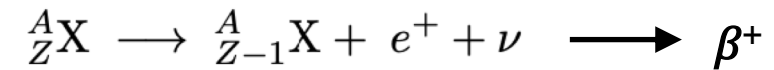
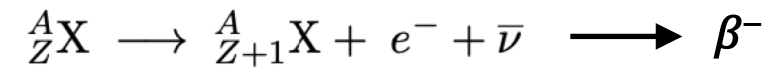
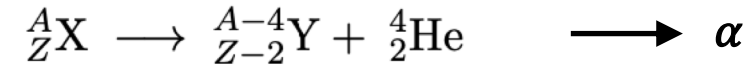


La stabilità dei nuclei (2)

Prima di affrontare due delle modalità di decadimento tipiche dei nuclei atomici, ovvero le radioattività α e β , studieremo l'approccio statistico allo studio dei decadimenti radioattivi e ne vedremo alcune importanti e utili applicazioni.

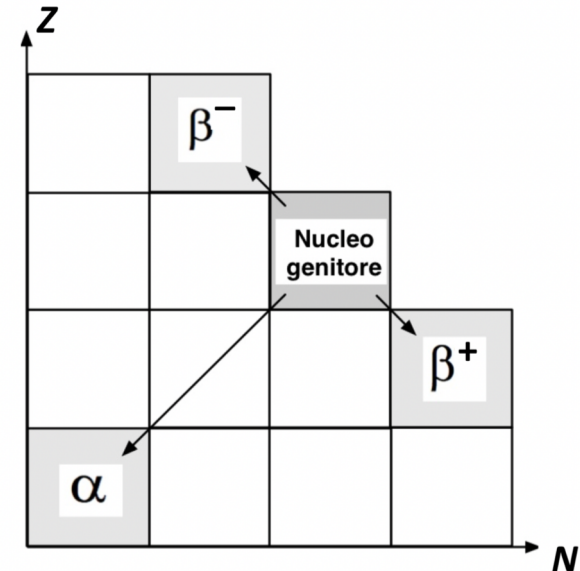
Limitiamoci per ora a ricordare, in merito ai decadimenti nucleari α e β , che li indichiamo schematicamente con le scritture qui a fianco



Analizzando poi il diagramma $Z - N$ (tabella dei nuclidi) si trova che il punto rappresentativo di un nucleo β -instabile si sposta lungo una linea isobarica verso il basso oppure verso l'alto, a seconda che sia emesso un positrone e^{+} o un elettrone e^{-} .

Il punto rappresentativo di un nucleo α -instabile si sposta invece nel punto di coordinate $(N - 2; Z - 2)$.

Questa legge detta dello "spostamento radio-attivo" fu formulata nel 1913, indipendentemente da Soddy e Fajans.



I risultati degli innumerevoli studi condotti a partire dall'anno in cui Bequerel scoprì la radioattività, il 1896, portarono a capire che il rateo di decadimento di una sostanza radioattiva pura decresce, col passare del tempo, in accordo con un andamento esponenziale decrescente.

Da questo discendono alcune importanti conseguenze:

- la radioattività è un fenomeno che coinvolge ogni singolo atomo di una certa sostanza, e non il campione di sostanza radioattiva nella sua interezza
- il decadimento radioattivo **di un atomo** è un processo **intrinsecamente statistico**, quindi gli atomi di una sostanza, **“non invecchiano”**, ed è impossibile predire quando uno specifico atomo deva decadere: ciò conduce naturalmente alla legge di tipo esponenziale decrescente col tempo, come trovato sperimentalmente
- considerando processi che coinvolgono grandi numeri di atomi li si può trattare alla stregua di variabili continue e supposto un sistema costituito a un certo istante da un gran numero di atomi radioattivi, la legge di decadimento fornisce il numero medio di atomi del sistema a un qualsiasi istante successivo

Decadimento radioattivo di una sola sostanza

La probabilità che un atomo decada nell'intervallo di tempo dt è proporzionale a dt moltiplicato per una costante λ , detta *costante o probabilità di decadimento*. λ ha le dimensioni dell'inverso di un tempo, risulta indipendente dall'età dell'atomo ed è caratteristica della sostanza e del tipo di decadimento.

