

Modello a goccia e formula di Weizsäcker

Il modello di nucleo più semplice lo schematizza come una **goccia sferica di liquido**, di volume $V = 4\pi R_0^3/3$, con $A = (Z+N)$ nucleoni uniformemente distribuiti con densità costante e indipendente da A

$$\begin{cases} \rho(r) = 3A/4\pi R_0^3 \equiv \rho_0 & \text{con } r \leq R_0 \\ \rho(r) = 0 & \text{con } r > R_0 \end{cases}$$

e si basa su alcune ipotesi fondamentali:

- l'energia di interazione fra due nucleoni in un nucleo non dipende dal tipo e dal numero di nucleoni presenti nel nucleo;
- l'interazione è attrattiva a breve raggio d'azione r_{int} , come nelle gocce di liquido in cui le molecole hanno interazione dipolo-dipolo;
- per distanze $r \ll r_{\text{int}}$, l'interazione fra i componenti nucleari è fortemente repulsiva;
- l'energia di legame di un nucleo è proporzionale al numero dei suoi nucleoni.

Questo implica la condizione di **saturazione della densità** , per cui ogni nucleone interagisce efficacemente solo con i suoi primi vicini e si ha

$$R_0 = \left(\frac{3A}{4\pi\rho_0} \right)^{1/3} = r_0 A^{1/3}$$

Formulando un modello si cerca di dare forma a un insieme di idee sul come sia fatta e come funzioni una certa struttura fisica e ci si aspetta quindi che il modello, se realistico, permetta di riprodurre i valori sperimentalmente misurati di grandezze che caratterizzano la struttura. Basandosi sul modello a goccia e con un approccio semi-empirico, nel 1928 **von Weizsäcker** formulò un'equazione che ben descrive l'andamento dell'energia media di legame per nucleone $\langle B \rangle \equiv |B/A|$

Analizzando la dipendenza di $|B/A|$ da A e Z egli individuò due distinti contributi all'energia di legame $B(A, Z)$ di un nucleo: uno di volume $B_V(A)$ a carattere *universale* che assicura la debole dipendenza da A e Z di $|B/A|$ per le diverse specie nucleari, e un contributo $B_i(A, Z)$ articolato su caratteristiche specifiche dei vari nuclidi:

- **repulsione elettrostatica** fra gli Z protoni del nucleo che tende a ridurre il legame nucleare;
- **dimensioni finite** del nucleo: i nucleoni delle regioni *periferiche* sono meno legati di quelli localizzati nella regione più centrale;
- **eccesso neutronico** che tende a ridurre il legame nucleare;
- natura **pari** o **dispari** di A e Z , causa delle variazioni di massa e quindi d'energia di legame, osservate nelle sequenze isobariche.

Un limite sostanziale di questo modello va però subito sottolineato ed è dovuto all'approccio misto *classico/quantistico* che conduce alla definizione dei termini dell'equazione di **von Weizsäcker**, che ora vedremo:

- riduzione energia di legame per le dimensioni finite di un nucleo, espressa dal termine **energia di superficie** $B_S(A)$, proporzionale alla sup. $S = 4\pi R_0^2 = 4\pi r_0^2 A^{2/3}$ del nucleo. Ogni nucleone sulla superficie ha minori interazioni leganti con i suoi simili rispetto a nucleoni nell'interno di un nucleo. Si pone $B_S(A) = b_S A^{2/3}$ con b_S costante da determinare.
 $B_S(A)$ spiega come $|B/A|$ sia minore per i nuclei più leggeri, che hanno un maggior rapporto superficie/volume e quindi più nucleoni sulla superficie che nel *core* interno.

- riduzione energia di legame per **repulsione coulombiana** fra protoni, indicata con $B_C(A,Z)$. Si stima considerando una distribuzione, non necessariamente uniforme ma a simmetria sferica, della carica protonica in un nucleo descritta dalla densità di carica $\rho_Z(r)$.

