (con $\omega_1^2$ minore o uguale a $\omega_2^2$) sono le FREQUENZE NATURALI o AUTOVALORI del sistema

6..sostituendo gli $\omega_i^2$ nel sistema 3 (I o II), ed ottengo i rapporti $\beta_i=\left(\frac{X_2}{X_1}\right)_{\omega_i^2}$ che sono le DEFORMATE MODALI o AUTOVETTORI del sistema




Luigi BREGANT
bregant@units.it

# Sistemi MDOF - non smorzati

7..il sistema non è forzato, quindi può vibrare solo con una CL di modi a $\omega_1$ e $\omega_2$

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha) + A_2 \cos(\omega_2 t - \alpha) \\ x_2 = \beta_1 A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha) + \beta_2 A_2 \cos(\omega_2 t - \alpha) \end{cases}$$

..o in forma alterna..

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \cos(\omega_2 t) \\ x_2 = \beta_1 A_1 \cos(\omega_1 t) + \beta_1 B_1 \cos(\omega_1 t) + \beta_2 A_2 \cos(\omega_2 t) + \beta_2 B_2 \cos(\omega_2 t) \end{cases}$$

..$A_i$ e $B_i$ dipendono dalle C.I.

# Sistemi MDOF - non smorzati

Esempio 1

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + kx_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + kx_2 = 0 \end{cases}$$ eq. moto

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos(\omega t - \alpha) \\ x_2 = X_2 \cos(\omega t - \alpha) \end{cases}$$ soluzione di tentativo

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega_i^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega_i^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 2k - \omega_i^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega_i^2 m \end{bmatrix} \right\| = 0$$

determinante matrice rigidezza dinamica

$$\left(2k - \omega_i^2 m\right)\left(2k - \omega_i^2 m\right) - k^2 = 0$$

$$\omega_i^4 m^2 - 4km\omega_i^2 + 3k^2 = 0$$ equazione caratteristica

$$\omega_i^2 = \begin{cases} \dfrac{k}{m} \\ \dfrac{3k}{m} \end{cases} \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

AUTOVALORI

$$\left(2k - \omega_i^2 m\right) X_1 - kX_2 = 0$$

$$\beta_i = \frac{X_2}{X_1} = \frac{2k - \omega_i^2 m}{k} = 2 - \frac{\omega_i^2 m}{k}$$

AUTOVETTORI

# Sistemi MDOF - non smorzati

Esempio 1

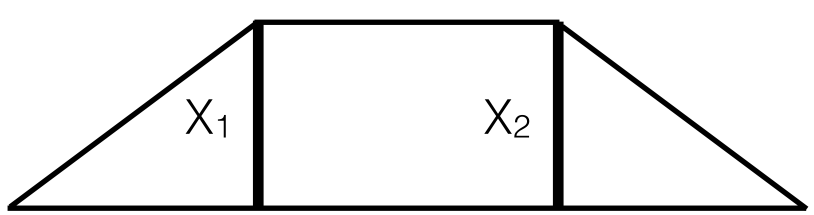
$$\beta_i = \frac{X_2}{X_1} = \frac{2k - \omega_i^2 m}{k} = 2 - \frac{\omega_i^2 m}{k}$$

sostituisco l’autovalore corrispondente…

Autovettore per Autovalore 1

$$\beta_1 = \frac{X_2}{X_1} == 2 - \frac{\frac{k}{m} m}{k} = 2 - 1 = 1$$

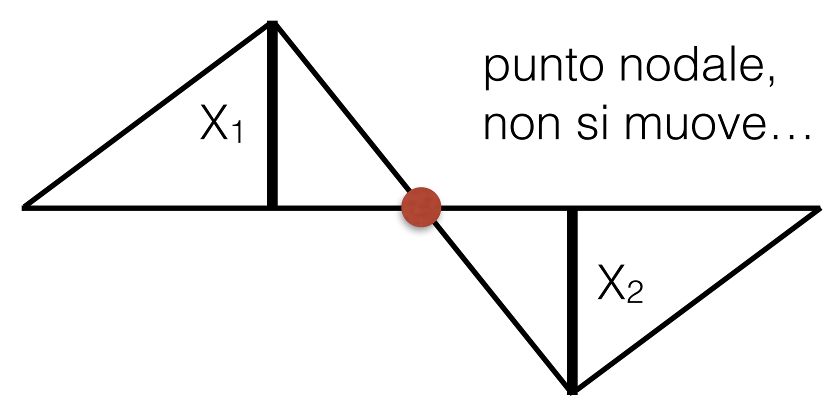
$$X_1 = 1 \rightarrow X_2 = \beta_1 X_1 = 1 * 1 = 1$$