Questa legge si applica indifferentemente a ogni tipo di decadimento radioattivo: α , β , γ , cattura elettronica, fissione spontanea.

Supposto:

- un numero iniziale molto grande $N(0)$ di atomi di una singola sostanza radioattiva;
- che ogni singolo decadimento sia indipendente da tutti gli altri;

considerando il numero residuo $N(t)$ di atomi di sostanza a un istante successivo t come una variabile continua, la diminuzione $-dN$ di atomi nell'intervallo di tempo dt è data da

$$-dN(t) = \lambda N(t)dt$$

e integrando rispetto al tempo

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$$

L'inverso della costante di decadimento, $\tau = 1/\lambda$ è detto *vita media*, se infatti $\frac{\lambda N(t)}{N(0)} = \frac{\lambda N(0)e^{-\lambda t}}{N(0)} = \lambda e^{-\lambda t}$ è la funzione di

distribuzione statistica dei tempi di vita di ogni atomo della sostanza radioattiva, il loro tempo medio di vita $\langle t \rangle$ è

$$\langle t \rangle = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} = \tau$$

Si definisce **tempo di dimezzamento** $T_{1/2}$ della sostanza radioattiva, quello per cui: $N(T_{1/2}) = N(0)e^{-T_{1/2}/\tau} = \frac{N(0)}{2}$

di conseguenza si ha: $\frac{T_{1/2}}{\tau} = \lambda T_{1/2} = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad T_{1/2} = \tau \ln 2 \simeq 0.693147 \cdot \tau$

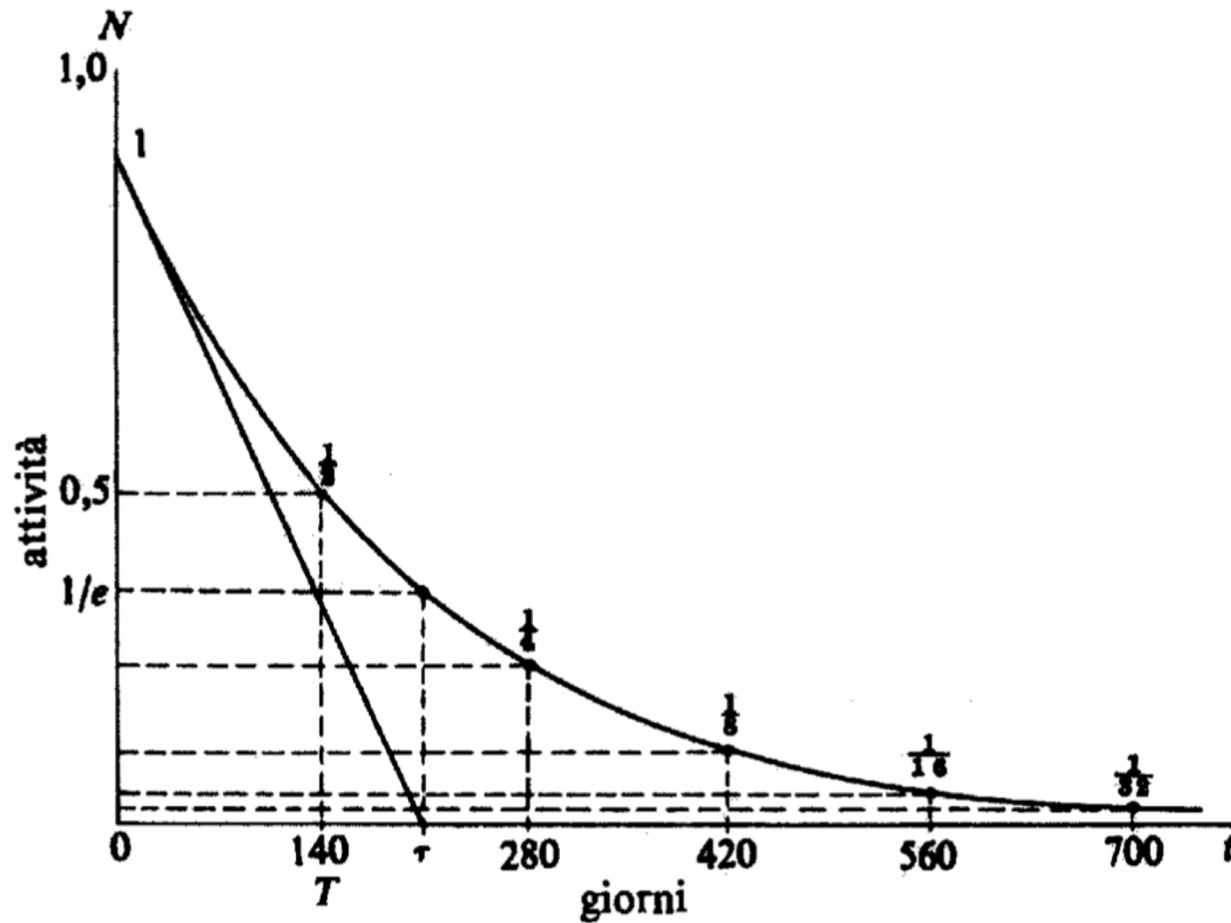
Il numero o **rateo** di decadimenti nell'unità di tempo, detto anche **attività** $A(t)$ della sostanza radioattiva, è dato da:

$$A(t) = \left| \frac{dN(t)}{dt} \right| = \lambda N(t) = \lambda N(0)e^{-\lambda t}$$

anch'esso funzione decrescente del tempo, poiché al suo trascorrere il numero di atomi non ancora decaduti e che possono quindi decadere, cala.

L'unità di misura internazionale dell'attività è il **Becquerel** (Bq), corrispondente a 1 disintegrazione al secondo.

E ancora molto usato anche il **Curie** (Ci), corrispondente a 3.7×10^{10} Bq.



Decadimento di sostanza radioattiva con tempo di dimezzamento $T_{1/2} = 140$ giorni.

La tangente a $N(t)$ nel punto d'ascissa $t = 0$, interseca l'asse t nel punto di valore τ .

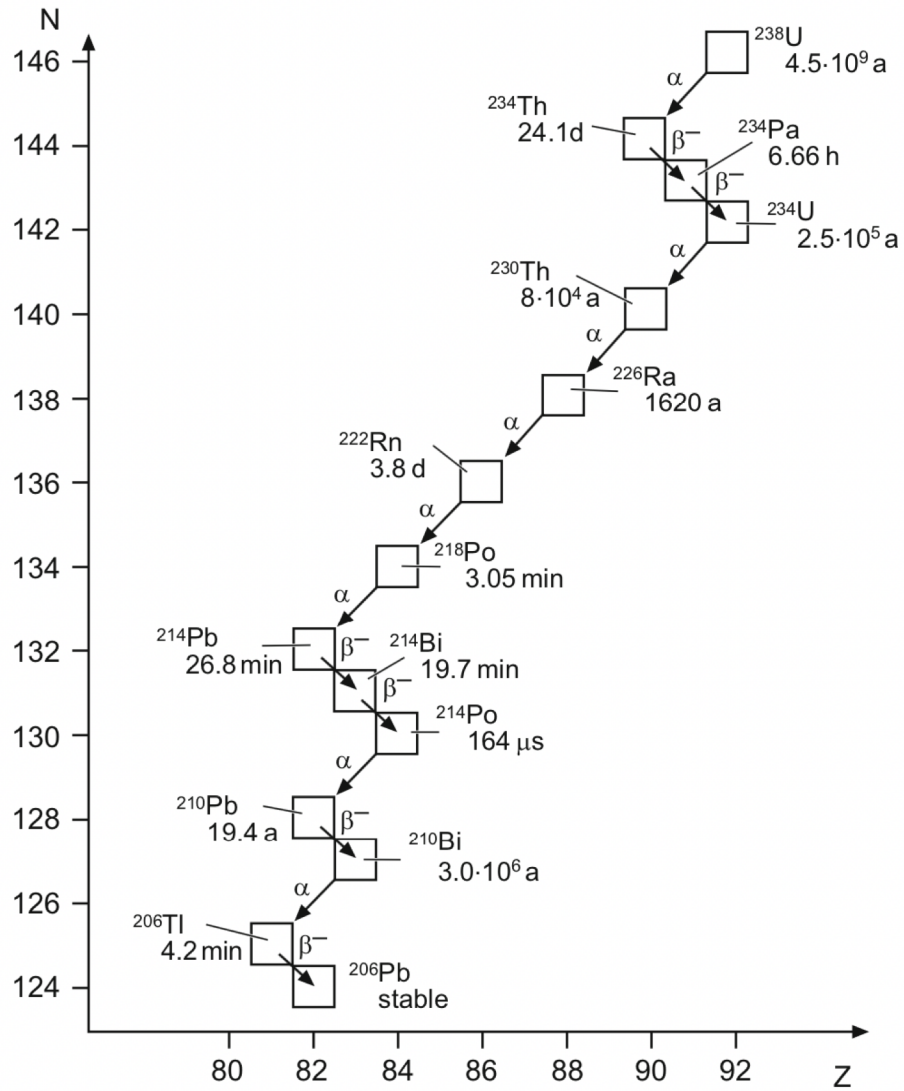
Una sostanza radioattiva può avere diversi meccanismi indipendenti e competitivi di decadimento, detti **canali di decadimento**, ognuno caratterizzato da una ben definita costante λ_i , originando diverse sostanze figlie.

