

largamente compensata dagli importanti chiarimenti forniti dalla modellistica nucleare nell'analisi e interpretazione dei risultati sperimentali: i modelli nucleari, anche se spesso fra loro contraddittori e mutuamente inconciliabili, si completano parzialmente a vicenda e forniscono premesse per una possibile sintesi delle conoscenze acquisite che dovrebbe basarsi sull'opportuna applicazione delle interazioni fondamentali fra quark.

Ogni modello nucleare si fonda su una più o meno accentuata idealizzazione della realtà allo scopo di individuare, in uno schema teorico semplificato, gli elementi fisici essenziali per interpretare una certa classe di risultati sperimentali. La schematizzazione da cui trae origine il modello implica inevitabilmente la ricerca di un opportuno compromesso fra l'esigenza del rigore matematico e la realistica opportunità di procedere a semplificazioni, anche drastiche, quando fisicamente giustificabili.

Il più semplice modello di nucleo atomico lo schematizza come una *goccia sferica* di liquido, di volume $V = \frac{4}{3}\pi R_0^3$, nella quale gli $A = (Z + N)$ nucleoni sono uniformemente distribuiti con densità¹⁶ costante e indipendente da A

$$\begin{cases} \rho(r) = 3A/4\pi R_0^3 \equiv \rho_0 & \text{con } r \leq R_0 \\ \rho(r) = 0 & \text{con } r > R_0 \end{cases} \quad (4.42)$$

Le ipotesi alla base di tale modello di nucleo sono sostanzialmente che

- l'energia di interazione fra due nucleoni non dipende dal tipo e dal numero di nucleoni;
- l'interazione è attrattiva con un breve raggio d'azione r_{int} , così come nelle gocce di liquido in cui le molecole hanno interazione dipolo-dipolo;
- per distanze $r \ll r_{int}$, l'interazione fra i componenti nucleari è fortemente repulsiva;
- l'energia di legame di un nucleo è proporzionale al numero dei suoi nucleoni.

Queste ipotesi implicano la cosiddetta condizione di *saturazione della densità* , per cui ogni nucleone interagisce efficacemente solo con i suoi primi vicini e si ha

$$R_0 = \left(\frac{3A}{4\pi\rho_0} \right)^{1/3} = r_0 A^{1/3} \quad (4.43)$$

Basandosi sul modello a goccia e con un approccio semi-empirico, nel 1928 von Weizsäcker formulò un'equazione che ben descrive l'andamento dell'energia media di legame per nucleone $\langle B \rangle \equiv |B/A|$, illustrato in figura 4.5.

L'equazione di von Weizsäcker aveva dunque come obiettivo di interpretare l'osservata dipendenza dell'energia di legame $B(A, Z)$ di un nucleo atomico dai numeri A e Z .

Esaminando la dipendenza dell'energia media di legame per nucleone $|B/A|$ da A e Z si individuano due distinti contributi all'energia di legame $B(A, Z)$

¹⁶Si ricordi che la densità nucleare media è pari a $\rho_0 \simeq 0.17$ nucleoni/fm³.

di un nucleo: un contributo di volume $B_V(A)$ che ha carattere *universale* e assicura la debole dipendenza da A e Z di $|B/A|$ per le diverse specie nucleari, e un contributo $B_i(A, Z)$ articolato su caratteristiche specifiche dei vari nuclidi, cioè

- la **repulsione elettrostatica** fra gli Z protoni del nucleo che tende a ridurre il legame nucleare;
- le **dimensioni finite** del nucleo, per cui i nucleoni delle regioni *periferiche* sono meno legati di quelli localizzati nella regione più centrale;
- l'**eccesso neutronico** che tende anche a ridurre il legame nucleare;
- la natura **pari o dispari** di A e Z , responsabile delle variazioni di massa e quindi di energia di legame, osservate nelle sequenze isobariche.

La dipendenza da A e Z delle prime due caratteristiche indicate si ottiene sulla base di elementari considerazioni classiche. Questo è il modo in cui nel modello si tien conto di alcune prescrizioni quantistiche, costituiscono uno dei limiti sostanziali di tale approccio, al di là del suo importante ruolo nell'interpretazione di molta fenomenologia nucleare e nell'utilizzazione pratica.

- La riduzione dell'energia di legame dovuta alle dimensioni finite di un nucleo, espressa dalla cosiddetta *energia di superficie* $B_S(A)$, è proporzionale alla superficie $S = 4\pi R_0^2 = 4\pi r_0^2 A^{2/3}$ del nucleo stesso. Ciò è intuibile tenendo conto del fatto che ogni nucleone sulla superficie, proprio per motivi geometrici, ha minori interazioni leganti con i suoi simili rispetto ad un nucleone nell'interno di un nucleo. Si pone quindi

$$B_S(A) = b_S A^{2/3} \quad (4.44)$$

con b_S costante da determinare.

Questo termine spiega perchè l'energia media di legame per nucleone $|B/A|$ sia minore per i nuclei più leggeri, che hanno un maggior rapporto superficie/volume e quindi relativamente più nucleoni sulla superficie che nel *core* interno.

- La riduzione dell'energia di legame dovuta alla repulsione coulombiana fra i protoni è indicata col termine $B_C(A, Z)$. La si può stimare considerando una distribuzione, non necessariamente uniforme ma di simmetria sferica, della carica protonica in un nucleo descritta dalla densità di carica $\rho_Z(r)$. Detta $V_C(r)$ l'energia potenziale elettrostatica di un protone nel campo elettrico degli altri $(Z - 1)$ protoni del

nucleo, applicando il teorema di Gauss si ha, detto $\Phi(E_{r'})$ il flusso della componente radiale $E_{r'}$ del campo elettrico attraverso la superficie $S(r') = 4\pi r'^2$

$$E_{r'} = \frac{Q(r')}{4\pi\epsilon_0 r'^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \int_0^{r'} 4\pi\rho_{Z-1}(r'')r''^2 dr'' \quad (4.45)$$

con $Q(r')$ la carica elettrica racchiusa nel volume sferico di raggio r' . Per la conservatività del campo elettrostatico si ha $E_{r'} = -dV_C(r')/dr'$, da cui:

$$V_C(r) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr'}{r'^2} \int_0^{r'} \rho_{Z-1}(r'')r''^2 dr'' \quad (4.46)$$

Si ricordi che $V_C(r) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow \infty$.

L'energia potenziale elettrostatica (coulombiana) del nucleo è

$$B_C = \frac{1}{2} \int \rho_Z(r)V_C(r)d^3r \quad (4.47)$$

Supponendo ora che la densità di carica sia uniforme entro il volume del nucleo e nulla fuori

$$\begin{cases} \rho_Z(r) = 3Ze/4\pi R_0^3 & \text{con } r \leq R_0 \\ \rho_Z(r) = 0 & \text{con } r > R_0 \end{cases} \quad (4.48)$$

si ha:

$$\begin{cases} V_C(r) = \frac{(Z-1)e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R_0} \left(3 - \frac{r^2}{R_0^2}\right) & \text{con } r \leq R_0 \\ V_C(r) = \frac{(Z-1)e}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{con } r > R_0 \end{cases} \quad (4.49)$$

In base alle 4.48 e 4.49, la 4.47 diventa:

$$B_C(A, Z) = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R_0} = b_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \quad (4.50)$$

con $b_C = (3e^2)/(20\pi\epsilon_0 r_0)$.

La dipendenza da A e Z trovata per l'energia coulombiana vale anche se la carica elettrica non è uniformemente distribuita nel volume nucleare, purchè sia a simmetria sferica, in tal caso sarà il valore di b_C a cambiare.

Allo stesso risultato si poteva arrivare ricordando, come ottenuto con la 4.40 che l'energia potenziale elettrostatica di una distribuzione sferica di raggio R_0 e simmetrica di carica Ze vale

$$\frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R_0}$$

ma che al tempo stesso, perchè ci sia repulsione fra cariche, bisogna che ce ne siano almeno due, quindi per $Z = 1$ il termine di potenziale che "indebolisce" l'energia di legame di un nucleo deve annullarsi, e ciò si ottiene sostituendo $Z(Z - 1)$ a Z^2 .

- La riduzione dell'energia di legame dovuta all'eccesso neutronico è espressa dalla cosiddetta *energia di simmetria* $B_{sim}(A, Z)$. Sperimentalmente si osserva che mentre per nuclei con bassi valori di A si tende ad avere una condizione per cui $N \cong Z$, al crescere di A il numero di neutroni diventa preponderante ($N/Z > 1$), e ciò in parte compensa l'accrescersi della repulsione coulombiana che seppur più debole dell'interazione nucleare, agendo però a lungo range ridurrebbe troppo l'energia di legame rendendo instabili i nuclei al crescere di A ben prima di quanto non avvenga. La dipendenza da A e Z di $B_{sim}(A, Z)$ può essere intuitivamente ottenuta considerando che ogni neutrone in eccesso provoca una riduzione di energia di legame per nucleone proporzionale a $(N - Z)/A$. Siccome il numero totale di neutroni in eccesso è $(N - Z)$, l'effetto complessivo è proporzionale ad $(N - Z)^2/A$, da cui

$$B_{sim}(A, Z) = b_{sim} \frac{(N - Z)^2}{A} = b_{sim} \frac{(A - 2Z)^2}{A} \quad (4.51)$$

La costante di proporzionalità b_{sim} si ottiene sperimentalmente.

Il perchè il termine $B_{sim}(A, Z)$ contribuisca a ridurre $|B/A|$, nonostante l'aumento di N/Z al crescere di A favorisca la stabilità dei nuclei più pesanti, può essere intuito pensando al principio d'esclusione secondo il quale uno stesso stato quantico non può essere occupato da più di due fermioni. Tenendo conto del fatto che ad ogni fissato livello energetico di stato legato c'è un numero finito di stati quantici disponibili, si ha che aggiungendo nucleoni a un nucleo essi si posizioneranno su livelli a energie sempre più alte; ciò però determina l'aumento dell'energia totale del nucleo portando di conseguenza a una diminuzione della sua energia di legame.

Come si vedrà più avanti, trattando del modello nucleare a gas di Fermi, protoni e neutroni occupano nel nucleo due diversi gruppi di livelli energetici pressochè paralleli e se un nucleo contiene più neutroni che protoni, vi sarà per esso un certo numero di neutroni su livelli a energie superiori rispetto ai protoni.

Immaginando di poter trasformare metà dei neutroni in eccesso in protoni e sistemandoli quindi sui relativi livelli, riequilibrando così i numeri di protoni e neutroni di quel nucleo, si otterrebbe una riduzione della sua energia, e quindi una maggior energia di legame. È dunque sostanzialmente lo squilibrio fra i numeri dei due tipi di nucleoni che genera il termine d'asimmetria.

- Lo studio sistematico delle masse nucleari mostra che i nuclei sono più stabili quando posseggono un numero pari di protoni e/o di neutroni. Questo viene interpretato come un accoppiamento a doppietti sia dei protoni che dei neutroni, in funzione di come si accoppiano i loro momenti orbitali e di spin a formare il momento angolare totale J di un nucleo. Empiricamente si tiene conto di ciò ponendo

$$B_{ac}(A, Z) = b_{ac} \frac{\delta(A, Z)}{A} \quad (4.52)$$

L'analisi fenomenologica delle sequenze isobariche suggerisce di porre $\delta(A, Z) = -1$ se N e Z sono entrambi pari, $\delta(A, Z) = 0$ se N e Z sono l'uno pari e l'altro dispari, o viceversa, e $\delta(A, Z) = +1$ se N e Z sono entrambi dispari. Per tener conto di ciò si può anche scrivere

$$B_{ac}(A, Z) = -b_{ac} \frac{(-1)^N + (-1)^Z}{2A} \quad (4.53)$$

Tornando ora al termine dell'energia di volume $B_V(A)$, lo si esprime come una funzione lineare del numero di massa A

$$B_V(A) = b_V A \quad (4.54)$$

cosicchè il contributo di volume dell'energia media per nucleone, $b_V = B_V(A)/A$, risultando indipendente da A , rappresenti l'indispensabile termine costante dell'energia media di legame, senza il quale la debole dipendenza da A (per $A \geq 12$) osservata per $b(A, Z)$ non sarebbe giustificabile.