Detta $V_C(r)$ l'energia potenziale elettrostatica di un protone nel campo degli altri $(Z-1)$ protoni del nucleo si ottiene

$$V_C(r) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr'}{r'^2} \int_0^{r'} \rho_{Z-1}(r'') r''^2 dr'' \quad \text{che tende a 0 per } r \rightarrow \infty.$$

Supponendo la densità di carica uniforme nel volume del nucleo e nulla fuori

$$\begin{cases} \rho_Z(r) = 3Ze/4\pi R_0^3 & \text{con } r \leq R_0 \\ \rho_Z(r) = 0 & \text{con } r > R_0 \end{cases}$$

si ha

$$\begin{cases} V_C(r) = \frac{(Z-1)e}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{2R_0} \left(3 - \frac{r^2}{R_0^2} \right) & \text{con } r \leq R_0 \\ V_C(r) = \frac{(Z-1)e}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{con } r > R_0 \end{cases}$$

Dunque:

$$B_C(A, Z) = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R_0} = b_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}$$

- riduzione energia di legame per eccesso neutronico, o **energia di simmetria** $B_{\text{sim}}(A,Z)$. Sperimentalmente, come si vede dalla carta dei nuclidi, al crescere di A il numero di neutroni diventa preponderante ($N/Z > 1$), e ciò in parte compensa l'accrescersi della repulsione coulombiana che seppur più debole dell'interazione nucleare, agendo però a lungo range ridurrebbe troppo l'energia di legame rendendo instabili i nuclei al crescere di A ben prima di quanto non avvenga.

la dipendenza da A e Z di $B_{sim}(A, Z)$ si ottiene intuitivamente considerando che ogni neutrone in eccesso provoca una riduzione di energia di legame per nucleone proporzionale ad $(N-Z)/A$. Il numero totale di neutroni in eccesso è $(N-Z)$, per cui l'effetto complessivo è proporzionale ad $(N-Z)^2/A$, quindi

$$B_{sim}(A, Z) = b_{sim} \frac{(N-Z)^2}{A} = b_{sim} \frac{(A-2Z)^2}{A}$$

b_{sim} si ottiene sperimentalmente.

Il motivo per cui il termine $B_{sim}(A, Z)$ contribuisce a ridurre $|B/A|$, nonostante l'aumento di N/Z al crescere di A favorisca la stabilità dei nuclei più pesanti, è legato al principio d'esclusione, considerando che i nucleoni nel nucleo occupano livelli energetici caratteristici per i protoni e per i neutroni.

- studio sistematico di masse nucleari mostra che i nuclei sono più stabili quando hanno un numero pari di p e/o di n . Lo si interpreta come accoppiamento a doppietti sia dei p che dei n , a seconda di come si accoppiano i loro momenti orbitali e di spin a formare il mom. ang. tot. J di un nucleo. Empiricamente si pone $B_{ac}(A, Z) = b_{ac} \frac{\delta(A, Z)}{A}$ e dall'analisi delle sequenze isobariche si deduce $\delta(A, Z) = -1$ se N e Z sono entrambi pari, $\delta(A, Z) = 0$ se N e Z sono l'uno pari e l'altro dispari, o viceversa, e $\delta(A, Z) = +1$ se N e Z sono entrambi dispari
- c'è infine l'unico termine veramente legante, quello di volume che si esprime come funzione lineare del numero di massa A , per tener conto della debole dipendenza da A di $|B/A|$ osservata per $A > 12$: $B_V(A) = b_V A$