Se una sostanza ha n diversi e indipendenti canali di decadimento, la sua probabilità totale λ_{tot} di decadimento, per l'additività delle probabilità di eventi indipendenti, è

$$\lambda_{tot} = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tau_i} = \frac{1}{\tau_{tot}}$$

Un decadimento con $n > 1$ viene detto **diramazione**, e il rapporto fra le quantità di due diversi tipi i e j di prodotti di decadimento associati a due diversi canali, in un certo intervallo di tempo, è detto **rapporto di diramazione (branching ratio) relativo** e coincide col rapporto fra le rispettive costanti di decadimento, λ_i/λ_j .

Decadimento radioattivo di più sostanze



Famiglia radioattiva naturale dell' ^{238}U

Una sostanza radioattiva può decadere in un'altra anch'essa radioattiva e le due si dicono in *relazione genetica*, con la prima chiamata **genitore** e la seconda **figlia**. Ciò può estendersi a molte "generazioni".

Si supponga di avere a $t = 0$, $N_1(0)$ ed $N_2(0)$ atomi delle sostanze (1) e (2), in relazione genetica. Se ne vogliono trovare le quantità $N_1(t)$ ed $N_2(t)$ nel generico istante t successivo.

- (1) decade come $dN_1 = -N_1\lambda_1 dt$ e per ogni suo atomo decaduto se ne
- (2) forma uno della sostanza (2).

Il numero di atomi (2) quindi varia per due ragioni: **diminuisce** per i decadimenti spontanei degli atomi della sostanza (2); **cresce** per la formazione di atomi della sostanza (2) come prodotto del decadimento di atomi della sostanza (1).

La variazione totale risultante è quindi

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$$

Con λ_1 e λ_2 le costanti di decadimento delle due sostanze.

Per una terza sostanza derivante dal decadimento di **(2)** si ha $\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3$, e così via.

Con k diverse generazioni in cascata si ha un sistema di k equazioni differenziali che può essere risolto ponendo:

$$\begin{cases} N_1 = a_{11}e^{-\lambda_1 t} \\ N_2 = a_{21}e^{-\lambda_1 t} + a_{22}e^{-\lambda_2 t} \\ \dots \\ N_k = a_{k1}e^{-\lambda_1 t} + a_{k2}e^{-\lambda_2 t} + \dots + a_{kk}e^{-\lambda_k t} \end{cases}$$

Le costanti a_{ij} vanno determinate in modo che le **(*)** soddisfino le equazioni differenziali e le condizioni iniziali $N_i(0)$.