Si ottiene quindi, per l'energia di legame dei nuclei atomici, la seguente formula semi-empirica:

$$\begin{aligned} B_0(A, Z) &= B_V(A) + B_S(A) + B_C(A, Z) + B_{sim}(A, Z) + B_{ac}(A, Z) = \\ &= b_V A + b_S A^{2/3} + b_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + b_{sim} \frac{(A-2Z)^2}{A} + b_{ac} \frac{\delta(A, Z)}{A} \end{aligned} \quad (4.55)$$

Un best-fit con questa relazione sui dati sperimentali permette di ottenere i valori dei cinque parametri b_V , b_S , b_C , b_{sim} e b_{ac} . Qui di seguito sono riportati i valori di uno di tali best-fit:

$$\begin{cases} b_V = -15.56 & \text{MeV} \\ b_S = +17.23 & \text{MeV} \\ b_C = +0.697 & \text{MeV} \\ b_{sim} = +19.1 & \text{MeV} \\ b_{ac} = +135.0 & \text{MeV} \end{cases} \quad (4.56)$$

Per le masse nucleari si ottiene quindi, partendo dalla 4.9,

$$M(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n + \frac{B_0(A, Z)}{c^2} \quad (4.57)$$

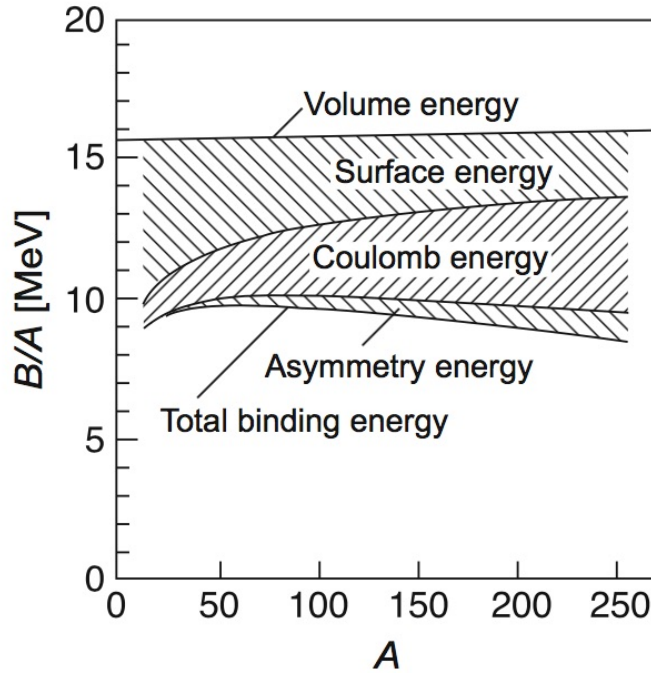


Figura 4.15: Illustrazione del contributo dei vari termini della formula di Weizsäcker all'energia media di legame per un nucleone in un nucleo, in funzione del numero di massa A .

L'attendibilità media dei risultati forniti dalla 4.57 è di circa 2 MeV, tranne che in corrispondenza ai valori di A e Z per i quali si fanno sentire forti effetti di *chiusura degli strati*.

In figura 4.15 è illustrata l'entità dei diversi contributi all'energia media di legame per un nucleone in un nucleo presenti nella 4.55; in figura 4.16 è riportato il risultato di un fit, sempre utilizzando la formula di Weizsäcker 4.55, sull'insieme dei valori delle energie di legame medie per nucleone. Si veda ora che se nella 4.57 si pone

$$\begin{cases} \alpha = b_C A^{-1/3} + 4b_{sim} A^{-1} \\ \beta = b_C A^{-1/3} + 4b_{sim} + m_n - m_p \\ \gamma = b_V + b_S A^{-1/3} + b_{sim} + m_n \end{cases} \quad (4.58)$$

essa diventa

$$M(A, Z) = \alpha Z^2 - \beta Z + \gamma A + b_{ac} \frac{\delta(A, Z)}{A} \quad (4.59)$$

esprimendo la massa dei nuclei come una funzione quadratica di Z , per valori fissati di A . Con valori dispari di A si ha un unico andamento parabolico per $M(Z)$; per valori pari di A si trova che le masse dei nuclei pari-pari e dispari-dispari si distribuiscono su due parabole traslate verticalmente, con

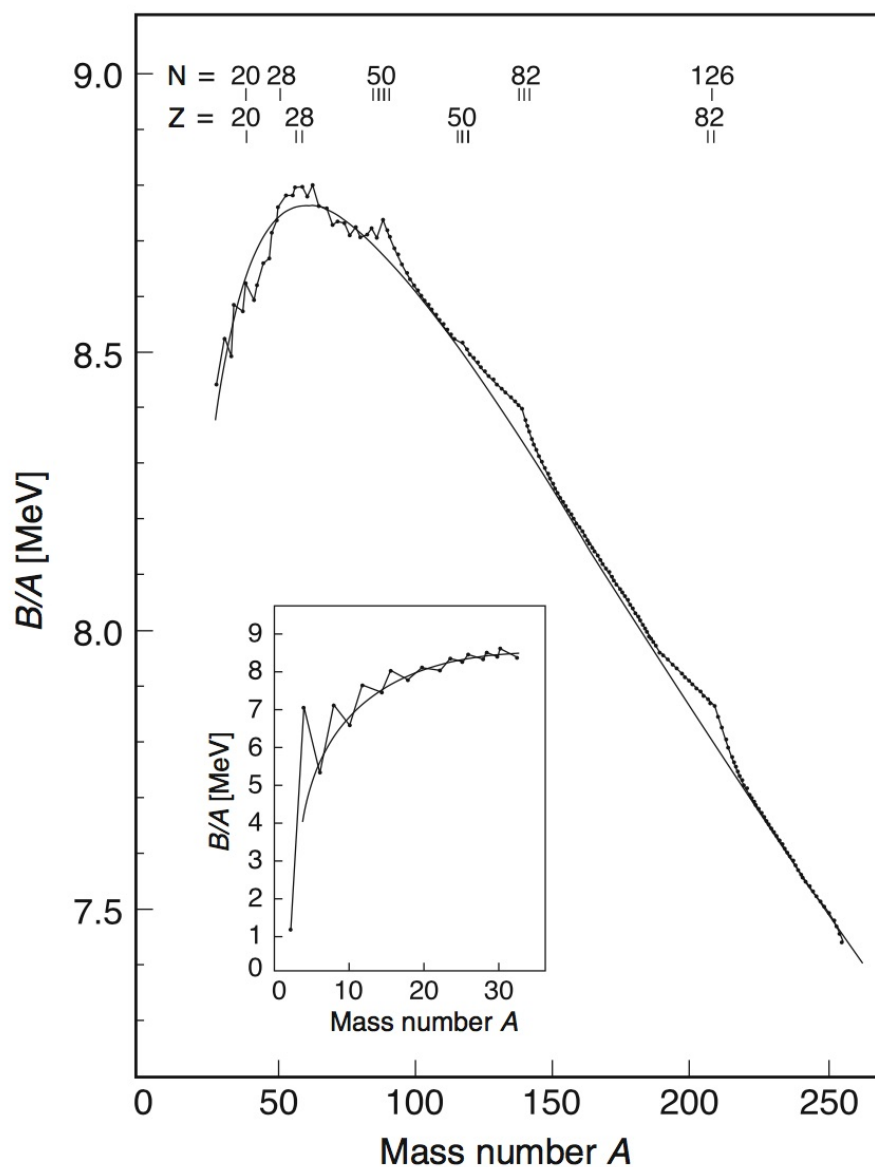


Figura 4.16: Fit con la formula di Weizsäcker sull'insieme dei valori delle energie di legame medie per nucleone, dei nuclei con valore pari di A (dalla compilazione di Mattauch, Thiele e Wapstra, Nuc. Phys. 67(1965) 1). Sono evidenziati i *numeri magici*.

quella relativa ai nuclei dispari-dispari situata a energie maggiori della quantità $2|B_{ac}(A, Z)|$.

I minimi di tali parabole sono in corrispondenza di $Z = \beta/2\alpha$, e indicano i nuclidi di massa inferiore per la sequenza isobarica individuata dal partico-

lare valore di A , stabili rispetto al decadimento β .

Si è così ritrovato quanto evidenziato sperimentalmente dalla tabella dei nuclei e descritto nel precedente paragrafo 4.2.

Per chiarire l'importanza e l'utilità della formula di Weizsäcker è anche necessario sottolinearne i limiti che contribuiscono a definirne anche gli effettivi ambiti di applicabilità.

L'ipotesi sulla base della quale si sono ottenuti alcuni termini considera il nucleo come sostanzialmente *sferico*, e questo non permette di tener conto dei termini non nulli di quadrupolo elettrico che si osservano per svariati nuclei.

Risultati in merito alla saturazione della forza di coesione fra i nucleoni in un nucleo e alla loro repulsione a breve range ¹⁷, mettono in evidenza che non basta tener conto del principio di esclusione di Pauli come fatto.

Le considerazioni sul ruolo che momento angolare orbitale e spin dei nucleoni hanno sul carattere repulsivo della forza, sono puramente qualitative e semiclassiche.

Si osservi poi che il filo conduttore che conduce a tale formula consiste sostanzialmente nell'assimilare il nucleo atomico a una specie di *goccia di liquido*, ma le predizioni che ne conseguirebbero per descrivere moti collettivi rotazionali e/o vibrazionali non coprono la panoramica dei fenomeni osservati, o comunque non li descrivono in modo completo e soddisfacente.

L'approccio è stato ed è comunque utile nel descrivere la stabilità dei nuclei rispetto al decadimento α , alla fissione e al decadimento β .

¹⁷Si veda anche il paragrafo 22.2.

Capitolo 23

La struttura dei nuclei

Un nucleo che si trovi nel proprio stato fondamentale o sia leggermente eccitato può essere visto come un esempio di gas di Fermi degenerato. La densità di materia nel nucleo è determinata dalle interazioni fra nucleoni che sono essenzialmente caratterizzate, sulla scala del fm, da una forte repulsione a brevi distanze e da una relativamente blanda attrazione fra nucleoni non troppo vicini. Si ricordi, come accennato nel paragrafo 11.2, che i nucleoni non vanno pensati come localizzati in posizioni più o meno definite all'interno di un nucleo, ma piuttosto come oggetti che si muovono continuamente entro il volume del nucleo con un impulso medio corrispondente ad essi associato dell'ordine di 250 MeV/c. Questa mobilità dei nucleoni nel nucleo è conseguenza della citata relativa "debolezza" dei legami fra i nucleoni in uno stesso nucleo ¹

Il fatto concettualmente importantissimo che i nucleoni di uno stesso nucleo si muovano come se fossero quasi liberi al suo interno non è però un fatto che appaia immediatamente ovvio, e per capirlo si farà riferimento ai cosiddetti *ipernuclei*, ovvero quei nuclei che fra i loro componenti annoverano un *iperone* in sostituzione di un nucleone. Si vedrà che una particella Λ si muove entro un ipernucleo come una particella sostanzialmente "libera", entro una buca di potenziale la cui profondità è praticamente indipendente dal particolare nucleo considerato, e di ampiezza pari al raggio del nucleo stesso.

Un miglioramento rispetto al modello a gas di Fermi è ottenuto col modello a *shell*, che cerca di dare una forma realistica alla buca di potenziale e tiene conto del contributo di spin-orbita.

L'interazione fra i nucleoni in un nucleo è responsabile, oltre che della loro densità, anche della forma assunta dal nucleo nel suo stato fondamentale, e risulta che tale forma non è necessariamente sempre quella sferica.

¹Si può ad esempio vedere quanto si ottiene per l'intensità dell'interazione fra il protone e il neutrone che costituiscono uno stesso nucleo di deuterio

23.1 Modello a gas di Fermi

Si vedrà ora che il modello a gas di Fermi per i nuclei è in grado di giustificare le distribuzioni in impulso trovate per le interazioni quasi elastiche fra elettroni e nuclei, i valori delle energie di legame fra nucleoni e anche i termini principali della formula semi-empirica di massa di Weizsäcker 4.55. Il

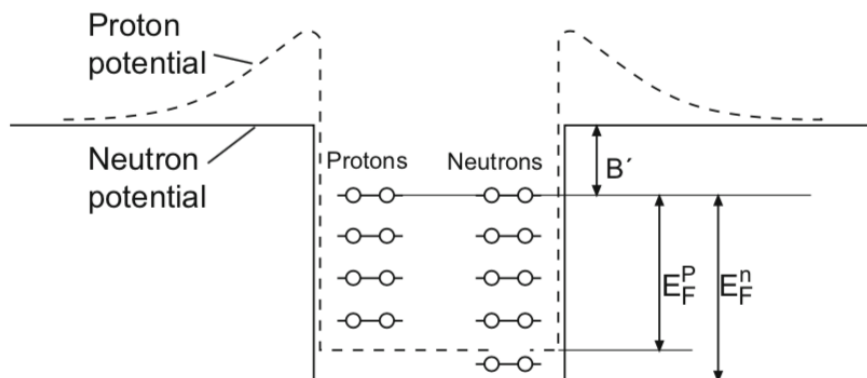


Figura 23.1: Forma schematica dei potenziali per neutroni e protoni in un nucleo, nell'ambito del modello a gas di Fermi.

modello a gas di Fermi considera i protoni e i neutroni che costituiscono uno stesso nucleo come due sistemi indipendenti di nucleoni, ovvero particelle di spin 1/2 che ubbidiscono alla statistica di Fermi-Dirac e che nel rispetto del principio d'esclusione di Pauli, si muovono per il resto liberamente dentro l'intero volume del nucleo.

Il potenziale percepito da ogni nucleone è la sovrapposizione dei potenziali dovuti a tutti i restanti nucleoni del nucleo. Nel seguito si supporrà che tale potenziale abbia la forma di una buca quadrata rettangolare che per i protoni tenga anche conto del contributo coulombiano, come schematizzato in figura 23.1.