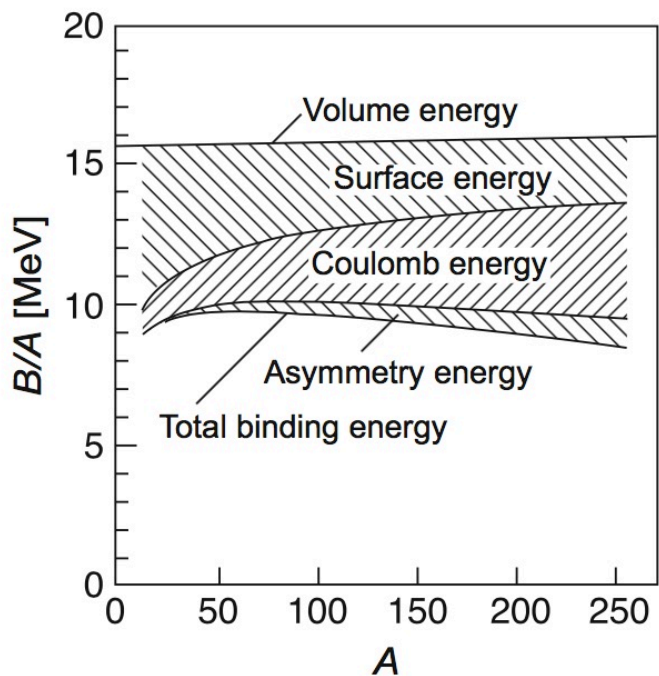
Quindi si ha, per l'energia di legame dei nuclei atomici:

$$B_0(A, Z) = B_V(A) + B_S(A) + B_C(A, Z) + B_{sim}(A, Z) + B_{ac}(A, Z) =$$

$$= b_V A + b_S A^{2/3} + b_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + b_{sim} \frac{(A-2Z)^2}{A} + b_{ac} \frac{\delta(A, Z)}{A}$$

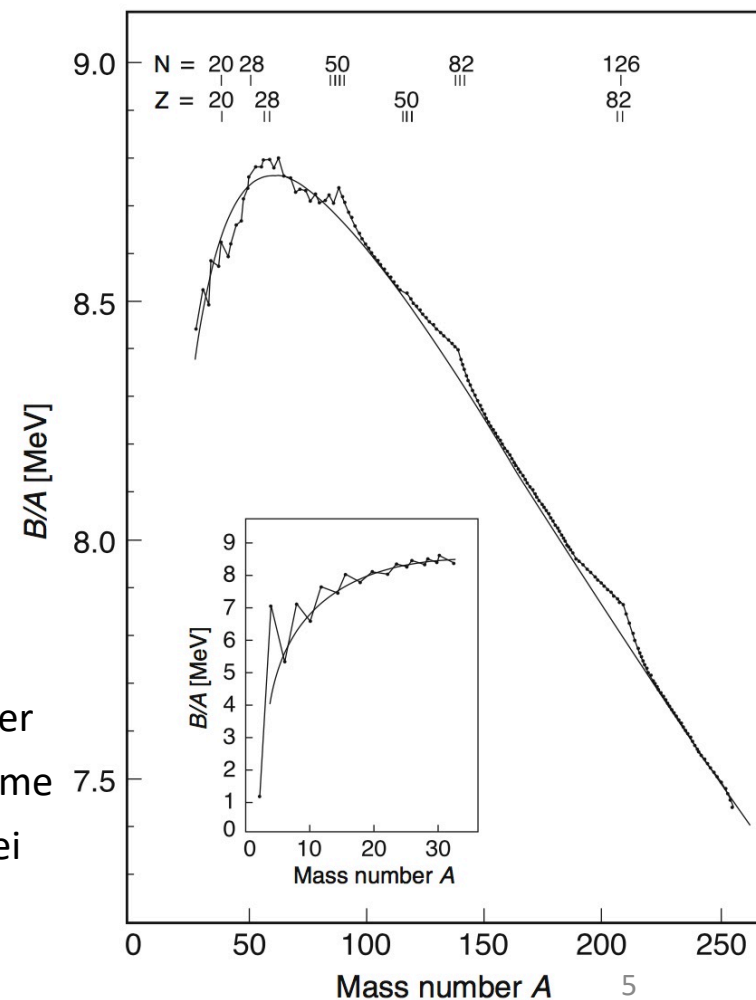
e un best-fit sui dati sperimentali da', per i parametri

$$\begin{cases} b_V = -15.56 & \text{MeV} \\ b_S = +17.23 & \text{MeV} \\ b_C = +0.697 & \text{MeV} \\ b_{sim} = +19.1 & \text{MeV} \\ b_{ac} = +135.0 & \text{MeV} \end{cases}$$



Contributo termini formula Weizsäcker all'energia media di legame di nucleone in un nucleo, in funzione di **A**.