Autovettore per Autovalore 2

$$\beta_2 = \frac{X_2}{X_1} == 2 - \frac{\frac{3k}{m} m}{k} = 2 - 3 = -1$$

$$X_1 = 1 \rightarrow X_2 = \beta_2 X_1 = -1 * 1 = -1$$



# Sistemi MDOF - non smorzati

Esempio 1

Imponendo le condizioni iniziali…

$$\begin{cases} x_1(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \\ x_2(0) = X_0 \end{cases}$$

ricordando che…

$$\begin{cases} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 sen(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 sen(\omega_2 t) \\ x_2 = \beta_1 A_1 \cos(\omega_1 t) + \beta_1 B_1 sen(\omega_1 t) + \beta_2 A_2 \cos(\omega_2 t) + \beta_2 B_2 sen(\omega_2 t) \end{cases}$$

derivando e sostituendo

$$\begin{cases} x_1(0) = A_1 + A_2 = 0 \\ x_2(0) = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 = X_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1(0) = B_1\omega_1 + B_2\omega_2 = 0 \\ \dot{x}_2(0) = \beta_1 B_1\omega_1 + \beta_2 B_2\omega_2 = 0 \end{cases}$$

$$A_1 = \frac{X_0}{2} \qquad A_2 = -\frac{X_0}{2} \qquad B_1 = 0 \qquad B_2 = 0$$

..si determinano i coefficienti e la soluzione…

$$\begin{cases} x_1 = \frac{X_0}{2}\left(\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)\right) \\ x_2 = \frac{X_0}{2}\left(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right) \end{cases}$$




Luigi BREGANT
bregant@units.it

# Sistemi MDOF - non smorzati

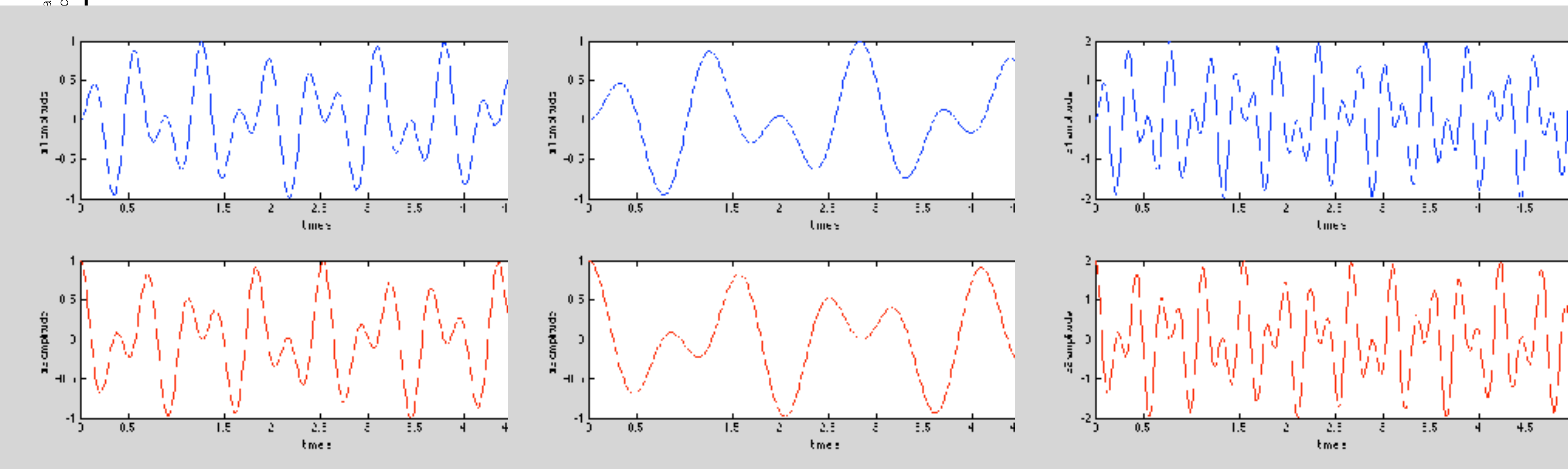
Esempio 1

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{X_0}{2}\left(\cos\left(\omega_1 t\right) - \cos\left(\omega_2 t\right)\right) \\
x_2 = \dfrac{X_0}{2}\left(\cos\left(\omega_1 t\right) + \cos\left(\omega_2 t\right)\right)
\end{cases}
$$

```
m=1; k=100;
om1=sqrt(k/m);
om2=sqrt(3*k/m);
x0=1;
```

```
m=5; k=100;
om1=sqrt(k/m);
om2=sqrt(3*k/m);
x0=1;
```

```
m=3; k=800;
om1=sqrt(k/m);
om2=sqrt(3*k/m);
x0=2;
```