Il numero di stati disponibili per un nucleone nel volume V e nell'intervallo d'impulso dp è quindi dato da

$$dn = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} V \quad (23.1)$$

Nello stato fondamentale, caratterizzato da temperatura pari a zero, i livelli a più basse energie saranno tutti occupati fino ad un certo valore massimo di impulso indicato con p_F e detto *impulso di Fermi*. Il numero di questi livelli è ottenibile integrando la 23.1

$$n = \frac{V p_F^3}{6\pi^2 \hbar^3} \quad (23.2)$$

e poichè ogni livello può ospitare due fermioni dello stesso tipo, si hanno rispettivamente

$$N = \frac{V(p_F^n)^3}{3\pi^2\hbar^3} \quad e \quad Z = \frac{V(p_F^p)^3}{3\pi^2\hbar^3} \quad (23.3)$$

neutroni e protoni. Se si esprime il volume del nucleo come quello di una sfera, $V = 4\pi R^3/3 = 4\pi R_0^3 A/3$, con $R_0 = 1.21$ fm ottenuto da esperimenti di diffusione di elettroni e si ipotizza che la buca di potenziale per i protoni e quella per i neutroni abbiano la stessa estensione radiale, si trova, per un nucleo con $Z = N = A/2$ un impulso di Fermi pari a

$$p_F = p_F^n = p_F^p = \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \simeq 250 \text{ MeV}/c \quad (23.4)$$

Dal modello a gas di Fermi si deduce che i nucleoni sembrano muoversi liberamente entro il nucleo con impulso di valore cospicuo, in accordo con quanto dedotto dai risultati delle misure di diffusione quasi elastica fra elettroni e nuclei. Per i nuclei più leggeri p_F tende ad assumere valori inferiori e il modello a gas di Fermi non rappresenta oltretutto una buona descrizione del nucleo in tali casi.

L'energia del livello occupato più alto, corrispondente all'energia di Fermi E_F , vale

$$E_F = \frac{p_F^2}{2M} \simeq 33 \text{ MeV} \quad (23.5)$$

con M la massa del nucleone. Detta B' la differenza fra il massimo valore della buca e il livello di Fermi, si trova che è costante per la gran parte dei nuclei e corrisponde all'energia media di legame per nucleone $B/A = 7 \div 8$ MeV.

La profondità della buca di potenziale e l'energia di Fermi sono in larga misura indipendenti dal numero di massa A

$$V_0 = E_F + B' \simeq 40 \text{ MeV} \quad (23.6)$$

Similmente al caso di un gas di elettroni liberi in un conduttore metallico si ha che l'energia cinetica media del gas di nucleoni nella "materia nucleare" è confrontabile con la profondità della buca di potenziale, e questo rappresenta un'ulteriore evidenza del fatto che un nucleo è una struttura non troppo fortemente legata.

Si trova che i nuclei contengono tanti più neutroni, rispetto ai protoni, quanto maggiore il loro numero di massa A , come si vede anche dalla tabella dei nuclidi (figura 4.2). Il fatto che i livelli di Fermi di protoni e neutroni di uno stesso nucleo stabile devano coincidere², implica che la profondità della buca di potenziale sentito dal gas di neutroni debba essere maggiore di quella

²In caso contrario il nucleo potrebbe ricondursi ad una condizione energeticamente più favorevole attraverso un decadimento β , contraddicendo però così l'ipotesi che il nucleo originalmente considerato fosse "stabile".

del potenziale sentito dal gas di protoni, come mostrato in figura 23.1. In media i protoni appaiono quindi meno legati dei neutroni come si può capire tenendo conto della loro mutua repulsione coulombiana che introduce nel potenziale un termine aggiuntivo del tipo

$$V_C = (Z - 1) \frac{\alpha \hbar c}{R} \quad (23.7)$$

Si calcoli quindi, nell'ambito del modello a gas di Fermi, la dipendenza dell'energia di legame dall'eccesso di neutroni presenti in un nucleo. L'energia cinetica media per nucleone è (si adotta un approccio classico, date le energie in gioco)

$$\langle E_k \rangle = \frac{\int_0^{p_F} E_k p^2 dp}{\int_0^{p_F} p^2 dp} = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2M} \simeq 20 \text{MeV} \quad (23.8)$$

Il contributo cinetico totale di energia del nucleo è dunque

$$E_k(N, Z) = N \langle E_n \rangle + Z \langle E_p \rangle = \frac{3}{10M} \left[N \left(p_F^n \right)^2 + Z \left(p_F^p \right)^2 \right] \quad (23.9)$$

che tenendo conto delle 23.3 e supposto il nucleo di forma sferica, con raggio della buca di potenziale uguale per neutroni e protoni. diventa

$$E_k(N, Z) = \frac{3}{10M} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{5/3}} \quad (23.10)$$

Si vede che questa energia cinetica media presenta, per A fissato e al variare di N o equivalentemente Z , un minimo quando $Z = N$, e da ciò consegue che l'energia di legame si riduce per $N \neq Z$. Sviluppando la 23.8 in serie di potenze di $(N - Z)$ si ha

$$E_k(N, Z) = \frac{3}{10M} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \left[A + \frac{5}{9} \frac{(N - Z)^2}{A} + \dots \right] \quad (23.11)$$

che contiene una dipendenza funzionale dall'eccesso neutronico. Il primo termine contribuisce al termine dell'energia di volume nella formula semi-empirica di Weizsäcker 4.55, mentre il secondo descrive la correzione dovuta alla asimmetria $N \neq Z$. Per riprodurre con ragionevole accuratezza quest'ultimo bisogna tener conto del cambiamento del potenziale per $N \neq Z$ come anche della variazione nell'energia cinetica.

È un notevole risultato che dal semplice modello a gas di Fermi con nucleoni liberi di muoversi in un potenziale medio, si possano sostanzialmente dedurre due termini cruciali della formula semi-empirica di massa dei nuclei come quello di volume e quello di asimmetria neutroni-protoni.

Modello a Shell

4.3.9 Momenti elettrici e magnetici dei nuclei

La gran parte di quanto si sa della struttura dei nuclei non deriva direttamente dallo studio di come essi interagiscono "fortemente" con altri nuclei, ma piuttosto di come interagiscono elettromagneticamente.

La forza nucleare determina sostanzialmente distribuzione e moto dei nucleoni nel nucleo e se per sondarli si utilizzano interazioni elettromagnetiche, queste hanno effetti più deboli dell'ambiente "nucleare" circostante, in tal modo si ha una discreta garanzia di non distorcere significativamente le caratteristiche di quanto si sta misurando.

Ogni distribuzione di cariche o correnti è sorgente di campi elettrici e magnetici la cui forma e intensità dipendono anche dalla distanza dalla sorgente. Abitualmente si associano alle distribuzioni di cariche e correnti dei "momenti di multipolo" per ogni specifica distribuzione spaziale: la proporzionalità $1/r^2$ del campo elettrico deriva dalla carica totale della sorgente e gli si assegna il momento d'ordine zero o "monopolo"; la proporzionalità $1/r^3$ deriva dal momento d'ordine uno o "dipolo"; la proporzionalità $1/r^4$ deriva dal momento d'ordine due o "quadrupolo", e così via.

¹⁷Si veda anche il paragrafo 22.2.

Per i momenti magnetici le cose sono simili con l'eccezione del momento di ordine zero, il monopolo magnetico, che sembra non esistere, e quindi non vi sono contributi di momento magnetico proporzionali a $1/r^2$.

Con l'elettromagnetismo si è visto come calcolare i diversi momenti di multipolo elettrici e magnetici e la stessa strategia può essere adottata per i momenti di un nucleo, tenendo però conto che si ha a che fare in tal caso con un soggetto che va trattato quantisticamente, per cui i momenti di multipolo diventeranno delle osservabili per le quali si possono calcolare i valori d'aspettazione associati ai diversi stati di un nucleo. Questi valori d'aspettazione dovranno naturalmente essere poi direttamente confrontabili con i valori sperimentali misurati.

Classicamente si ha che una distribuzione di carica a simmetria sferica genera soltanto il campo monopolare coulombiano e i multipoli d'ordine superiore sono tutti nulli.

Una corrente che si sviluppi su un percorso piano-circolare genera soltanto un campo magnetico dipolare.

È inoltre ragionevole pensare che i nucleoni di un nucleo si aggregino a formare il nucleo in una struttura che se non eccitata, nel rispetto dell'interazione nucleare, tende a una distribuzione e forma il più possibile simmetriche, quindi per quanto possibile prossima a quella sferica, ed è per questo che in molti casi è sufficiente misurare e calcolare soltanto i multipoli d'ordine più basso per caratterizzare le proprietà elettromagnetiche di un nucleo. Questo porta a immaginare che le proprietà multipolari d'ordine superiore di un nucleo possano essere ascritte alla presenza in esso di nucleoni spaiati. Un ulteriore vincolo all'insorgere di momenti di multipolo nei nuclei è legato alle loro proprietà di simmetria e alla parità dei loro stati. Ogni momento di multipolo elettromagnetico ha una definita parità, determinata dal comportamento dell'operatore associato quando si considera la trasformazione $r \rightarrow -r$, e bisogna tenerne conto per la compatibilità con la parità degli stati del nucleo.

La parità dei momenti elettrici è data da $(-1)^\ell$, dove ℓ rappresenta l'ordine del momento di multipolo ($\ell = 0$ per il monopolo, $\ell = 1$ per il dipolo, ...). La parità dei momenti magnetici è invece data da $(-1)^{\ell+1}$.

Per calcolare il valore d'aspettazione di un operatore "momento di multipolo" \mathcal{O} , si effettua un integrale del tipo

$$\int \psi^*(\vec{r}) \mathcal{O} \psi(\vec{r}) d^3r \quad (4.60)$$

Se le forze in gioco conservano la parità, allora in un sistema descritto da una funzione d'onda ψ non degenera, la parità della stessa è ininfluente e si ha che $\psi^*\psi = |\psi|^2$ è pari. Se però \mathcal{O} è un operatore dispari allora tutto l'integrando è una funzione dispari, per cui l'integrale si annulla. Questo porta ad affermare che *in un nucleo tutti i momenti di multipolo statico con*

parità dispari devono essere nulli, quindi il dipolo elettrico, il quadrupolo magnetico, l'ottupolo elettrico,

L'evidenza sperimentale dell'assenza di momenti di dipolo elettrici per i nuclei, porta dunque a concludere che le forze nucleari conservano la parità. Il fatto che a meno di possibili piccole influenze dovute all'interazione debole che può introdurre nell'Hamiltoniana termini che non conservano la parità, gli stati nucleari abbiano parità definita, è però di per sé una condizione solo sufficiente all'annullarsi dei momenti di multipolo elettrico d'ordine dispari; si può infatti provare che il momento di dipolo elettrico di un nucleo si annulla anche se tutti i moti interni soddisfano l'*inversione temporale*.

Si vedano ora i primi tre momenti di multipolo nucleari non nulli, che sono quelli significativi dal punto di vista sperimentale.

- Il momento di monopolio elettrico corrisponde, come già osservato, alla carica nucleare netta Ze .
- Il successivo momento non nullo è il momento di dipolo magnetico μ . Considerando una corrente I che si sviluppa lungo una traiettoria piana circolare di area A , si vede che gli è associato un momento magnetico di modulo $|\vec{\mu}| = IA$ e se la corrente è dovuta a una particella di massa M e carica e che ruota con velocità di modulo v su una traiettoria circolare di raggio r , con periodo $T = 2\pi r/v$, allora

$$|\vec{\mu}| = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2} = \frac{e}{2M} |\vec{\ell}| \quad (4.61)$$

con $\vec{\ell}$ il momento angolare classico. Quantisticamente si definisce operativamente l'osservabile momento magnetico come corrispondente alla massima componente di $\vec{\ell}$, per cui si può scrivere la forma quantistica di μ sostituendo ℓ nella 4.61, col suo valore d'aspettazione relativo alla direzione lungo la quale la sua proiezione è massima, ovvero pari ad $m_\ell \hbar$ con $m_\ell = +\ell$

$$\mu = \frac{e\hbar}{2M} \ell \quad (4.62)$$

con ℓ numero quantico del momento angolare orbitale.

La quantità $e\hbar/2M$ è detta *magnetone elementare* e nel caso atomico si pone $M = m_e$, ottenendo il magnetone di Bohr μ_B , mentre nel caso nucleare si pone $M = m_p$, ottenendo il magnetone nucleare μ_N .

Il fatto che $\mu_N/\mu_B \ll 1$ giustifica che in molte circostanze gli effetti derivanti dal magnetismo atomico siano preponderanti rispetto a quelli del magnetismo associato ai nuclei.

La 4.62 può essere utilmente scritta come

$$\mu = g_\ell \ell \mu_N \quad (4.63)$$

dove g_ℓ è un fattore associato al momento angolare orbitale ℓ che vale 1 per i protoni e 0 per i neutroni.

I nucleoni posseggono, come visto, anche un momento angolare intrinseco di spin cui è associato un momento magnetico intrinseco, che non ha analogo classico, ma che può essere scritto in una forma simile alla 4.63

$$\mu = g_s s \mu_N \quad (4.64)$$

con $s = 1/2$ e g_s il cosiddetto *fattore di spin*, che dalla soluzione dell'equazione di Dirac dovrebbe coincidere con 2, nell'ipotesi di particelle puntiformi, quindi prive di struttura interna.

Ciò è molto ben verificato per l'elettrone, mentre i valori misurati sperimentalmente su nucleoni liberi sono

$$\begin{aligned} g_s &= 5.5856912 \pm 0.0000022 && \text{per il protone} \\ g_s &= -3.8260837 \pm 0.0000018 && \text{per il neutrone} \end{aligned}$$

Questo è chiaramente un indizio imprescindibile del fatto che protoni e neutroni non sono assimilabili a particelle elementari, ma hanno una struttura costitutiva e non sono puntiformi.