Fit con la formula di Weizsäcker sui valori delle energie di legame medie per nucleone, dei nuclei con valore pari di A



La formula semi-empirica di Weizsäcker permette anche di ritrovare l'andamento parabolico in funzione della massa, osservato per i punti rappresentativi dei nuclidi delle varie sequenze isobariche.

Per chiarire importanza e utilità della formula di Weizsäcker bisogna anche sottolinearne i limiti che contribuiscono a definirne gli effettivi ambiti di applicabilità.

- Si è considerato il nucleo come sostanzialmente **sferico**, trascurando quindi termini non nulli di quadrupolo elettrico che si osservano per svariati nuclei.
- Risultati sulla saturazione della forza di coesione fra i nucleoni in un nucleo e alla loro repulsione a breve range, mostrano che non basta tener conto del principio di esclusione di Pauli come fatto.
- Le considerazioni sul ruolo che momento angolare orbitale e spin dei nucleoni hanno sul carattere repulsivo della forza, sono puramente qualitative e semiclassiche.
- Si osservi poi che il filo conduttore seguito consiste nell'assimilare il nucleo atomico a una specie di *goccia di liquido*, ma le predizioni che ne conseguirebbero per descrivere moti collettivi rotazionali e/o vibrazionali non coprono la panoramica dei fenomeni osservati, o comunque non li descrivono in modo completo e soddisfacente.

L'approccio è comunque utile nel descrivere la stabilità dei nuclei rispetto al decadimento α , alla **fissione** e al decadimento β .

Struttura dei nuclei e modello a gas di Fermi

Un nucleo nel proprio stato fondamentale o leggermente eccitato può essere visto come un esempio di **gas di Fermi degenere**.

La densità di materia nel nucleo dipende dalle interazioni fra nucleoni che sulla scala del fm sono caratterizzate da una forte repulsione a brevi distanze e da una relativamente blanda attrazione fra nucleoni non troppo vicini.

I nucleoni non vanno naturalmente pensati come localizzati in posizioni più o meno definite all'interno di un nucleo, ma piuttosto come in movimento continuo entro il volume del nucleo **con un impulso medio corrispondente dell'ordine di 250 MeV/c**.

La mobilità dei nucleoni nel nucleo dipende della citata "debolezza" dei legami fra i nucleoni in uno stesso nucleo.