Per i coefficienti a_{ij} con $i \neq j$ si ottiene la formula di ricorrenza

$$a_{ij} = a_{i-1,j} \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}}{(\lambda_1 - \lambda_j)(\lambda_2 - \lambda_j) \dots (\lambda_{i-1} - \lambda_j)} a_{11}$$

I coefficienti con indici uguali si ricavano dalla condizione $N_i(0) = a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{ik}$

Ogni espressione della **(*)** contiene una somma d'esponenziali in cui compaiono le costanti di disintegrazione di tutte le sostanze che precedono quella considerata.

Ha notevole importanza pratica il caso in cui all'inizio c'è la sola sostanza 1 con $N_1(0)$ atomi.

Procedendo fino alla terza generazione si ha:

$$\begin{cases} N_1(t) = N_1(0)e^{-\lambda_1 t} \\ N_2(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \\ N_3(t) = N_1(0) \lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right) \end{cases} \quad (**)$$

Ci si può ora chiedere:

- con due sostanze radioattive **(1)** e **(2)** di una stessa catena $N_1(t) \xrightarrow{\lambda_1} N_2(t)$, in quale istante $t^*_{1,2}$ le due attività combaciano ?

Si ottiene $t^*_{1,2} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)$, coincidente con l'istante t_{max} in cui la sostanza figlia raggiunge la massima entità.

Quattro casi notevoli:

1) $\lambda_1 > \lambda_2$, dopo un tempo t sufficiente affinché $t \gg 1/\lambda_1$ si ha per $N_2(t)$, dalle (**)
$$N_2(t) \cong N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t}$$

ovvero la sostanza figlia, per $t > t_{max}$, decade sostanzialmente secondo la propria costante di decadimento λ_2 ;

2) $\lambda_1 < \lambda_2$, dopo t sufficiente affinché $t \gg 1/\lambda_2$, e quindi $t > t_{max}$, si ha per $N_2(t)$, dalle (**)
$$N_2(t) \cong N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t}$$

ovvero la sostanza figlia decade sostanzialmente secondo la costante di decadimento λ_1 del genitore;

3) $\lambda_1 \ll \lambda_2$, per $t > t_{max}$, si ha per $A_2(t) \cong A_1(t)$, individuando un **equilibrio transiente** fra le attività degli elementi **(1)** e **(2)**, con un rapporto sostanzialmente costante fra esse: $A_2/A_1 \cong \lambda_2 / (\lambda_2 - \lambda_1) \cong 1$.

4) $\lambda_1 \ll \lambda_2$ e $\lambda_1 \cong 0$, considerando tempi t tali che $1/\lambda_1 \gg t \gg 1/\lambda_2$, allora

$$\begin{cases} N_1(t) \cong N_1(0) \\ N_2(t) \cong N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 t}) \end{cases}$$