Tabella - Momenti di dipolo magnetico di alcuni nuclei nello stato fondamentale

Nuclide	μ (μ_N)
n	-1.9130418
p	+2.7928456
^2H (D)	+0.8574376
^{17}O	-1.89379
^{57}Fe	+0.09062293
^{57}Co	+4.733
^{93}Nb	+6.1705

Si è accennato al fatto che i nucleoni in un nucleo interagiscono in modo da accoppiarsi favorendo quanto più possibile una condizione di massima energia di legame per il nucleo stesso, e questo corrisponde al fatto che gli accoppiamenti tendono a determinare per ogni nucleo un momento angolare orbitale totale e di spin totale, quanto più possibile prossimi a zero.

Questo porta a dedurre che i nucleoni accoppiati non danno contributo al momento magnetico che deriva sostanzialmente solo dagli eventuali "pochi" *nucleoni di valenza*, ovvero disaccoppiati, presenti.

Queste osservazioni sono suffragate dai risultati sperimentali che mostrano come la gran parte dei nuclei abbia valori contenuti del momento di dipolo magnetico; il valore più alto è quello del ^{93}Nb , leggermente

superiore a 6 magnetoni nucleari.

Nel 1937 Schmidt elaborò un modello per predire i valori dei momenti magnetici di dipolo dei nuclei, basato sull'idea che il contributo prevalente sia dovuto al nucleone spaiato, suggerito da una regolarità abbastanza generale desumibile dai dati per i nuclei con A dispari. Questi possono infatti essere visti come composti da una parte costituita da uno "strato" completo di nucleoni con spin appaiati, più un nucleone spaiato. Lo strato completo contiene necessariamente un numero pari di neutroni e protoni ed è quindi ragionevole pensare che non possieda né momento angolare né momento magnetico. Aggiungendo a questo strato un nucleone di momento angolare ℓ e spin $1/2$, lo spin totale del nucleo risulta pari ad $\ell \pm 1/2$. In base al modello vettoriale $\vec{\ell}$ ed \vec{s} si combinano per formare \vec{J} , acquisendo ognuno e indipendentemente un moto di precessione attorno a \vec{J} . Il momento magnetico lungo la direzione di \vec{J} è allora, in magnetoni nucleari

$$\mu_J = g_\ell \frac{\vec{\ell} \cdot \vec{J}}{J} + g_s \frac{\vec{s} \cdot \vec{J}}{J} = Jg_\ell \quad (4.65)$$

con $g_\ell = 0$ per il neutrone, $g_\ell = 1$ per il protone ed $\vec{\ell} \cdot \vec{J}$ espresso dalla

$$s^2 = \ell^2 + J^2 - 2\vec{\ell} \cdot \vec{J}$$

che quantisticamente diventa

$$\frac{\vec{\ell} \cdot \vec{J}}{J^2} = \frac{\ell(\ell+1) + J(J+1) - s(s+1)}{2J(J+1)}$$

e analogamente per $(\vec{s} \cdot \vec{J})/J^2$. Sostituendo si ottiene

$$\begin{aligned} g_J &= g_s \frac{J(J+1) + s(s+1) - \ell(\ell+1)}{2J(J+1)} + \\ &+ g_\ell \frac{J(J+1) + \ell(\ell+1) - s(s+1)}{2J(J+1)} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Quindi, per $J = \ell + 1/2$,

$$\mu_J = \frac{1}{2} g_s + \ell g_\ell \quad (4.67)$$

e per $J = \ell - 1/2$

$$\mu_J = -\frac{1}{2} g_s \frac{2\ell-1}{2\ell+1} + g_\ell \frac{(\ell+1)(2\ell-1)}{2\ell+1} \quad (4.68)$$

Combinando le due espressioni si ha

$$\mu_J = J \left[g_\ell \pm \frac{1}{2\ell + 1} (g_s - g_\ell) \right] \quad (4.69)$$

con il segno "+" che vale per $J = \ell + 1/2$. Nelle figure 4.17 e 4.18 sono riportati i valori sperimentali per μ_J , confrontati con i risultati forniti dalla formula 4.67 che individua le cosiddette "curve di Schmidt". Si nota che queste non riproducono con precisione i valori sperimentali che si trovano comunque compresi nella fascia di valori da esse delimitata, e ciò non deve sorprendere, dato il carattere grossolano del modello.

- Proseguendo nella ricerca dei momenti di multipolo non nulli si trova il "momento di quadrupolo elettrico". L'espressione classica per il momento di quadrupolo elettrico eQ associato a una carica puntiforme e , posta a distanza r dall'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (x, y, z) , e riferito all'asse z , è data da

$$eQ = e(3z^2 - r^2) \quad (4.70)$$

come mostrato in Appendice B.

Se nel nucleo c'è un nucleone spaiato che però si muove in modo sfericamente simmetrico, per cui in media si ha $x^2 = y^2 = z^2 = r^2/3$, allora il momento di quadrupolo elettrico risulta nullo.

Se si immagina che il nucleone si muova lungo un'orbita piana "classica" giacente sul piano $(x; y)$, allora si ha $z = 0$ e $Q = -r^2$.

La corrispondente osservabile momento di quadrupolo elettrico in meccanica quantistica è definita come

$$eQ = e \int \psi^*(\vec{r}) (3z^2 - r^2) \psi(\vec{r}) d^3r \quad (4.71)$$

se quindi il nucleone spaiato è un neutrone, ovvero di carica elettrica nulla, il suo contributo al momento di quadrupolo elettrico del nucleo è nullo.

Se $|\psi|^2$ è a simmetria sferica, quindi con $|\vec{J}| = 0$, allora $Q = 0$, come nel caso classico.

Quantisticamente si trova che $Q = 0$ anche per $|\vec{J}| = 1/2$ ¹⁸.

Se $|\psi|^2$ è concentrata nel piano $(x; y)$, ovvero $(z \simeq 0)$, allora si ha che $Q \sim -\langle r^2 \rangle$, con $\langle r^2 \rangle$ il raggio quadratico medio dell'orbita, e si ha una deformazione "oblata" della distribuzione di carica.

Se invece $|\psi|^2$ è concentrata lungo l'asse z , quindi $(z \simeq r)$, si trova $Q \sim +2\langle r^2 \rangle$, e si ha una deformazione "prolata" della distribuzione di carica.

¹⁸Si veda l'Appendice B

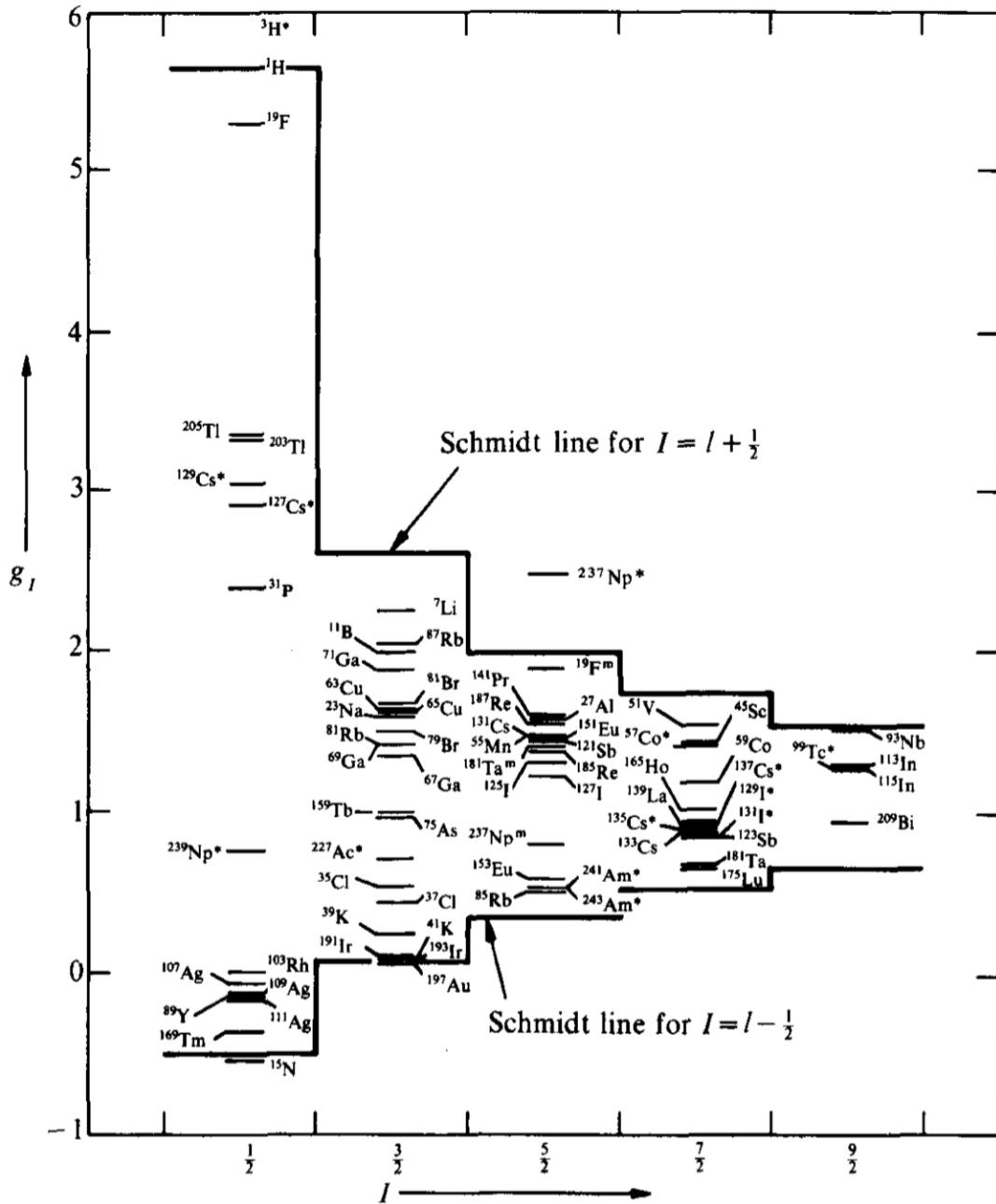


Figura 4.17: Valori di g_I e linee di Schmidt per nuclei con numero dispari di protoni.

Considerare il termine d'accoppiamento risulta anche in questo caso utile in quanto si può assumere che nucleoni accoppiati che si muovono

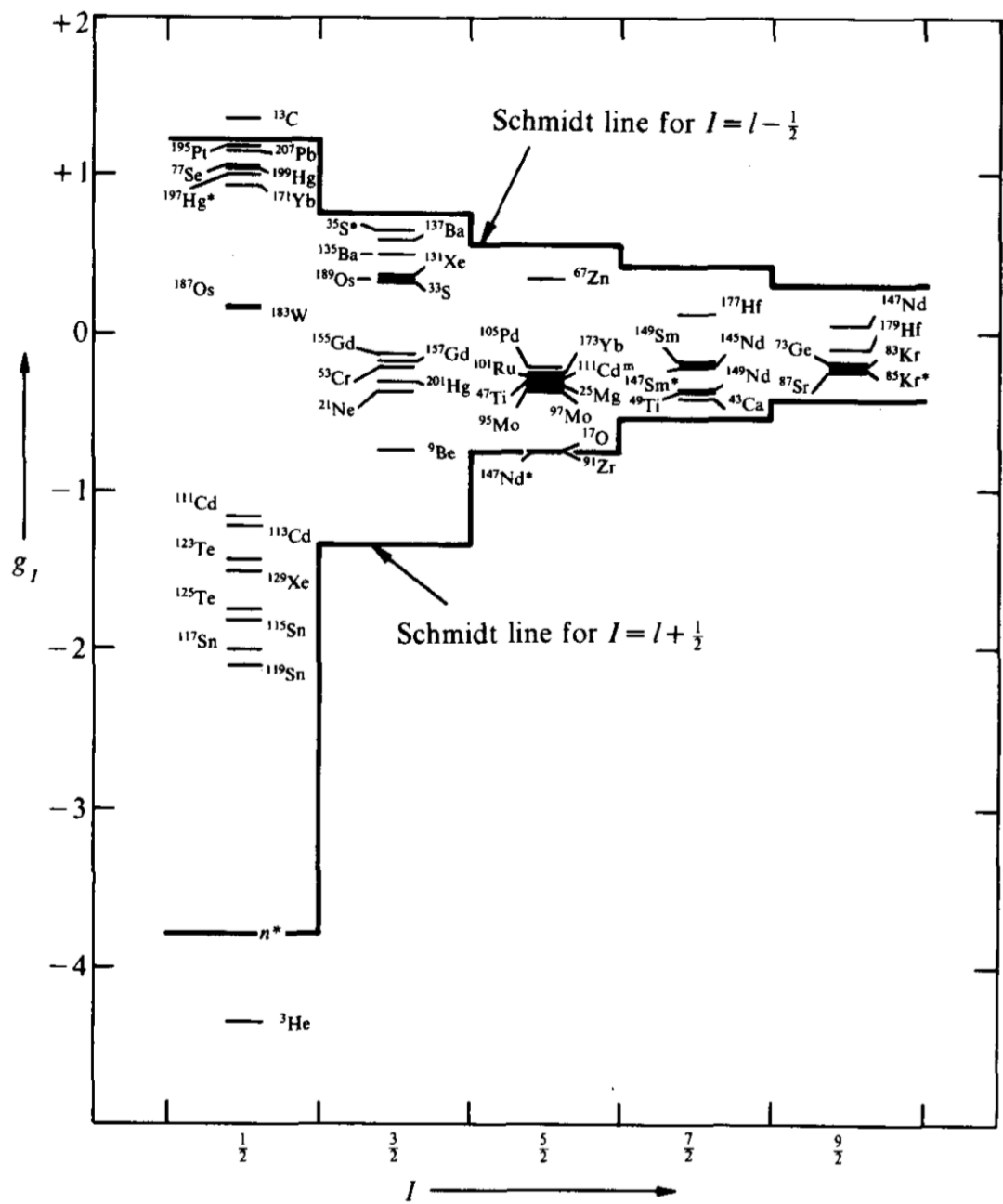


Figura 4.18: Valori di g_J e linee di Schmidt per nuclei con numero dispari di neutroni.