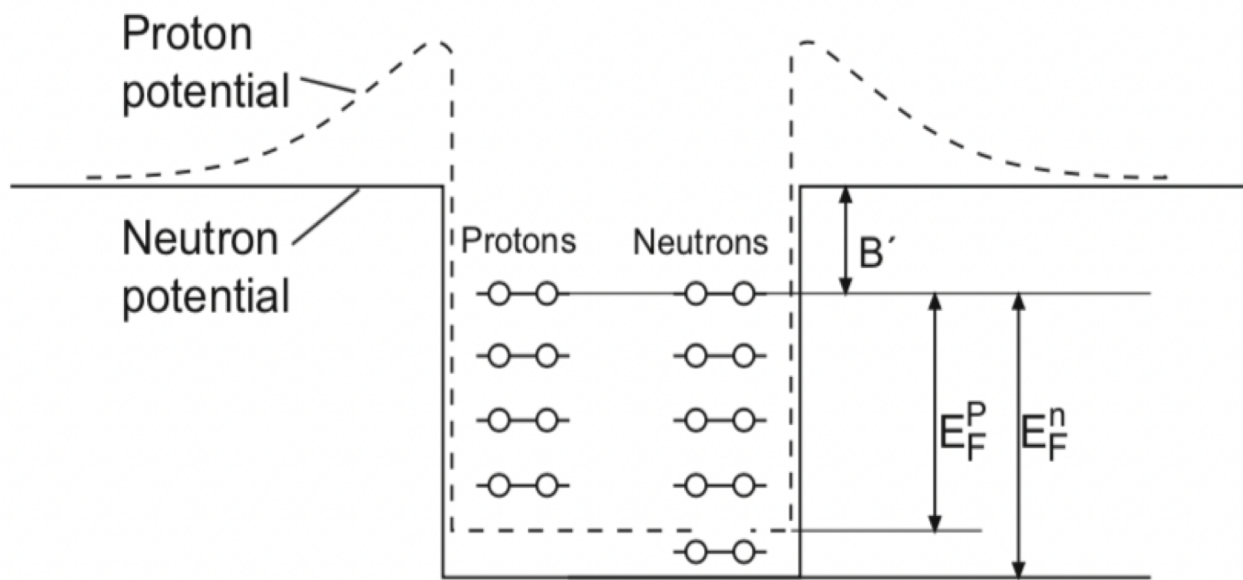
Che i nucleoni di un nucleo si muovano come se fossero quasi liberi al suo interno non è immediatamente ovvio, e per capirlo si può far riferimento ai cosiddetti **ipernuclei**, nuclei che fra i loro componenti annoverano un **iperone** in sostituzione di un **nucleone**.

Degli **iperoni** si dirà qualcosa più avanti, per ora teniamo presente che quelli cui si fa riferimento differiscono da protoni e neutroni per la loro composizione in «*quark*», e sentendo la forza forte uno di loro può sostituirsi ad un nucleone in un nucleo.

La sua diversa «identità» rispetto ai nucleoni permette di studiarne il comportamento in un nucleo e constatare che vi si muove come una particella sostanzialmente "libera", entro una buca di potenziale la cui profondità è praticamente indipendente dal particolare nucleo considerato, se **A** non è troppo piccolo, e di ampiezza pari al suo raggio.

Un miglioramento rispetto al modello a gas di Fermi è ottenuto col modello a **shell**, che cerca di dare una forma realistica alla buca di potenziale e tiene conto del contributo di spin-orbita.

L'interazione fra i nucleoni in un nucleo è responsabile, oltre che della loro densità, anche della forma assunta dal nucleo nel suo stato fondamentale, e tale forma non è necessariamente sempre quella sferica.



Il modello a gas di Fermi per i nuclei rende conto delle distribuzioni in impulso trovate per le interazioni quasi elastiche fra elettroni e nuclei, dei valori delle energie di legame fra nucleoni e anche dei termini principali della formula semi-empirica di massa di Weizsäcker. Esso considera i protoni e i neutroni di uno stesso nucleo come due sistemi indipendenti di nucleoni, fermioni di spin $1/2$ che nel rispetto del principio d'esclusione di Pauli, si muovono per il resto liberamente nell'intero volume del nucleo.

Il potenziale percepito da ogni nucleone è la sovrapposizione dei potenziali dovuti a tutti i restanti nucleoni del nucleo.

In modo semplificato si suppone che il potenziale abbia forma di buca rettangolare che per i protoni tiene anche conto del contributo coulombiano, come schematizzato in figura.

Nello stato fondamentale, caratterizzato da temperatura zero, i livelli a più basse energie sono tutti occupati fino ad un valore massimo di impulso indicato con p_F e detto **impulso di Fermi** che risulta pari a $\simeq 250 \text{ MeV}/c$.

L'energia del livello occupato più alto, corrisponde all'energia di Fermi $E_F = \frac{p_F^2}{2M} \simeq 33 \text{ MeV}$, con M massa del nucleone.

Detta B' la differenza fra il massimo valore della buca e il livello di Fermi, si trova che è costante per la gran parte dei nuclei e corrisponde all'energia media di legame per nucleone $|B/A| = 7 \div 8 \text{ MeV}$.