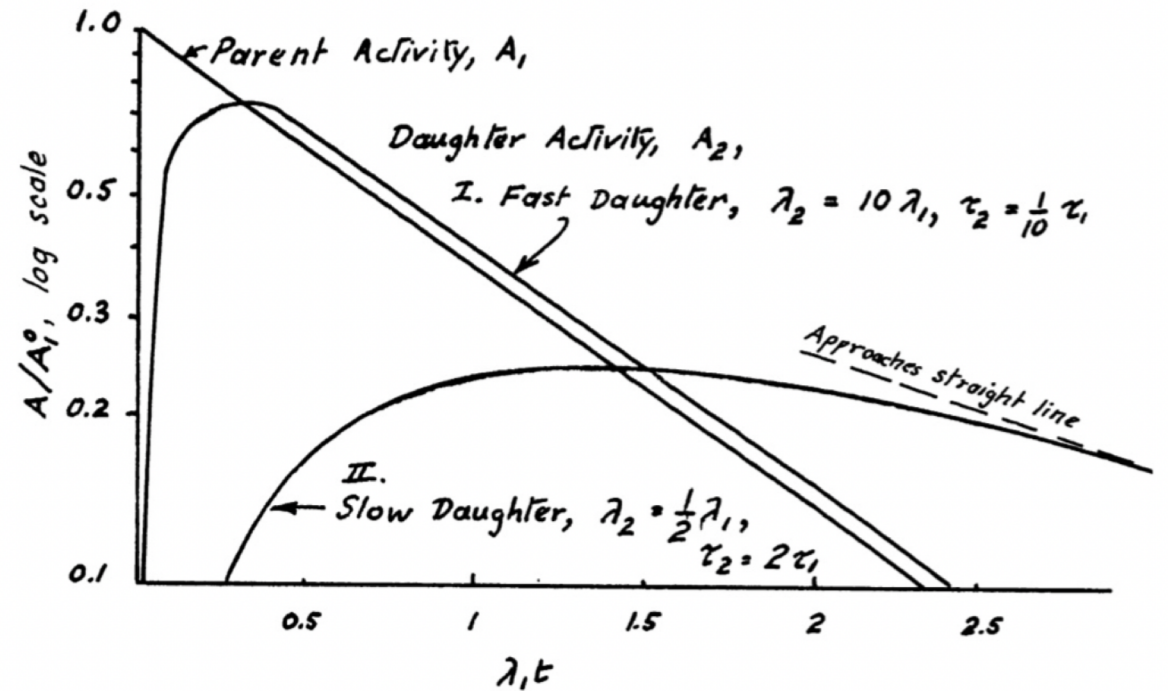
L'attività $A_1(t)$ è quindi molto piccola e quasi costante e $A_2(t)$ tende all'equilibrio per $t \gg \lambda_2^{-1}$, quando $e^{-\lambda_2 t} \rightarrow 0$ e $A_2(t) \rightarrow A_1(0)$.

L'effettivo equilibrio richiederebbe però $dN_1(t)/dt = 0$, che esteso al caso di una generica catena radioattiva con k decadimenti successivi implicherebbe l'uguaglianza di tutte le attività $A_1(t) = A_2(t) = A_3(t) = \dots = A_k(t)$.

La condizione non può essere effettivamente raggiunta poiché richiederebbe il genitore stabile con $\lambda_1 = 0$ e $\tau_1 = \infty$ ma può essere approssimata quanto più lentamente decade il genitore rispetto a ogni sostanza figlia della catena radioattiva. Al crescere di t si tende allora alla condizione

$$N_1(t)\lambda_1 = N_2(t)\lambda_2 = N_3(t)\lambda_3 = \dots = N_k(t)\lambda_k$$

detta "equilibrio secolare".



Ratei di decadimento di particelle figlie con probabilità di decadimento minore o maggiore di quella di uno stesso genitore.

Tecniche radioattive di datazione

Le più attendibili datazioni di reperti geologici sfruttano tecniche legate ai decadimenti radioattivi, e le sostanze comunemente utilizzate sono l'uranio e i suoi isotopi, torio, potassio e rubidio.

La datazione radioattiva permette di determinare il tempo di formazione dei minerali, la loro età, che può essere dell'ordine di $\sim 10^9$ y.

Una roccia che alla formazione contenesse dell'uranio, nel tempo trascorso ha accumulato elio prodotto dal decadimento dell'uranio.

Ogni atomo di ^{238}U che si trasforma in ^{206}Pb emette **8** particelle α che se non sfuggono dalla roccia permettono di datarla confrontando ^{238}U ancora presente ed **He** nel frattempo accumulato. Si utilizza anche il rapporto uranio/piombo che risente meno dei problemi dovuti a diffusione o fuga dalle rocce tipici dell'elio.

In pratica si parte dai numeri relativi di nuclei genitori e figli osservati al tempo t_1 (oggi) in un campione, confrontandoli con quelli al tempo t_0 , quando il materiale si è cristallizzato intrappolando i nuclei genitori nella loro "posizione" attuale.