nel nucleo in modo sfericamente simmetrico non contribuiscono a Q . Si può dunque immaginare che per nuclei che soddisfino questa simmetria strutturale il momento di quadrupolo elettrico possa essere stimato

tenendo conto della presenza di un eventuale nucleone spaiato, detto anche di valenza, che si muova in prossimità della superficie di un core quasi sferico costituito dagli altri $A - 1$ nucleoni accoppiati, quindi a distanza $R = R_0 A^{1/3}$ dal centro, il che porta a stimare il momento di quadrupolo come

$$|eQ| \leq e R_0^2 A^{2/3} \quad (4.72)$$

Calcolando $|eQ|$ si trova che esso varia da circa $6 \times 10^{-30} e \cdot m^2$, per i nuclei leggeri, fino a circa $50 \times 10^{-30} e \cdot m^2$ per i nuclei più pesanti. Introducendo il *barn*, con $1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$, si trova quindi che i valori calcolati secondo il semplice modello proposto soddisfano la condizione $0.06 e \cdot \text{b} \leq |eQ| \leq 0.5 e \cdot \text{b}$.

Le misure sperimentali mostrano che molti nuclei hanno valori di $|eQ|$ compresi entro questo intervallo, nonostante ve ne siano alcuni, soprattutto fra le terre rare, che se ne discostano anche significativamente, indicando che in quei casi il modello a nucleone spaiato singolo non riesce a spiegare i grandi valori misurati per il momento di quadrupolo elettrico. Quindi se ne deduce che l'assunzione che i nuclei siano costituiti da un core a simmetria sferica di nucleoni appaiati, più un eventuale nucleone spaiato, non è valida per tutti i nuclei; in certi casi anche il "core" può presentarsi con una simmetria non sferica.

Nella tabella che segue sono riportati i valori dei momenti di quadrupolo di alcuni nuclei nel loro stato fondamentale.

Tabella - Momenti di quadrupolo di alcuni nuclei nello stato fondamentale.

Nuclide	Q (barn)
^2H (D)	+0.00288
^{17}O	-0.02578
^{59}Co	+0.40
^{63}Cu	-0.209
^{133}Cs	-0.003
^{161}Dy	+2.4
^{179}Lu	+8.0
^{209}Bi	-0.37

4.3.10 Misure dei momenti elettrici e magnetici dei nuclei

Nei nuclei ci sono quindi neutroni e protoni in movimento che danno luogo a densità di massa, di carica e di correnti. Nell'ipotesi che i campi elettrici e magnetici esterni in cui un nucleo si può trovare non perturbino le sue distribuzioni interne di cariche e correnti, l'energia globale del nucleo dipende anche dall'interazione dei suoi momenti elettrici e magnetici con questi campi esterni.

I campi esterni elettrici e magnetici possono essere quelli dovuti agli elettroni dell'atomo e/o della molecola cui il nucleo appartiene, o altri prodotti ad hoc.

I campi magnetici dovuti agli elettroni atomici sono orientati lungo la direzione del momento angolare totale dell'atomo. Anche il momento angolare e il momento magnetico del nucleo sono orientati lungo una stessa direzione, che per le note prescrizioni quantistiche derivanti dal rispetto del principio di indeterminazione non potrà però mai allinearsi esattamente alla precedente.

Campi magnetici ad hoc possono essere generati e controllati dagli sperimentatori, ma non superano intensità massime dell'ordine di poche decine di Tesla; quelli generati dagli elettroni atomici sono noti con minor precisione, ma possono essere molto più intensi. Le energie d'interazione con i momenti elettrici e magnetici nucleari perturbano i livelli di atomi e/o molecole generando la cosiddetta *struttura iperfine* delle linee spettrali atomiche o molecolari, spiegata da W. Pauli nel 1924 e la cui analisi sperimentale permette appunto di effettuare misure dei momenti nucleari.

Misure del momento d_n di dipolo elettrico del neutrone danno un limite superiore (d_n/e) $< 3 \times 10^{-28}$ m, con e la carica elementare.

I valori dei momenti di quadrupolo elettrico misurati per i nuclidi sono compresi fra i +8 barn del ^{176}Lu e -1.0 barn del ^{123}Sb . Introducendo la quantità

$$Q_{rid} = \frac{Q}{Ze \langle R \rangle^2} \quad (4.73)$$

detta *momento di quadrupolo ridotto* e dove $\langle R \rangle$ è una sorta di raggio medio della distribuzione di carica, si agevola il confronto fra le entità delle deformazioni nucleari in funzione dei diversi numeri di massa.

Osservando in figura 4.19, la distribuzione dei momenti di quadrupolo elettrico ridotto di nuclei con A dispari, graficati in funzione del valore di N , si nota che il Q_{rid} dei nuclei con Z dispari e N pari dipende essenzialmente dal numero di protoni, mentre quello dei nuclei con Z pari ed N dispari dipende in segno dal numero di protoni e in valore assoluto dal numero di neutroni. Inoltre Q_{rid} cambia bruscamente valore tra coppie di nuclei adiacenti a nuclei con valori di Z ed N espressi da: $Z^*, N^* = 2, 8, 20, 50, 82, 126$, ovvero i *numeri magici* già incontrati nel paragrafo 4.2.

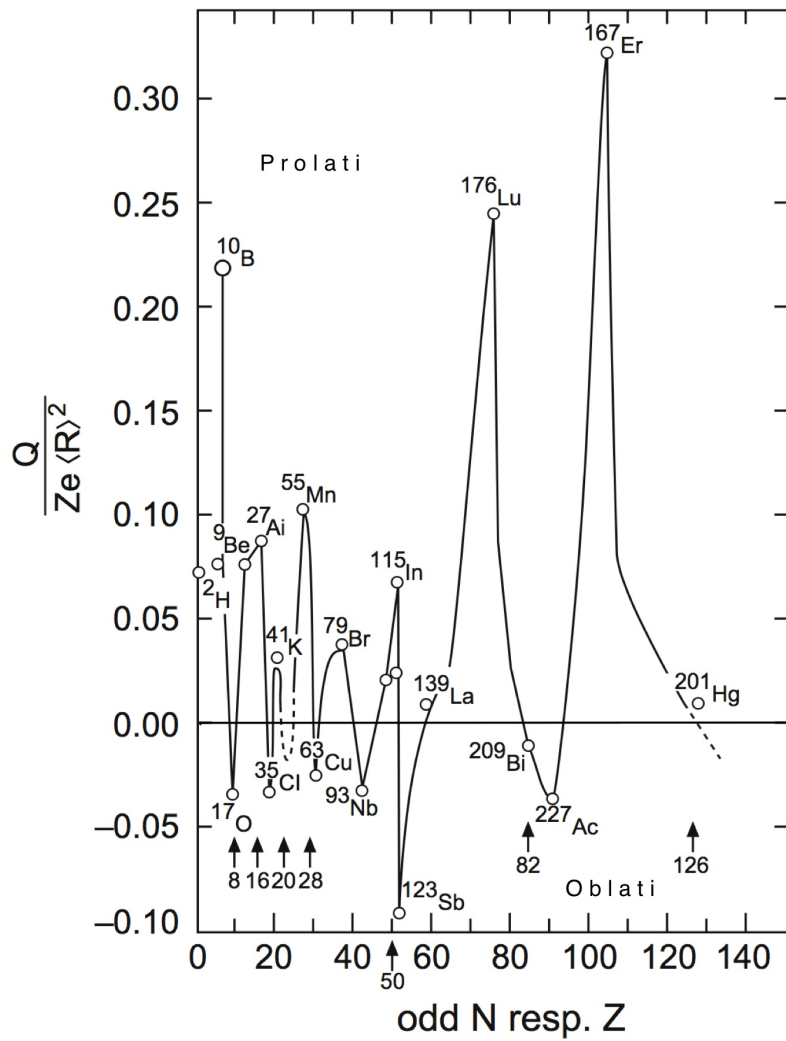


Figura 4.19: Q_{rid} di nuclei con A dispari in funzione di N . Il tratto continuo interpola i dati misurati, di cui è mostrato solo un sottoinsieme.

Dei momenti magnetici dei nuclei si tratterà ulteriormente parlando anche del "modello a shell".

Appendice B

Momenti elettrici dei nuclei

Si deducono ora i momenti elettrici di una distribuzione classica di carica che simuli quella possibile per un nucleo, assumendo come direzione di riferimento z quella di un opportuno campo elettrico esterno.

Il potenziale elettrostatico nel punto P, posto a distanza s dal centro di massa O del nucleo e dovuto a un protone situato a distanza r da O è, come desumibile dalla figura B.1

$$V(r, \vartheta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{L(r, \vartheta)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} e \left(s^2 + r^2 - 2rs \cos\vartheta \right)^{-1/2} \quad (\text{B.1})$$

Sviluppando il termine $\frac{1}{L(r, \vartheta)}$ nell'ipotesi che sia $r/s \ll 1$, si ha

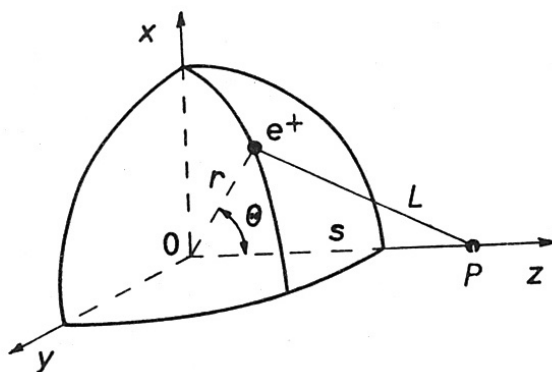


Figura B.1: Configurazione geometrica per il calcolo del multipolo elettrico.

$$\frac{1}{L(r, \vartheta)} = \frac{1}{s} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2r}{s} \cos\vartheta - \frac{r^2}{s^2} \right) + \dots \right] \quad (\text{B.2})$$

e raccogliendo opportunamente, la B.1 diventa

$$V(r, \vartheta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e r^n}{s^{n+1}} P_n(\cos\vartheta) \quad (\text{B.3})$$

dove $P_n(\cos\vartheta)$ sono i polinomi di Legendre, come in 8.16 Per $n = 0$, $V(r, \vartheta)$ si riduce al potenziale coulombiano nel punto P dovuto alla carica protonica $+e$ posta nell'origine O . Ogni termine corrispondente ad $n \neq 0$ nella B.3 rappresenta il potenziale elettrostatico classico di 2^n -polo

$$V^{(n)}(r, \vartheta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e r^n}{s^{n+1}} P_n(\cos\vartheta) \quad (\text{B.4})$$

Dalla B.3 si ha dunque che il potenziale in P dovuto a una carica elettrica posta nel punto (r, ϑ) rispetto all'origine O , coincide con la somma del potenziale prodotto dalla stessa carica come se fosse in O con quello dovuto a un sistema di 2^n -poli. Il valor medio di $V(r, \vartheta)$ coincide col potenziale coulombiano $V_C(r) = e/4\pi\epsilon_0 s$, in quanto per $n \neq 0$, si ha

$$\langle V^{(n)} \rangle = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e r^n}{s^{n+1}} \int_0^\pi P_n(\cos\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta = 0 \quad (\text{B.5})$$

I momenti classici di dipolo ($n = 1$) e di quadrupolo ($n = 2$) dovuti a una singola carica elettrica sono definiti come

$$\begin{aligned} d(r, \vartheta) &= er P_1(\cos\vartheta) = ez \\ q(r, \vartheta) &= e2r^2 P_2(\cos\vartheta) = e(3z^2 - r^2) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Nel caso della distribuzione $\rho_Z(\vec{r})$ di carica di un nucleo con Z protoni normalizzata in modo che

$$\int \rho_Z(\vec{r}) d\vec{r} = Ze \quad (\text{B.7})$$

si ha, per i relativi momenti di dipolo e quadrupolo,

$$\begin{aligned} D &= \int z' \rho_Z(\vec{r}') d\vec{r}' \\ Q &= \int (3z'^2 - r'^2) \rho_Z(\vec{r}') d\vec{r}' \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

dove l'apice indica che le variabili coprono il volume strettamente occupato dalla carica. Quindi il momento di dipolo elettrico è una quantità omogenea a una lunghezza, tipicamente espresso in fermi (fm), e quello di quadrupolo è omogeneo a una superficie, tipicamente espresso in barn.