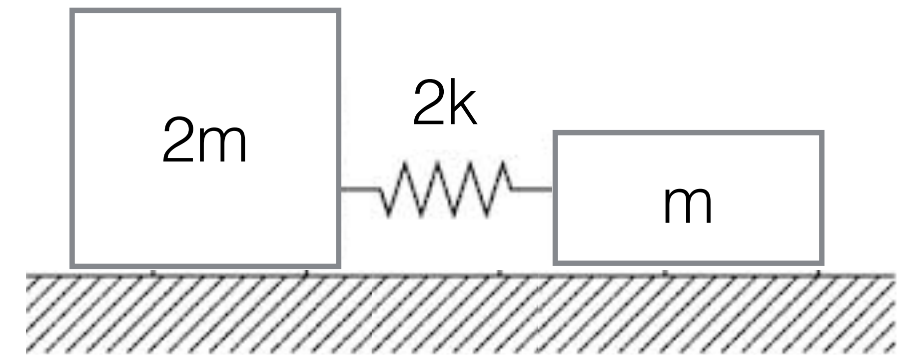




Luigi BREGANT
bregant@units.it

# Sistemi MDOF - non smorzati

Esempio 2



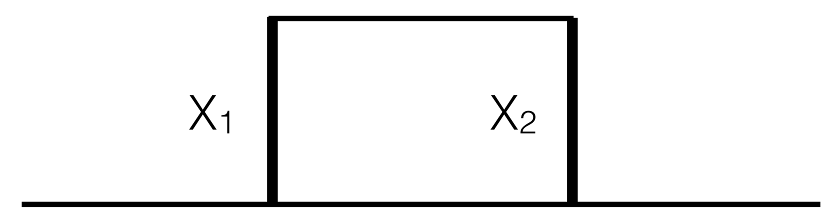

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - 2kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - 2kx_1 + 2kx_2 = 0 \end{cases}$$

..sistema svincolato..

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega_i^2 2m & -2k \\ -2k & 2k - \omega_i^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

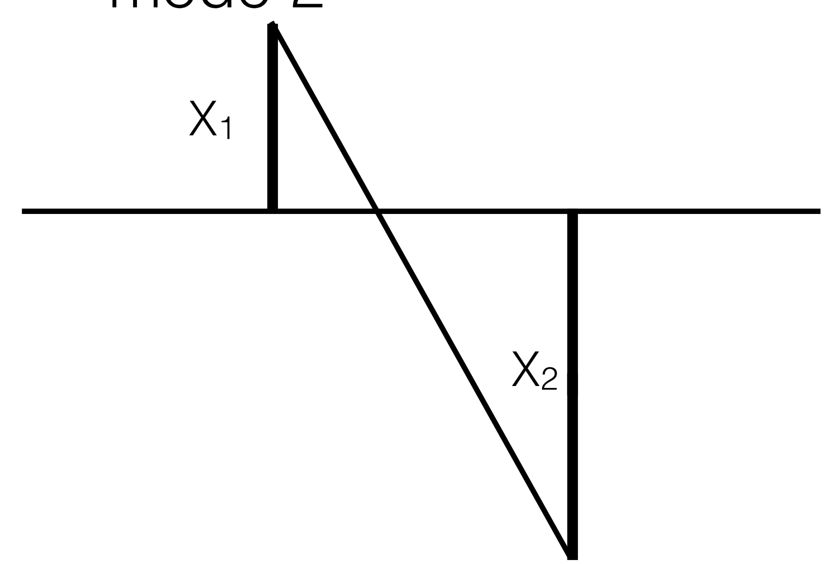
modo 1 ..

non c'è richiamo elastico!




$$\omega_i^2 m\left(2m\omega_i^2 - 6k\right) = 0 \qquad \omega_i^2 = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{3k}{m} \end{cases}$$

modo 2




$$\left(2k - \omega_i^2 2m\right)X_1 - 2kX_2 = 0$$

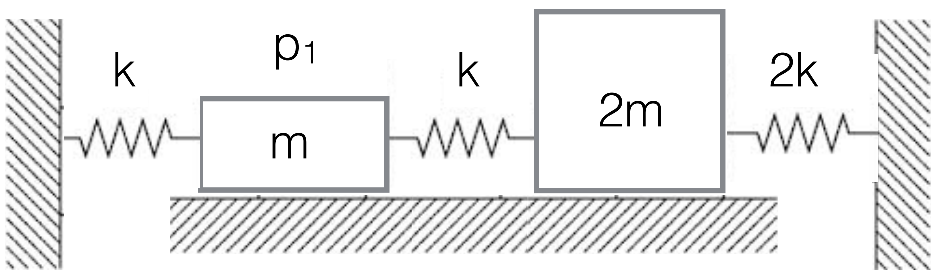
$$\beta_i = \frac{X_2}{X_1} = \frac{2k - 2\omega_i^2 m}{2k} = 1 - \frac{\omega_i^2 m}{k} \qquad \beta_i = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$





Luigi BREGANT
bregant@units.it

# Sistemi MDOF - non smorzati - forzati




$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

$$p_1 = p_o \cos \Omega t$$

$$m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+k\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}\cos \Omega t$$

..con l'usuale soluzione di tentativo..

$$\left[k\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}-\Omega^2 m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

..oppure.. $[A]\{X\}=\{P\}$

..la soluzione.. $\{X\}=[A]^{-1}\{P\}$

$$\begin{bmatrix} 2k-\Omega^2 m & -k \\ -k & 3k-\Omega^2 2m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$




Luigi BREGANT
bregant@units.it

# Sistemi MDOF - non smorzati

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k-\Omega^2 m & -k \\ -k & 3k-\Omega^2 2m \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Δ determinante matrice rigidezza dinamica

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 3k-\Omega^2 2m & k \\ k & 2k-\Omega^2 m \end{bmatrix}}{\Delta} \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