La profondità V_0 della buca di potenziale e l'energia di Fermi sono in larga misura indipendenti dal numero di massa A

$$V_0 = E_F + B' \simeq 40 \text{ MeV}$$

Similmente a un gas di elettroni liberi in un conduttore metallico, l'energia cinetica media del gas di nucleoni nella «*materia nucleare*» è confrontabile con la profondità della buca di potenziale, ulteriore evidenza che un nucleo è una struttura non troppo fortemente legata.

Momenti elettrici e magnetici dei nuclei (1)

Le interazioni elettromagnetiche fra nuclei, più che quelle forti, hanno dato la maggior quantità di informazioni sulla struttura dei nuclei. La forza nucleare determina distribuzione e moto dei nucleoni nei nuclei e utilizzando interazioni elettromagnetiche per sondarli, si producono effetti più deboli dell'ambiente "nucleare" circostante, con una discreta garanzia di non distorcere significativamente le caratteristiche di quanto si sta misurando.

Ogni distribuzione di cariche o correnti è sorgente di campi elettrici e magnetici le cui forma e intensità dipendono anche dalla distanza dalla sorgente. Abitualmente si associano alle distribuzioni di cariche e correnti dei "momenti di multipolo" per ogni specifica distribuzione spaziale: la proporzionalità $1/r^2$ del campo elettrico viene dalla carica totale della sorgente e gli si assegna il momento d'ordine zero o "**monopolo**"; la proporzionalità $1/r^3$ deriva dal momento d'ordine uno o "**dipolo**"; la proporzionalità $1/r^4$ deriva dal momento d'ordine due o "**quadrupolo**", e così via.


Per i momenti magnetici le cose sono simili con l'eccezione del momento d'ordine zero, il **monopolo magnetico**, che sembra non esistere, e quindi non vi sono contributi di momento magnetico proporzionali a $1/r$.

I momenti di multipolo elettrici e magnetici di un nucleo, tenendo conto delle caratteristiche strettamente quantistiche di quest'ultimo, vanno ovviamente considerati e trattati come delle osservabili per le quali si possono calcolare i valori d'aspettazione associati ai diversi stati di un nucleo.

Questi valori d'aspettazione dovranno essere poi direttamente confrontabili con i valori sperimentali misurati.

Classicamente distribuzione di carica a simmetria sferica genera solo il campo monopolare coulombiano e i multipoli d'ordine superiore sono tutti nulli.

Una corrente che si sviluppi su un percorso piano-circolare genera solo un campo magnetico dipolare.

Ragionevole pensare che i nucleoni si aggregino a formare il nucleo in un modo che se non eccitato, nel rispetto dell'interazione nucleare, tende a una forma la più simmetrica possibile, prossima a quella sferica  in molti casi basta misurare e calcolare solo i multipoli d'ordine più basso per caratterizzare le proprietà elettromagnetiche di un nucleo.

Si immagina che le proprietà multipolari d'ordine superiore di un nucleo siano dovute alla presenza di nucleoni spaiati.

Un ulteriore vincolo all'insorgere di momenti di multipolo viene dalle proprietà di simmetria e parità degli stati nucleari.

Ogni momento di multipolo e. m. ha una definita parità, data dal comportamento dell'operatore associato quando si considera la trasformazione $r \rightarrow -r$.

Il valore d'aspettazione di un operatore "momento di multipolo" O , si calcola con un integrale del tipo $\int \psi^*(\vec{r}) O \psi(\vec{r}) d^3r$

Se le forze conservano la parità, in un sistema descritto da una funz. d'onda ψ non degenera la sua parità è ininfluente e si ha che $\psi^*\psi = |\psi|^2$ è pari.

Se O è un operatore dispari allora tutto l'integrando è dispari e l'integrale si annulla, quindi ***in un nucleo tutti i momenti di multipolo statico con parità dispari devono essere nulli***.

L'evidenza sperimentale dell'assenza di momenti di dipolo elettrici per i nuclei, dice che le forze nucleari conservano la parità.