Si veda ora "classicamente" la relazione esistente tra la forma della distribuzione di carica del nucleo e il suo momento elettrico. Si supponga a tale scopo, sempre classicamente che lo spin \vec{J} del nucleo sia completamente orientato nella direzione dell'asse z e che per il moto di rotazione la forma del nucleo, diversa da quella sferica, sia riconducibile almeno in prima approssimazione, a quella di un ellissoide di rotazione di equazione

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (\text{B.9})$$

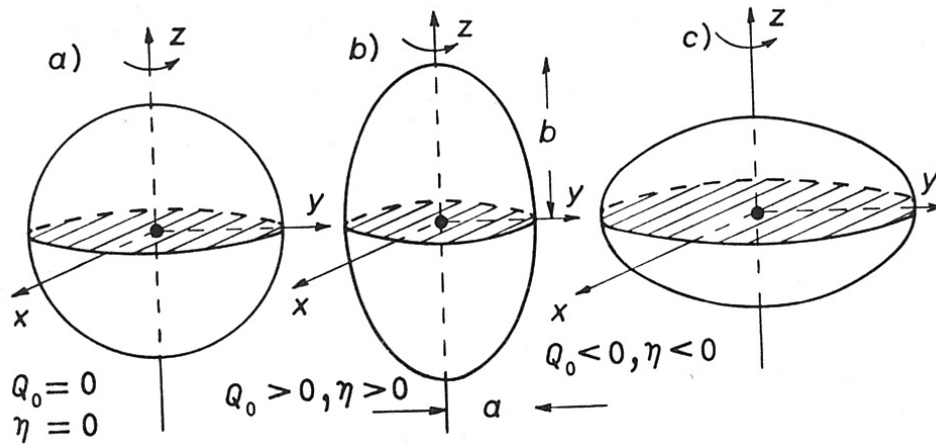


Figura B.2: Possibili deformazioni per una distribuzione di carica.

come illustrato in figura B.2. Si supponga anche che la carica elettrica del nucleo sia uniformemente distribuita nel volume $V = 4\pi a^2 b/3$ dell'ellissoide di rotazione, per cui la densità si esprime classicamente come

$$\begin{cases} \rho_Z(\vec{r}) = \frac{Ze}{V} = \frac{3Ze}{4\pi a^2 b} & , \text{ per } -a \leq x \leq a \quad -a \leq y \leq a \quad -b \leq z \leq b \\ \rho_Z(\vec{r}) = 0 & , \text{ per } x > a \quad y > a \quad z > b \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

e sostituendo per i momenti di dipolo e quadrupolo si ottiene

$$\begin{aligned} D_c &= \frac{3Ze}{4\pi a^2 b} \int z' d\vec{r}' = 0 \\ Q_c &= \frac{3Ze}{4\pi a^2 b} \int (3z'^2 - r'^2) d\vec{r}' = \frac{2}{5} Ze (b^2 - a^2) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

dove il pedice "c" sottolinea che i risultati sono in ambito classico. Ponendo

$$R = \frac{1}{2}(b+a) \quad , \quad \eta = \frac{1}{2}(b-a)$$

si riscrive il momento di quadrupolo come

$$Q_c = \frac{8}{5} Ze\eta R \quad (\text{B.12})$$

da cui: se $\eta = 0$ allora $a = b$, il nucleo ha simmetria sferica e possiede momento di quadrupolo nullo; se $\eta > 0$ allora $b > a$, il momento di quadrupolo è positivo e il nucleo ha la forma di un ellissoide allungato secondo l'asse di rotazione; se $\eta < 0$ allora $b < a$, il momento di quadrupolo è negativo e il nucleo ha la forma di un ellissoide schiacciato rispetto all'asse di rotazione, come mostrato nelle figure B.2 a), b) e c).

Quanto indicato dalla prima delle B.11, ovvero che sia nullo il momento di dipolo elettrico per una distribuzione di carica, e quindi per un nucleo, con simmetria sferica rispetto al piano equatoriale $z = 0$, è classicamente ovvio, dato che la densità di carica è una funzione pari della posizione $\rho_Z(\vec{r}) = \rho_Z(-\vec{r})$, mentre z è dispari su tutto lo spazio in cui si integra per il calcolo di D .

I risultati sperimentali non contraddicono quanto trovato con l'approccio classico, ma ve ne sono che non trovano una spiegazione classica, in particolare si trova che il livello fondamentale di un nucleo può avere momento di quadrupolo elettrico nullo anche se la sua distribuzione di carica non ha simmetria sferica, ovvero se il suo momento angolare totale \vec{J} non è nullo. Si trova infatti che è nullo il momento di quadrupolo elettrico anche per i nuclei con $J = 1/2$.

Per una corretta trattazione quantistica da cui discenda anche questo risultato si definisca il valore del multipolo elettrico di un nucleo come il valor medio dell'operatore di multipolo elettrico, calcolato sullo stato che possiede il massimo valore possibile della proiezione J_z del momento angolare totale lungo la direzione z del campo esterno di riferimento.

Classicamente si è trovato che momenti di dipolo o di quadrupolo diversi da zero implicano una simmetria non sferica per la distribuzione di carica, ovvero richiedono $\vec{J} \neq 0$. Quantisticamente i diversi momenti di multipolo elettrico di un nucleo sono proporzionali a

$$Ze \int \psi_J^{*m}(\vec{r}') r'^\ell P_\ell(\cos\vartheta') \psi_J^m(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (\text{B.13})$$

con $\psi_J^m(\vec{r})$ autofunzione del momento angolare sul valore massimo possibile $m = J$. Se dunque le forze nucleari conservano la parità, un nucleo con stato fondamentale non degenere¹ deve avere momento di dipolo elettrico nullo, come si era visto anche classicamente.

Da quanto detto è anche chiaro che un nucleo con $\vec{J} = 0$ non può avere neppure momento di quadrupolo elettrostatico, infatti in questo caso $\ell = 2$ ed $m = 0$, e di conseguenza $|\psi_0^0|^2$ ha simmetria sferica, per cui

$$\begin{aligned} Q &\propto Ze \int |\psi_0^0|^2 r'^2 P_2(\cos\vartheta') d\vec{r}' = \\ &= Ze \int_0^\infty r'^4 |\psi_0^0|^2 \int P_2(\cos\vartheta') d\Omega' dr' = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

e anche questo combacia col risultato classico.

Si ricordi che per $\ell \neq 0$ si ha anche $\int P_\ell(\cos\vartheta') d\Omega' = 0$.

¹La funzione d'onda di uno stato degenere è esprimibile come combinazione lineare di autovettori differenti e linearmente indipendenti, quindi di fatto mescola stati diversi.

Quantisticamente si può però verificare che il momento di quadrupolo elettrico di un nucleo sia nullo anche nel caso in cui $J = 1/2$, risultato classicamente non prevedibile. Lo si può capire intuitivamente immaginando di cercare di fare in modo che l'integrale in $d\Omega'$ risulti $\neq 0$. L'integrando contiene $P_2(\cos\vartheta')$, che corrisponde al momento angolare orbitale $\ell = 2$. Per rendere non nullo l'integrale in $d\Omega'$ bisogna riuscire a costruire uno scalare, ovvero un invariante per rotazioni, utilizzando $\vec{\ell}$ e i momenti angolari totali delle funzioni d'onda iniziale e finale, che valgono entrambi \vec{J} , bisogna cioè che possa essere

$$\vec{\ell} + \vec{J} + \vec{J} = 0 \quad (\text{B.15})$$

Poichè però $\ell = 2$ e $J = 1/2$, $2J$ può al massimo valere 1, e di conseguenza $1 \leq (\ell + 2J) \leq 3$, escludendo la possibilità che sia $L + 2J = 0$. Quindi i nuclei pari-pari ($J = 0$), assieme ai pari-dispari e ai dispari-pari con $J = 1/2$, hanno momento di quadrupolo elettrico nullo, anche se ciò non significa necessariamente che i nuclei con $J = 1/2$ abbiano una distribuzione di carica a simmetria perfettamente sferica, ma semplicemente che è nulla la massima componente osservabile del loro momento di quadrupolo Q .

Quindi un nucleo mostra momenti di quadrupolo elettrici non nulli solo per valori $J \geq 1$.

Quanto qui discusso vale per i cosiddetti momenti "statici" dei nuclei, quelli cioè che caratterizzano un nucleo nel suo stato fondamentale. Quando diversamente si considerano i casi di nuclei in condizioni eccitate che effettuano transizioni radiative fra diversi livelli energetici, non valgono le stesse condizioni restrittive.

4.3.11 Isospin

Come si vedrà più avanti gli esperimenti di diffusione su nuclei a bassa energia hanno messo in evidenza la stretta somiglianza tra le forze *neutrone – protone* e quelle *protone – protone*, così come anche l'analisi delle proprietà dei nuclei speculari, quali ${}^3\text{H}$ ed ${}^3\text{He}$, ${}^7\text{Li}$ e ${}^7\text{Be}$, ...

Le forze coulombiane sono diverse nei nuclei speculari, ma a parte questo i livelli energetici di nuclei speculari mostrano una considerevole somiglianza, come si osserva nelle figure 4.20 e 4.21.

I nuclei speculari con $N = Z \pm 1$ hanno oltretutto masse molto simili,

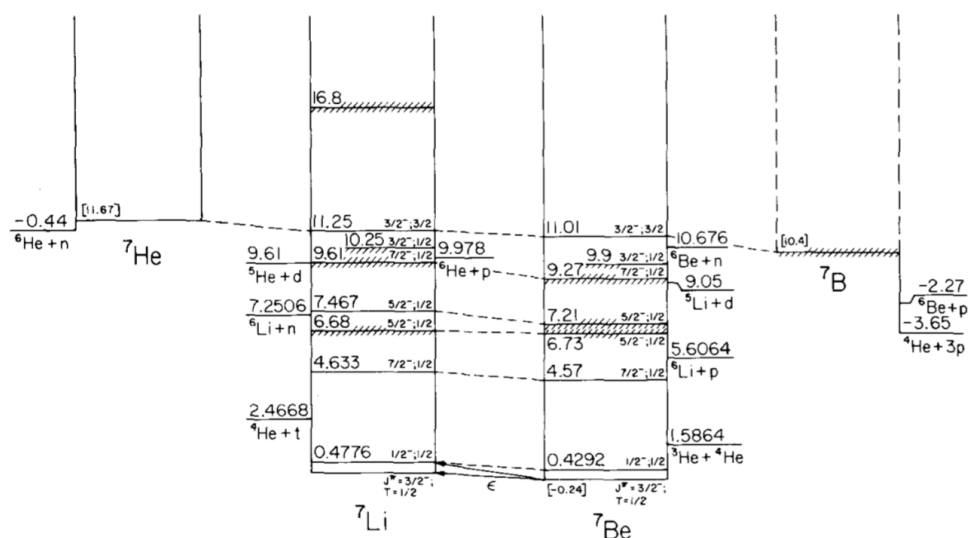


Figura 4.20: Livelli energetici dei nuclei speculari ${}^7\text{He}$, ${}^7\text{B}$, e ${}^7\text{Li}$, ${}^7\text{Be}$.

a meno del contributo dovuto alle diverse energie elettrostatiche; la loro differenza in massa, a meno del termine c^2 , è infatti espressa da

$$\Delta M = \frac{3}{5} \frac{(2Z+1)}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R_0 A^{1/3}} \quad (4.74)$$

come si deduce dal termine coulombiano della formula semi-empirica di Weizsäcker 4.50.