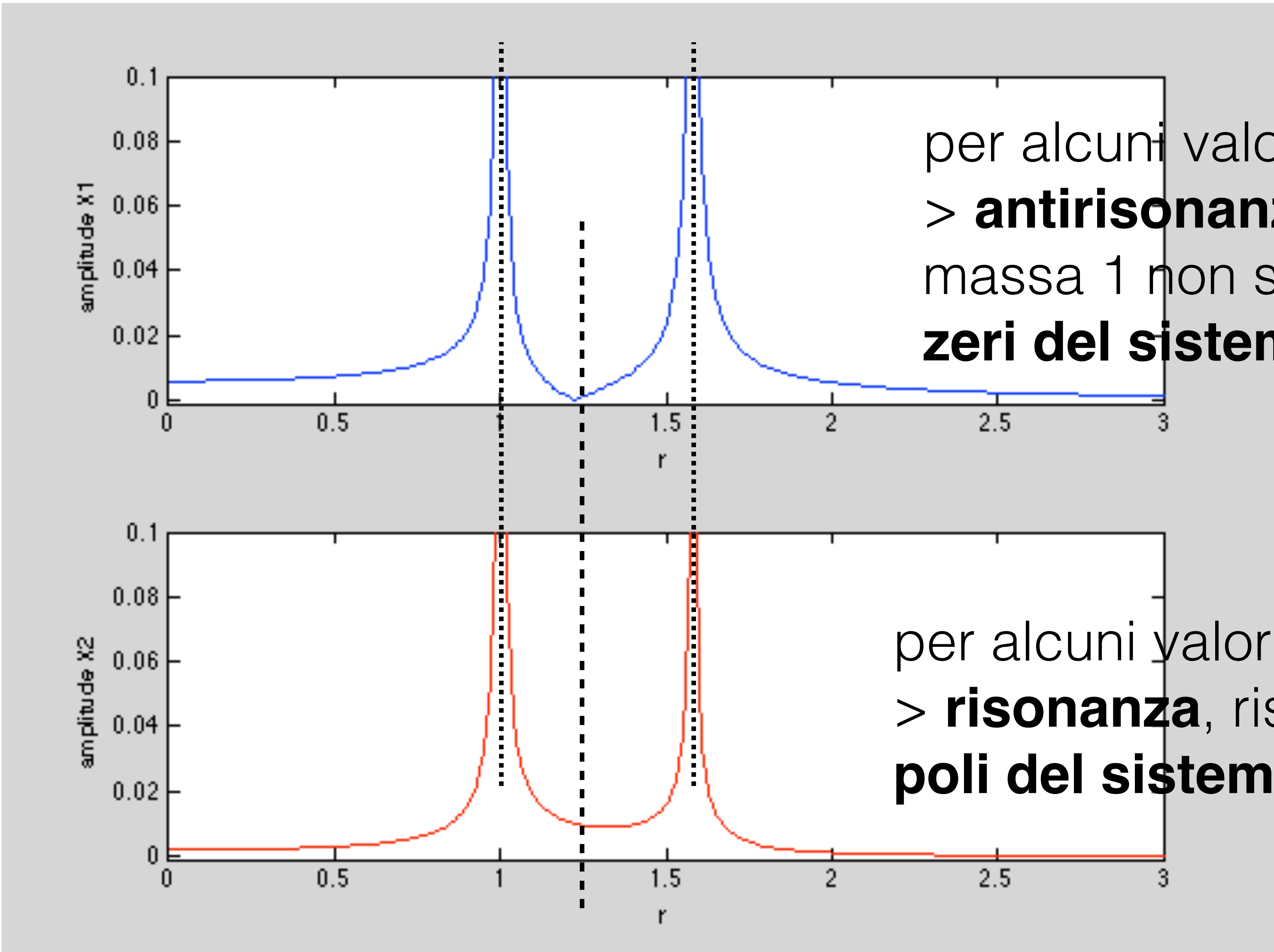
$$\begin{aligned} \Delta &= \left(2k-\Omega^2 m\right)\left(3k-\Omega^2 2m\right)+k^2 \\ &= 2m^2\Omega^4 - 7mk\Omega^2 + 5k^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{\left(3k-\Omega^2 2m\right)p_0}{\Delta} \\ X_2 = \dfrac{kp_0}{\Delta} \end{cases}$$

per specifici valori di Ω, il numeratore va a zero > antirisonanza

per specifici valori di Ω, il denominatore va a zero > risonanza

# Sistemi MDOF - non smorzati



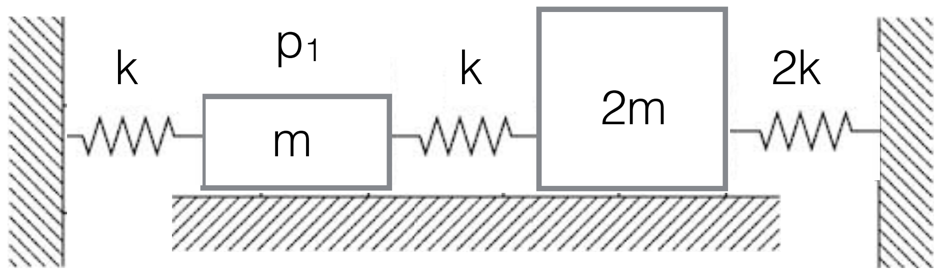

per alcuni valori di Ω, il numeratore va a zero > **antirisonanza**, risposta va a zero, massa 1 non si muove!! anche se c'è $p_1$ **zeri del sistema**

per alcuni valori di Ω, il denominatore va a zero > **risonanza**, risposta va all'infinito (c=0) **poli del sistema**