Dato il decadimento dell'isotopo genitore **G** in quello figlio **F**, si *contano*, con metodi chimici, gli attuali numeri di **G** ed **F**, $N_G(t_1)$ e $N_F(t_1)$; se solo dal tempo t_0 ha agito solo il decadimento radioattivo, supposto che al tempo t_0 non vi fossero ancora nuclei figli, cioè $N_F(t_0) = 0$, si ha

$$N_F(t_1) + N_G(t_1) = N_G(t_0) \qquad N_G(t_1) = N_G(t_0) e^{-\lambda(t_1-t_0)}$$

$$\Delta t \equiv t_1 - t_0 = \frac{1}{\lambda} \ln \left[\frac{N_G(t_0)}{N_G(t_1)} \right] = \frac{1}{\lambda} \ln \left[1 + \frac{N_F(t_1)}{N_G(t_1)} \right]$$

la costante di decadimento λ del genitore è misurabile in laboratorio, e dalla precisione con cui è nota e dalla statistica di conteggio per N_G ed N_F , dipende la precisione sull'età del campione.

Per datare campioni più giovani, come quelli organici, si usa l'isotopo radioattivo ^{14}C del carbonio.

Una struttura organica vivente assorbe CO_2 , che contiene i due isotopi stabili ^{12}C (98.89%) e ^{13}C (1.11%).

Il ^{14}C radioattivo, che decade β^- in ^{14}N con una vita media $\tau = 8267$ anni, è continuamente formato negli strati alti dell'atmosfera per cattura da parte dell'azoto atmosferico, dei neutroni termici, prodotti secondari del bombardamento dei raggi cosmici.

L'equilibrio dinamico che si instaura fra produzione e decadimento, supposti stabili la struttura chimica e di densità media dell'atmosfera, oltreché il flusso di raggi cosmici, mantiene costante la concentrazione di ^{14}C in essa.

Il ^{14}C così prodotto con un rateo $Q(^{14}\text{C})$, reagisce con l'ossigeno per dare anidride carbonica $^{14}\text{CO}_2$ che viene riutilizzata dalle piante durante la foto-sintesi.

Con questo meccanismo il ^{14}C si trasferisce nei composti organici e attraverso la catena alimentare è presente in ogni struttura vivente secondo un preciso rapporto (abbondanza isotopica), pari a circa **1.3 atomi di ^{14}C ogni 10^{12} atomi di ^{12}C** .