Per la precisione, la somiglianza fra i livelli dei nuclei speculari del tipo $N = Z \pm 1$ suggerisce soltanto che vi sia "simmetria di carica", ovvero sostanziale equivalenza tra le forze $n - n$ e quelle $p - p$. L'equivalenza più completa appare evidente analizzando anche nuclei con A pari quali ${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^6\text{Be}$, ${}^8\text{Li}$, ${}^8\text{Be}$, ${}^8\text{B}$, o ${}^{14}\text{C}$, ${}^{14}\text{N}$ e ${}^{14}\text{O}$, di cui si vedono alcuni livelli nelle figure 4.22 e 4.23. Le differenze tra i livelli si spiegano pressochè totalmente in base agli effetti coulombiani. Questi risultati suggerirono a Heisenberg, Coudon e Cassen, nel 1932, che le forze nucleari debbano essere considerate

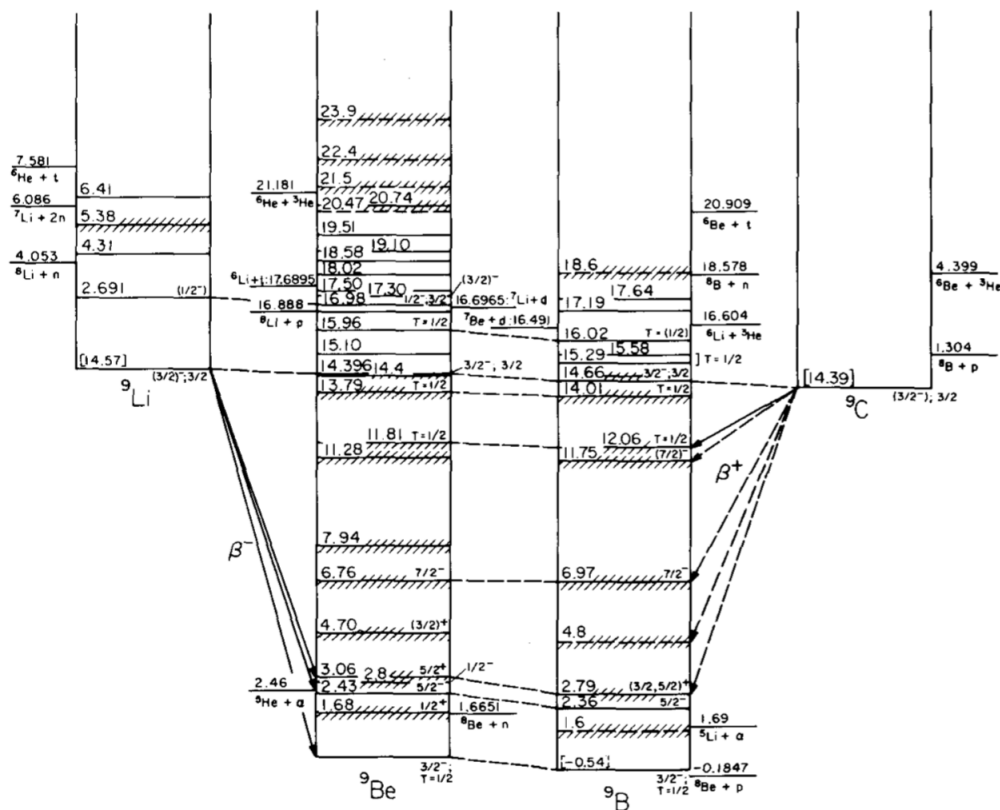


Figura 4.21: Livelli energetici dei nuclei speculari ${}^9\text{Li}$, ${}^9\text{C}$, e ${}^9\text{Be}$, ${}^9\text{B}$.

indipendenti dalla carica elettrica e che quindi, tolto l'effetto coulombiano, le interazioni fra $n - p$, $p - p$ e $n - n$, siano uguali (si trascura comunque, ad esempio, quanto dipende dalla leggera differenza in massa tra protone e neutrone). Questa ipotesi è più forte della pura simmetria di carica ma non dice nulla circa le forze $n - p$.

Per sfruttare le conseguenze di quest'ipotesi si è introdotto il formalismo del cosiddetto *spin isotopico* che permette di assegnare a ogni nucleone un ulteriore grado di libertà cui corrisponde una variabile detta *isospin* o appunto *spin isotopico*, che può assumere soltanto due valori, ed è dunque dicotomica, dovendosi limitare a differenziare tra protone e neutrone. Disponendo già di un modello di variabili dicotomiche per lo spin ordinario dei fermioni, se ne mutua in questo caso la struttura algebrica.

Partendo da un esempio specifico di nuclei speculari si presentano ora alcune caratteristiche della simmetria di isospin per i nuclei.

In figura 4.23 sono riportati i diagrammi dei livelli energetici di ${}^{14}_6\text{C}_8$ e ${}^{14}_8\text{O}_6$, assieme a quelli di ${}^{14}_7\text{N}_7$.

Sono evidenti le somiglianze fra i livelli di ${}^{14}_6\text{C}_8$ e ${}^{14}_8\text{O}_6$, sia per i numeri quantici J^P che nelle spaziature relative dei rispettivi livelli. Le piccole dif-

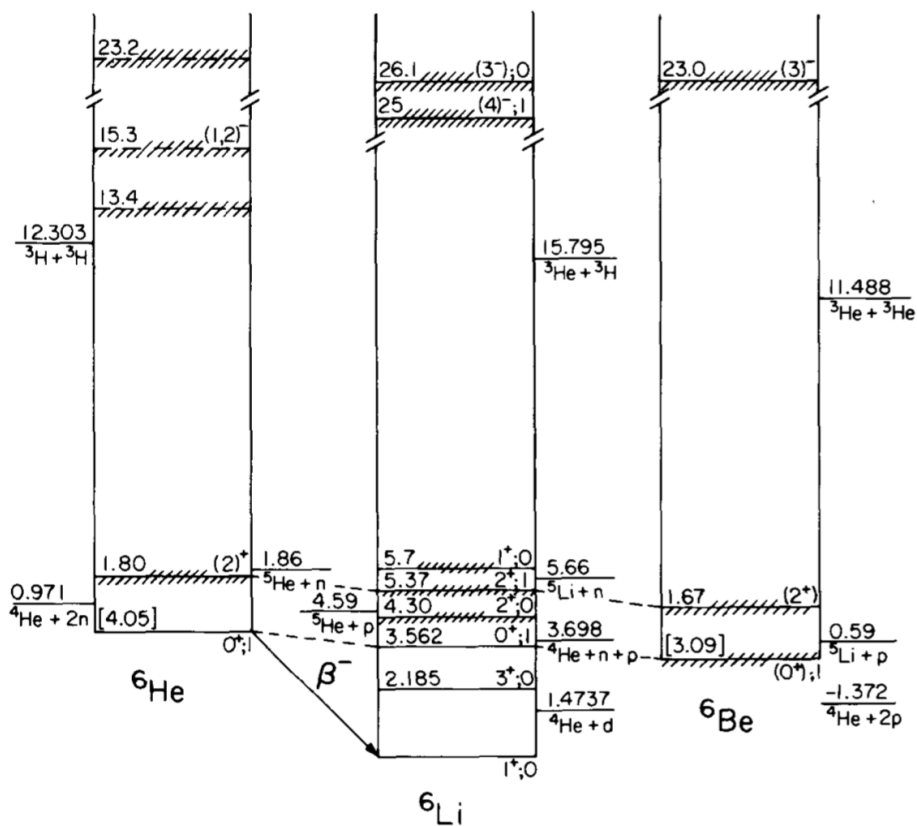


Figura 4.22: Livelli energetici dei nuclei ${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^6\text{Be}$.

ferenze residue e la traslazione globale quasi rigida dei livelli di ${}^{14}_8\text{O}_6$ a valori superiori rispetto a quelli di ${}^{14}_6\text{C}_8$, sono spiegabili con i diversi contributi coulombiani all'energia per i due nuclei.

Livelli energetici equivalenti a quelli di ${}^{14}_6\text{C}_8$ e ${}^{14}_8\text{O}_6$ sono presenti anche nell'isobaro ${}^{14}_7\text{N}_7$, che possiede però anche altri livelli che non trovano corrispondenza con quelli dei due nuclei adiacenti. Si può distinguere fra stati di *tripletto* e stati di *singoletto*.

Questi *multipletti* di stati mostrano una chiara analogia formale con i multipletti degli accoppiamenti di spin. Protoni e neutroni possono quindi, come suggerito da Heisenberg nel 1932, essere visti come due diversi stati di una medesima entità, il *nucleone*, e formano un doppietto di isospin ($I = 1/2$), per le cui terze componenti si pone

$$\begin{cases} \text{protone:} & I_3 = +1/2 \\ \text{neutrone:} & I_3 = -1/2 \end{cases} \quad (4.75)$$

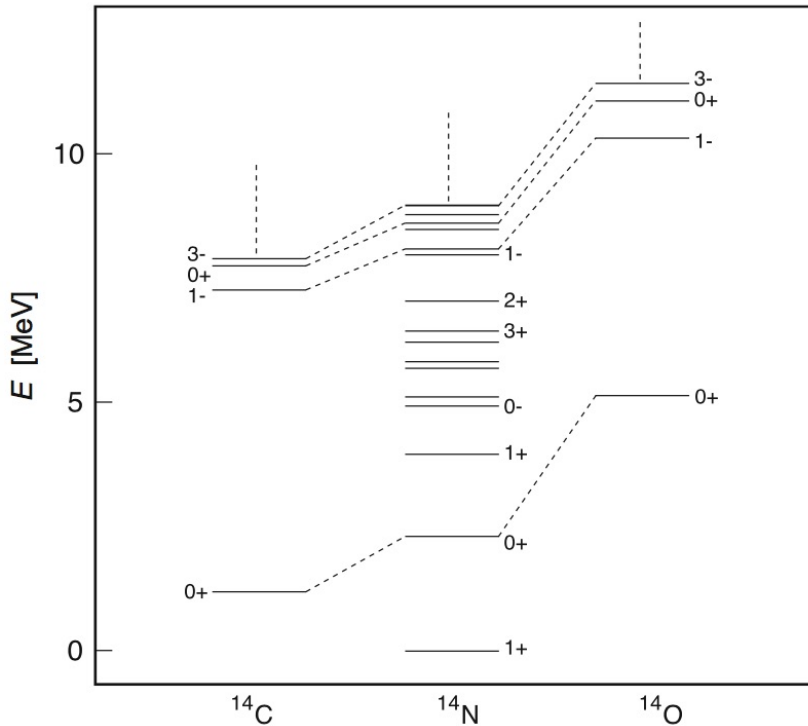


Figura 4.23: Livelli energetici dei nuclei speculari $^{14}_6\text{C}_8$ e $^{14}_8\text{O}_6$.

Essi sono quindi autostati degli operatori I^2 e I_3

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

La sostanziale indipendenza dell'interazione nucleare dalla carica elettrica si traduce così in una legge di conservazione, ovvero una proprietà di simmetria per cui

- l'isospin si conserva nelle interazioni nucleari;
- l'hamiltoniana d'interazione nucleare commuta con l'operatore di isospin ed è invariante per le trasformazioni generate da \vec{I} , cioè le rotazioni nello spazio dell'isospin.

La carica elettrica q_N di un nucleone è legata alla sua terza componente dell'isospin dalla relazione

$$q_N = 1/2 + I_3 \quad (4.77)$$

per cui la conservazione della carica elettrica equivale alla conservazione della terza componente I_3 dell'isospin.

La conservazione dell'isospin \vec{I} , ovvero l'indipendenza dalla carica elettrica, ha un valore più forte della semplice conservazione della carica elettrica.

Si ricordi comunque che l'isospin è un numero quantico *adimensionale*.

La trattazione formale dell'isospin corrisponde così a quella del momento angolare per cui si può ad esempio avere il caso di una coppia protone-neutrone in uno stato di isospin totale pari ad 1 o a 0.

La terza componente dell'isospin è additiva e per un nucleo si ha

$$I_3^{nucleo} = \sum I_3^{nucleoni} = \frac{Z - N}{2} \quad (4.78)$$

Questo aiuta nel descrivere gli stati simili che compaiono in figura 4.23 assegnando rispettivamente $I_3 = -1$, al nucleo ${}^{14}_6\text{C}_8$, e $I_3 = +1$, al nucleo ${}^{14}_8\text{O}_6$: il loro isospin non può quindi essere minore di $I = 1$, per cui gli stati in questi nuclei appartengono necessariamente a un tripletto di stati simili nei nuclei ${}^{14}_6\text{C}_8$, ${}^{14}_7\text{N}_7$ e ${}^{14}_8\text{O}_6$. Siccome però la terza componente I_3 dell'isospin di ${}^{14}_7\text{N}_7$ è pari a 0, ne deriva che questo nucleo può possedere stati addizionali con isospin $I = 0$.

L'azoto ${}^{14}_7\text{N}_7$ è il più stabile isobaro con $A = 14$ e quindi il suo stato fondamentale è necessariamente un singoletto di isospin, perchè se non fosse così ${}^{14}_6\text{C}_8$ dovrebbe possedere uno stato analogo che però, per la minor repulsione coulombiana, dovrebbe essere a un'energia inferiore e quindi più stabile.

In figura 4.23 non sono mostrati stati con $I = 2$, che dovrebbero in linea di principio avere stati analoghi in ${}^{14}_5\text{B}_9$ e ${}^{14}_9\text{F}_5$. Questi nuclei sono però molto instabili e i loro livelli stanno oltre il limite energetico mostrato in figura 4.23.

Gli isobari di $A = 14$ sono nuclei in cui l'effetto dell'energia coulombiana non è particolarmente intenso. L'influenza dell'energia coulombiana cresce al crescere del numero atomico Z , perturbando sempre più le caratteristiche di simmetria di isospin.

L'isospin riveste un ruolo importante anche nella descrizione del comportamento delle particelle e delle strutture sub-nucleari, i quark che come si vedrà possono essere classificati in multipletti di isospin¹⁹.

L'isospin è inoltre un buon numero quantico per la descrizione dei processi dinamici coinvolgenti le interazioni forti, nel corso dei quali appunto, l'isospin del sistema si conserva.

4.3.12 Ricapitolando

il concetto veramente importante che per ora è sufficiente ritenere, come risultato delle evidenze sperimentali sinora illustrate in merito ai nuclei atomici e alla loro struttura, è il fatto che essi costituiscono sistemi legati di nucleoni, carichi e neutri, gli uni di massa pressochè uguale a quella degli altri, che essendo fermioni ubbidiscono al principio di esclusione e interagiscono con una forza che presenta caratteristiche di brevissimo range manifestando saturazione.