Luigi BREGANT
bregant@units.it

# Sistemi MDOF - non smorzati - approccio modale




Stesso sistema di prima…

$$m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+k\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}\cos\Omega t$$

trovo gli autovalori (soluzioni equazione caratteristica)… $\omega_i^2=\begin{cases} \dfrac{k}{m} \\ \dfrac{5k}{2m} \end{cases}$

..trovo gli autovettori associati a questi…

$\phi_1=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ $\phi_2=\begin{Bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{Bmatrix}$ ..li assemblo nella matrice modale.. $[\phi]=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$

# Sistemi MDOF - non smorzati

Definisco la seguente trasformazione di coordinate.. $\{x\}=[\phi]\{q\}$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} q_1+q_2 \\ q_1-\frac{1}{2}q_2 \end{Bmatrix}$$

derivo la trasformazione di coordinate e sostituisco nelle eq del moto.. $\{\ddot{x}\}=[\phi]\{\ddot{q}\}$

$$[m][\phi]\{\ddot{q}\}+[k][\phi]\{q\}=\{p\}$$

..premoltiplico tutto per la trasposta della matrice modale.. $[\phi]^T$

$$[\phi]^T[m][\phi]\{\ddot{q}\}+[\phi]^T[k][\phi]\{q\}=[\phi]^T\{p\}$$

..definisco matrice.. $[M]=[\phi]^T[m][\phi]$ $[K]=[\phi]^T[k][\phi]$ $\{P\}=[\phi]^T\{p\}$

Massa modale — Rigidezza modale — Forzante modale





Luigi BREGANT
bregant@units.it

# Sistemi MDOF - non smorzati

$$[M]\{\ddot{q}\}+[K]\{q\}=\{P\}$$

..con il vantaggio che le matrici "modali" sono diagonali!!

$$m\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}=m\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$k\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 15/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} p_0 \\ p_0 \end{Bmatrix}$$

..le equazioni modali sono disaccoppiate!!
come fossero sistemi SDOF!!

$$m\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix}+k\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 15/4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} p_0 \\ p_0 \end{Bmatrix}\cos\Omega t$$

# Sistemi MDOF - non smorzati

$$\begin{cases} 3m\ddot{q}_1 + 3kq_1 = p_0 \cos\Omega t \\ \tfrac{3}{2} m\ddot{q}_2 + \tfrac{15}{4} kq_2 = p_0 \cos\Omega t \end{cases}$$

..le soluzioni per sistemi SDOF sono note!!
…usuale soluzione armonica..

$$q_i = Y_i \cos\Omega t$$

$$\begin{cases} \left(3k - 3m\Omega^2\right) Y_1 = p_0 \\ \left(\tfrac{15}{4} k - \tfrac{3}{2} m\Omega^2\right) Y_2 = p_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = \dfrac{p_0}{\left(3k - 3m\Omega^2\right)} = \dfrac{\tfrac{1}{3} kp_0}{1 - \left(\dfrac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} \\ Y_2 = \dfrac{p_0}{\left(\tfrac{15}{4} k - \tfrac{3}{2} m\Omega^2\right)} = \dfrac{\tfrac{4}{15} kp_0}{1 - \left(\dfrac{2}{5} \dfrac{\Omega}{\omega_2}\right)^2} \end{cases}$$