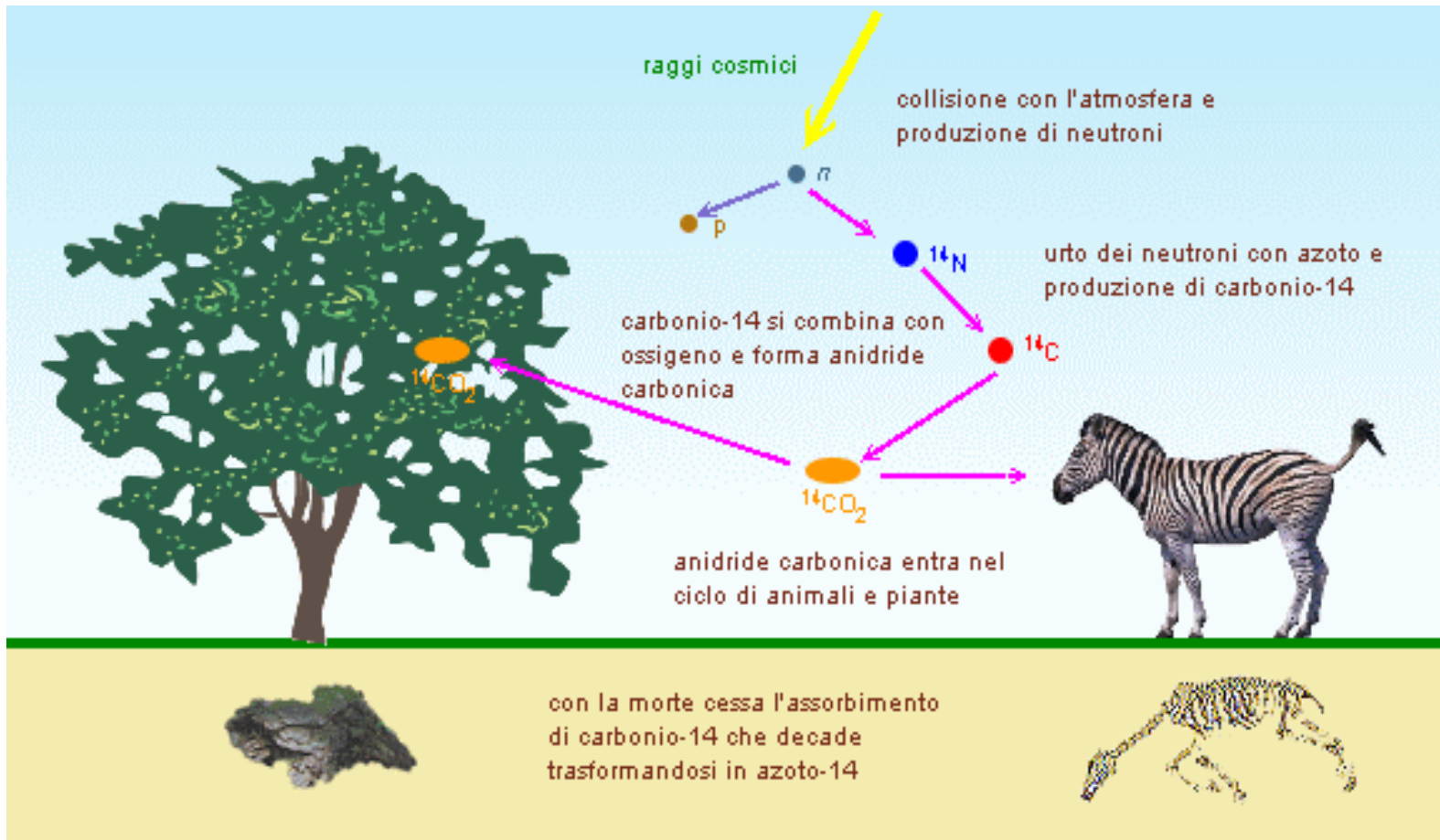
Tutta la materia vivente è dunque leggermente radioattiva in funzione del suo contenuto di ^{14}C .

Se il rateo di produzione di ^{14}C si mantiene costante, la materia organica, se vive sufficientemente a lungo, raggiunge l'equilibrio del suo contenuto di ^{14}C con quello dell'atmosfera

$$\frac{dN(^{14}\text{C})}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q(^{14}\text{C}) = \lambda(^{14}\text{C}) N(^{14}\text{C})$$

e col metabolismo lo mantiene sino alla morte, a partire dalla quale non assume più ^{14}C e quindi interrompe tale l'equilibrio.

Dalla morte dell'organismo il suo contenuto di ^{14}C decresce secondo la legge del decadimento radioattivo.



Detta attività specifica A_{sp} di un campione la sua attività per unità di massa, e detti t_0 il tempo della morte dell'organismo, e t_1 il tempo della misura, per l'età $\Delta t = (t_1 - t_0)$ del campione si ha

$$A_{sp} (^{14}\text{C}, t_1) = A_{sp} (^{14}\text{C}, t_0) e^{-\lambda(t_1 - t_0)}$$

da cui

$$\Delta t \equiv (t_1 - t_0) = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{A_{sp} (^{14}\text{C}, t_0)}{A_{sp} (^{14}\text{C}, t_1)}$$

I metodi di datazione che sfruttano l'attività danno affidamento fino a tempi sostanzialmente non superiori a $7 \times \tau$, quindi con il ^{14}C si possono ottenere datazioni di una certa attendibilità fino a tempi inferiori a circa 6×10^4 y.