Inoltre le regolarità individuate, come ad esempio quelle associabili all'emergere in diverse situazioni dei cosiddetti "numeri magici", fanno pensare che tali nucleoni siano organizzati nei vari nuclei su livelli energetici secondo uno schema in parte mutuabile da quello che spiega la struttura atomica, con la differenza che mentre nell'atomo il potenziale che determina la struttura dei livelli è quello dovuto alla carica elettrica dei protoni concentrata nel nucleo, nel caso del nucleo il potenziale è quello determinato dall'insieme degli stessi nucleoni del nucleo che si muovono dunque in esso soggetti al potenziale che essi stessi determinano.

Capitolo 5

La stabilità dei nuclei

Le specie nucleari oggi note sono circa 3300 ¹: 254 sono i nuclidi naturali stabili, 85 quelli naturali instabili, i restanti sono radionuclidi prodotti artificialmente. Degli 85 nuclidi naturali instabili 32 sono ritenuti *primordiali*, mentre gli altri si sono formati attraverso reazioni e decadimenti nucleari spontanei nel corso dei miliardi di anni di vita dell'universo.

L'uranio ${}_{92}^{238}\text{U}$ è il nucleo con i valori maggiori di A e Z spontaneamente presente in natura. I nuclidi con $Z > 92$, detti *transuranici*, sono tutti prodotti artificialmente.

Tutti gli elementi transuranici e una parte di quelli *suburanici* sono naturalmente instabili rispetto all'emissione di nuclei di elio ${}^4_2\text{He}$ (radioattività α), rispetto all'emissione di elettroni e^- o positroni e^+ (radioattività β), e all'emissione di radiazione elettromagnetica (radioattività γ).

A questi tre tipi di decadimento si aggiunge la *fissione spontanea* dell'isotopo ${}_{92}^{238}\text{U}$, scoperta da K.Petrzhak e G.Flerov nel 1940, che consiste nella scissione del nucleo di uranio in due frammenti nucleari di massa confrontabile.

La radioattività naturale fu casualmente scoperta da H.Bequerel nel 1896 con l'osservazione di *raggi fortemente penetranti*, spontaneamente emessi dal minerale di uraninite picea (pechblenda), individuati per l'impressione da essi prodotta in lastre fotografiche, tramite l'eccitazione per fluorescenza di gas, oltre che per la ionizzazione dell'aria che provocavano ².

Utilizzando come indicatore il potere ionizzante ³, si individuarono tre diversi tipi di radiazioni, fino ad allora sconosciute e molto diverse fra loro, che furono contraddistinte dalle lettere α , β e γ .

I nuclei stabili sono raccolti in una banda piuttosto stretta sul piano $(Z; N)$ del grafico della tabella dei nuclidi, come mostrato in figura 5.1.

¹Paragrafo 4.2, Tabella dei nuclidi.

²Si vedano le prime tecniche di misura della radioattività con elettroscopi ed elettrometri, che hanno anche permesso l'individuazione dei raggi cosmici

³Il potere ionizzante di una radiazione è legato al numero di coppie elettrone-ione che tale radiazione produce interagendo con gli atomi del materiale che attraversa.

Il decadimento radioattivo spontaneo è un fenomeno sostanzialmente indipendente dal tipo di emissione che produce. Nel caso di un decadimento in due corpi esso consiste nella disintegrazione spontanea del nucleo di un atomo, detto *genitore* che si trasforma in un più stabile nucleo *figlio*, più un residuo.

Se anche il nucleo figlio ed eventualmente anche il residuo sono radioattivi il processo continua con decadimenti a catena fino all'ottenimento di prodotti stabili.

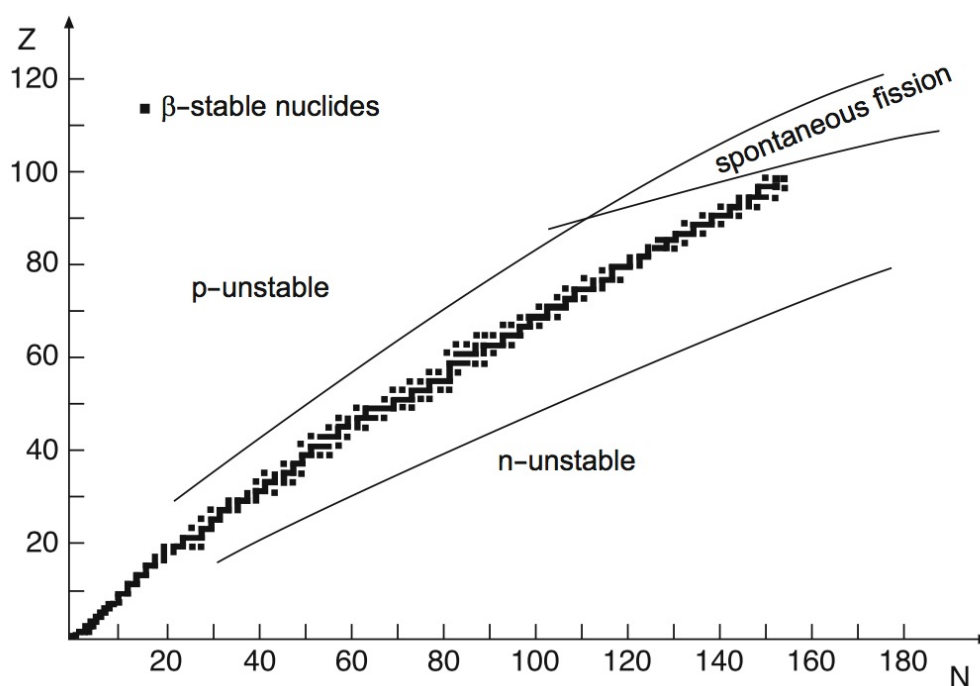


Figura 5.1: Carta dei nuclidi: i quadrati neri nel piano (Z, N) indicano i nuclei della "valle di stabilità".

Ogni nucleo instabile possiede una determinata probabilità λ di decadere in un qualsiasi istante di tempo e la sua *vita media* τ è il reciproco della probabilità di decadimento: $\tau = 1/\lambda$.

Nel capitolo 6 si vedrà come si possano descrivere, prescindendo dalle cause dirette che li determinano, i fenomeni legati ai decadimenti nucleari e come possano essere utilmente sfruttati in molti ambiti.

Nel seguito di questo capitolo si approfondiranno le caratteristiche e i meccanismi dei decadimenti α , β , γ e della fissione dei nuclei, mostrando anche come si possano predire stime attendibili delle vite medie da confrontare poi con i risultati sperimentali.

In un capitolo successivo si tratterà anche della fusione accennando al suo ruolo nel "funzionamento" di una stella.

5.1 Generalità sulla radioattività, ovvero sui decadimenti nucleari

Un nucleo A_ZX si dice *stabile* rispetto al decadimento

$${}^A_ZX \longrightarrow {}^{A-A'}_{Z-Z'}X + \sum_{i=1}^n {}^{A^i}_{Z^i}b \quad (5.1)$$

con $\sum_{i=1}^n A^i = A'$ e $\sum_{i=1}^n Z^i = Z'$, se risulta negativa la differenza fra le masse

$$\Delta M_b(A, Z) = M_X(A, Z) - M_X(A - A', Z - Z') - \sum_{i=1}^n M_b(A^i, Z^i) \quad (5.2)$$

Se invece $\Delta M_b > 0$, il processo 5.1 ha luogo spontaneamente, a meno di vincoli legati al rispetto di leggi di conservazione.

Questo presuppone che gli $n + 1$ prodotti del decadimento vengano emessi contemporaneamente. Non è però sempre così, soprattutto per $n > 2$. In quei casi ci si può trovare di fronte a catene di decadimenti sequenziali che partendo dai prodotti di un iniziale decadimento binario o ternario, ne coinvolgono poi alcuni in decadimenti successivi per cui, alla fine di tutto il processo, si possono avere molti prodotti come risultato del decadimento iniziale di un solo nucleo o particella, ma non tutti saranno stati emessi contemporaneamente. Lo studio di questi casi si può ricondurre a quello di decadimenti indipendenti, se si è in grado di risolvere la sequenza temporale con cui si manifestano.

Nel seguito di questo capitolo si considereranno decadimenti binari o ternari. Per decadimenti binari la quantità

$$E_b(A, Z) = \Delta M_b(A, Z)c^2 < 0 \quad (5.3)$$

è detta energia di legame di ${}^{A'}_{Z'}b$ nel nucleo A_ZX . L'opposto di $E_b(A, Z)$, detta energia di separazione, rappresenta l'energia minima che deve essere fornita al nucleo A_ZX affinché esso emetta ${}^{A'}_{Z'}b$.

Quindi, equivalentemente a quanto visto sopra, se $E_b(A, Z) > 0$, il processo avviene spontaneamente, e i termini a destra della freccia nella 5.1 sono detti *prodotti del decadimento*.

La quantità totale di energia rilasciata in un decadimento è anche detta Q -valore del decadimento, e si ha quindi che un decadimento può aver luogo spontaneamente solo se $Q > 0$.

Dall'analisi dei valori sperimentali delle masse dei nuclidi naturali e di molti artificiali si trova, nel caso in cui ${}^{A'}_{Z'}b$ sia un protone p , un neutrone n o un deutone $d \equiv {}^2_1\text{H}$, che vale sempre $E_b(A, Z) < 0$, ovvero il decadimento spontaneo 5.1 non può aver luogo, quindi le radioattività naturali *protonica*, *neutronica* e *deutonica* sono energeticamente proibite.

In alcuni casi si osserva la cosiddetta *emissione ritardata* di neutroni o di protoni, che hanno però luogo sempre immediatamente a ridosso dell'emissione di un elettrone, o di un positrone (o di una cattura K), conseguenti a un decadimento β .

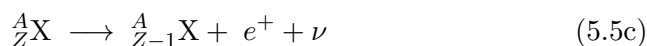
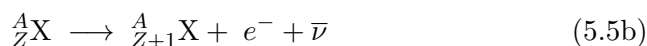
Per alcuni nuclei pesanti si ha $E_\alpha(A, Z) > 0$, ed è quindi energeticamente possibile l'emissione spontanea di particelle α da parte di quei nuclei pesanti. La grande energia di legame del nucleo di elio, pari a circa 28.3 MeV, rende inoltre la sua emissione da un nucleo pesante particolarmente favorevole, da un punto di vista energetico, rispetto a quella di altri frammenti nucleari leggeri.

Calcolando le energie di legame di protoni e neutroni, tramite la 5.3 si evidenzia che i nuclei con numero N^* di neutroni pari a

$$N^* = 2, 8, 20, 50, 82, 126 \quad (5.4)$$

sono eccezionalmente stabili, in quanto le energie di legame per i loro protoni e neutroni sono maggiori di quelle calcolate per i nuclei con valori adiacenti di N . Si noti la sistematica ricorrenza della sequenza 5.4, già individuata nel paragrafo 4.2.

Gli schemi di decadimento nucleare α e β sono rispettivamente



Analizzando il diagramma $Z - N$ si trova che il punto rappresentativo di un nucleo β -instabile si sposta lungo una linea isobarica verso il basso oppure verso l'alto, a seconda che venga emesso un positrone e^+ o un elettrone e^- ; il punto rappresentativo di un nucleo α -instabile si sposta invece nel punto di coordinate $(N - 2; Z - 2)$. Questa legge dello spostamento radioattivo fu formulata nel 1913, indipendentemente da F. Soddy e K. Fajans.

Si trova sperimentalmente che tutti i nuclei con $Z > 82$ hanno almeno un nuclide α -instabile. Fra i pochi nuclei α -instabili con $Z < 82$ ci sono il neodimio (${}^{144}_{60}\text{Nd}$), il samario (${}^{146}_{62}\text{Sm}$ e ${}^{147}_{62}\text{Sm}$), il gadolinio (${}^{148}_{64}\text{Gd}$ e ${}^{149}_{64}\text{Gd}$), il terbio (${}^{149}_{65}\text{Tb}$ e ${}^{150}_{65}\text{Tb}$), l'afnio (${}^{174}_{72}\text{Hf}$), il platino (${}^{190}_{78}\text{Pt}$).

I nuclei α -instabili ${}^{238}_{92}\text{U}$, ${}^{235}_{92}\text{U}$ e ${}^{232}_{90}\text{Th}$ sono i capostipiti di tre serie radioattive ognuna delle quali, tramite una successione di decadimenti a catena α e β , termina con un isotopo stabile del piombo.

Nel capitolo 6 si tratterà matematicamente anche la descrizione di una successione di decadimenti a catena.

Per quanto concerne l'interpretazione del processo di decadimento α , formulata nel 1928 da G.Gamow, R.Gurney e F.Condon, essa rappresenta

una brillante applicazione della meccanica quantistica, come si vedrà nei paragrafi 5.2, 5.2.2 e in Appendice C.

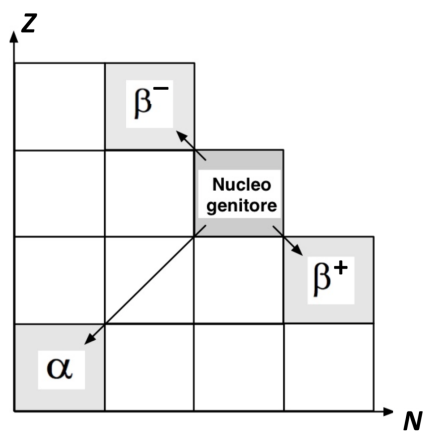


Figura 5.2: Illustrazione della legge dello spostamento radioattivo di Soddy-Fajans.