NB ci sono 2 frequenze naturali, per il modo 1 e per il modo 2

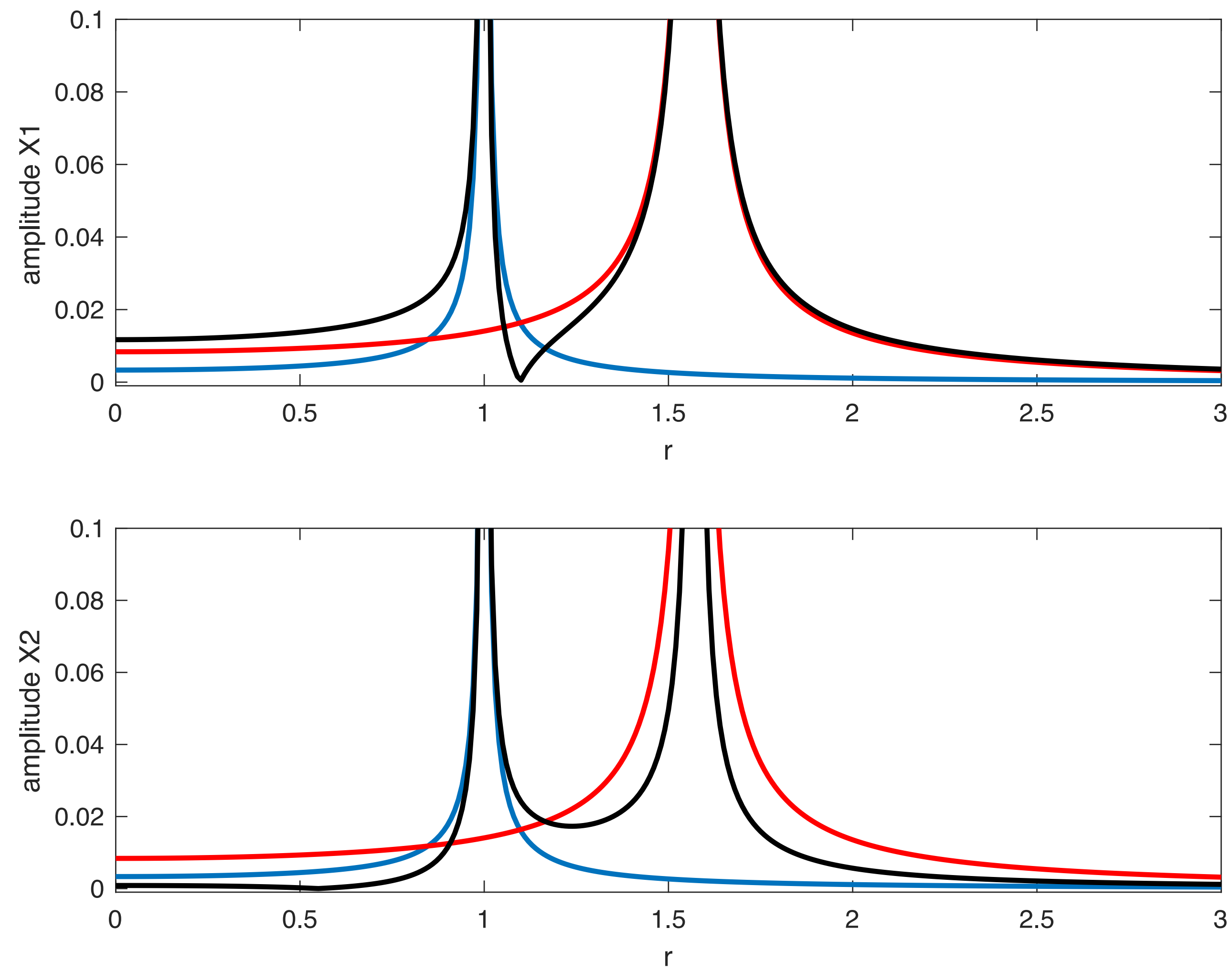
..ricordando la trasformazione modale

$$\{x\} = [\phi]\{q\}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\tfrac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 + q_2 \\ q_1 - \dfrac{1}{2} q_2 \end{Bmatrix}$$

# Sistemi MDOF - non smorzati

$$
\begin{cases}
X_1 = \dfrac{\frac{1}{3}kp_0}{1-\left(\dfrac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} + \dfrac{\frac{4}{15}kp_0}{1-\left(\dfrac{2}{5}\dfrac{\Omega}{\omega_2}\right)^2} \\[2ex]
X_2 = \dfrac{\frac{1}{3}kp_0}{1-\left(\dfrac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\frac{4}{15}kp_0}{1-\left(\dfrac{2}{5}\dfrac{\Omega}{\omega_2}\right)^2}
\end{cases}
$$




..la risposta del sistema è data dalla somma di due contributi
(**due** DOF, **due** frequenze naturali, **due** forme modali…)

# Sistemi MDOF - smorzati

..aggiungiamo un termine generico per tener conto dello smorzamento viscoso..

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

..con l'usuale soluzione armonica..

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos(\Omega t - \alpha) \\ x_2 = X_2 \cos(\Omega t - \alpha) \end{cases}$$

$$[m]\{\ddot{x}\}\Omega^2 \cos\Omega t - [c]\{\dot{x}\}\Omega \sin\Omega t + [k]\{x\}\Omega \cos\Omega t = \{p\}\cos\Omega t$$

..con il termine cosΩt non si può più semplificare..,
utilizziamo un altra soluzione di tentativo… (derivo e sostituisco al solito)

$$\begin{cases} x_1 = X_1 e^{j\omega t} \\ x_2 = X_2 e^{j\omega t} \end{cases}$$

NB si può anche esprimere la forzante con $p = p_0 e^{j\omega t}$





Luigi BREGANT
bregant@units.it

# Sistemi MDOF - smorzati

$$\left[-\omega^2\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22}\end{bmatrix} + j\omega\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

..analogamente al caso non smorzato si costruisce la matrice di rigidezza dinamica e si trova la soluzione invertendo quest'ultima

$$\begin{bmatrix} k_{11} + j\omega c_{11} - \omega^2 m_{11} & k_{12} + j\omega c_{12} - \omega^2 m_{12} \\ k_{21} + j\omega c_{21} - \omega^2 m_{21} & k_{22} + j\omega c_{22} - \omega^2 m_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{X\} = [A]^{-1}\{P\}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} + j\omega c_{11} - \omega^2 m_{11} & k_{12} + j\omega c_{12} - \omega^2 m_{12} \\ k_{21} + j\omega c_{21} - \omega^2 m_{21} & k_{22} + j\omega c_{22} - \omega^2 m_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{21} \\ -Z_{12} & Z_{11}\end{bmatrix}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{21}Z_{12}}$$

$$X_1 = \frac{Z_{22}p_1 - Z_{12}p_2}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \qquad X_2 = \frac{-Z_{21}p_1 + Z_{22}p_2}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$$

# Sistemi MDOF - smorzati

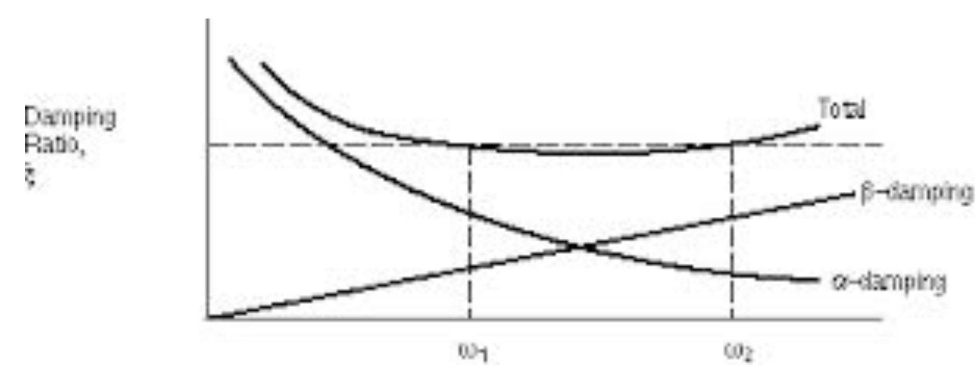
..l'equazione caratteristica del sistema (determinante della matrice di rigidezza dinamica) è complessa… quindi le radici saranno complesse!
(riguardare posizione delle radici nel piano di Laplace !)

..se la matrice di smorzamento è proporzionale alle matrici di massa e rigidezza la trasformazione modale diagonalizza anche la matrice di smorzamento

$$[c]=\alpha[m]+\beta[k]$$

..α e β sono normalmente i parametri richiesti dai codici FEM

$$[C]=[\phi]^T[c][\phi]$$




..in senso esteso, la proporzionalità è tale se per ogni r e s vale la relazione:

$$\left[[m]^{-1}[c]\right]^s\left[[m]^{-1}[k]\right]^r=\left[[m]^{-1}[k]\right]^r\left[[m]^{-1}[c]\right]^s$$

# Sistemi MDOF - smorzati

..se lo smorzamento non è proporzionale (es concentrato in pochi DOF) si opera l'espansione di Duncan-Collar (procedura simile alla rappresentazione Stato Spazio)

..alle eq del sistema, (trasformata di Laplace) aggiungiamo un identità..

$$\left[[m]p^2+[c]p+[k]\right]\{X(p)\}=\{P(p)\}$$

..equazione di ordine N in $p^2$

$$\left[[m]p-[m]p\right]\{X(p)\}=0$$

$$\left[p[A]-[B]\right]\{Y(p)\}=\{F\}$$

..equazione di ordine 2N in p

$$[A]=\begin{bmatrix} 0 & [m] \\ [m] & [c] \end{bmatrix} \qquad [B]=\begin{bmatrix} [m] & 0 \\ 0 & -[k] \end{bmatrix} \qquad \{Y\}=\begin{Bmatrix} p\{X\} \\ X \end{Bmatrix} \qquad \{F\}=\begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{P\} \end{Bmatrix}$$

# Sistemi MDOF - smorzati

$$\left[p[A]-[B]\right]\{Y(p)\}=\{F\}$$

..per avere la soluzione non banale ({Y}=0) si cercano gli autovalori del sistema..

$$\left|\left[p[A]-[B]\right]\right|=0$$

..essendo di ordine 2N ci saranno 2N soluzioni complesse

..quindi 2N autovalori e 2N autovettori, raccolti in due matrici..

$$[\Lambda]=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & .. & .. & .. \\ .. & .. & ... & .. & .. & .. \\ .. & .. & 0 & \lambda_1^* & 0 & .. \\ .. & .. & .. & 0 & \lambda_2^* & 0 \\ 0 & .. & .. & .. & .. & ... \end{bmatrix}$$

$$[\Phi]=\begin{bmatrix} \lambda_1\{\phi_1\} & \lambda_2\{\phi_2\} & .. & \lambda_1^*\{\phi_1^*\} & \lambda_2^*\{\phi_2^*\} & .. \\ \{\phi_1\} & \{\phi_2\} & .. & \{\phi_1^*\} & \{\phi_2^*\} & .. \end{bmatrix}$$

# Sistemi MDOF - smorzati

$$\left[p[A]-[B]\right]\{Y(p)\}=\{F\}$$ ..si può fare una trasformazione di coordinate..

$$\{Y\}=[\Phi]\{Q\}$$

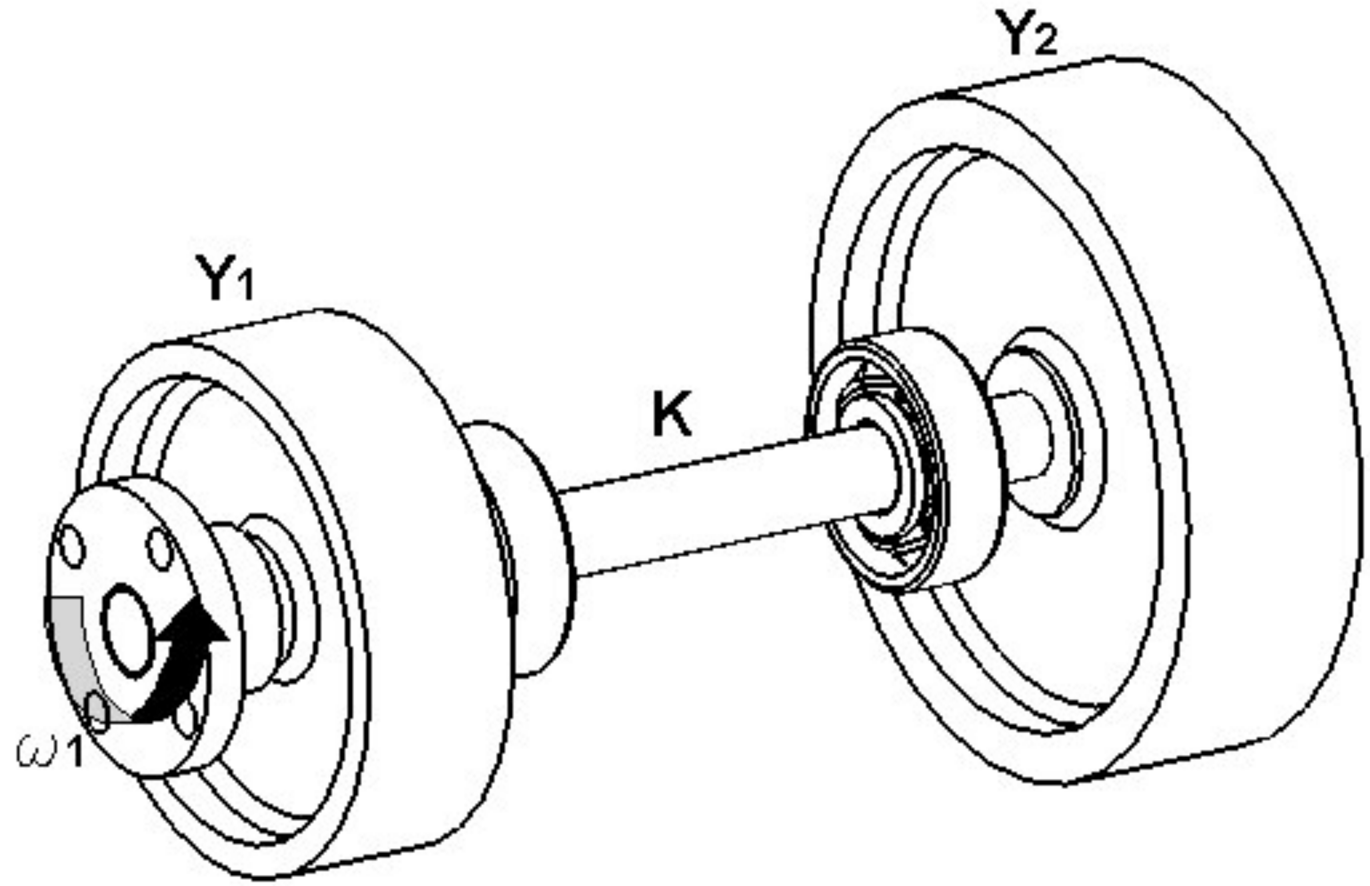
$$\left[p[A][\Phi]-[B][\Phi]\right]\{Q\}=\{F\}$$ ..premoltiplicando tutto per $[\Phi]^T$

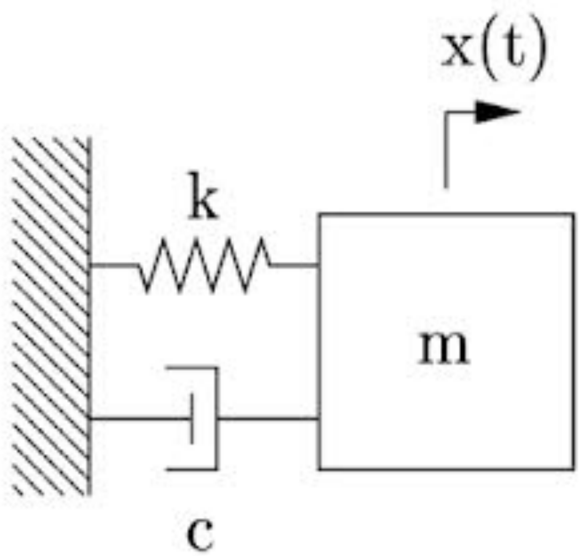
$$\left[p[\Phi]^T[A][\Phi]-[\Phi]^T[B][\Phi]\right]\{Q\}=[\Phi]^T\{F\}$$

$$[a]=[\Phi]^T[A][\Phi]$$ ..modal a..matrice diagonale

$$[b]=[\Phi]^T[B][\Phi]$$ ..modal b..matrice diagonale

..la trasformata disaccoppia il sistema… 2N equazioni..2N sistemi di ordine 1..
soluzione di sistemi a smorzamento non proporzionale..







Luigi BREGANT
bregant@units.it