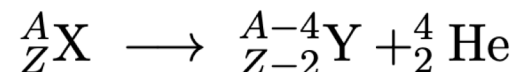


Radioattività α

Rutherford nel 1909, facendo decadere sotto vuoto una sostanza radioattiva che emette particelle α scoprì presenza di elio nell'ambiente originariamente vuoto



Decadimento α dovuto ad azione concomitante di forze nucleari ed elettromagnetiche.

Sua importanza cresce con A , come repulsione coulombiana che dipendendo da Z^2 , cresce più rapidamente della forza di legame nucleare che dipende \approx da A solo per nuclei più leggeri e satura al crescere di A .

Un decadimento spontaneo porta una struttura a ridurre la propria massa con la maggior possibile trasformazione di questa in energia cinetica, ed emettendo una particella α , che ha grande energia di legame, questo risultato si consegue con alta efficienza.

I risultati sperimentali mostrano energie cinetiche delle particelle α emesse inferiori ai 10 MeV.

La massa di una particella α è di $\sim 3.7274 \text{ GeV}/c^2$, per cui si può studiare l'energetica del processo con l'approccio non relativistico.

- Nucleo genitore a riposo rispetto a osservatore inerziale solidale con SL (coincide con CM)

Conservazione dell'energia $M_X c^2 = M_Y c^2 + E_{k,Y} + M_\alpha c^2 + E_{k,\alpha}$

Q-valore (energia a disposizione del processo) $E_{k,Y} + E_{k,\alpha} = (M_X - M_Y - M_\alpha) c^2 = \Delta M c^2 \equiv Q$

con: $E_{k,Y} = \frac{1}{2} M_Y v_Y^2$, $E_{k,\alpha} = \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2$. La conservazione dell'impulso da'

$$M_Y \vec{v}_Y = -M_\alpha \vec{v}_\alpha \quad \text{da cui,} \quad v_Y = \frac{M_\alpha}{M_Y} v_\alpha$$

quindi
$$E_{k,Y} + E_{k,\alpha} = E_{k,\alpha} \left(\frac{M_\alpha}{M_Y} + 1 \right) = Q_\alpha$$

e ancora

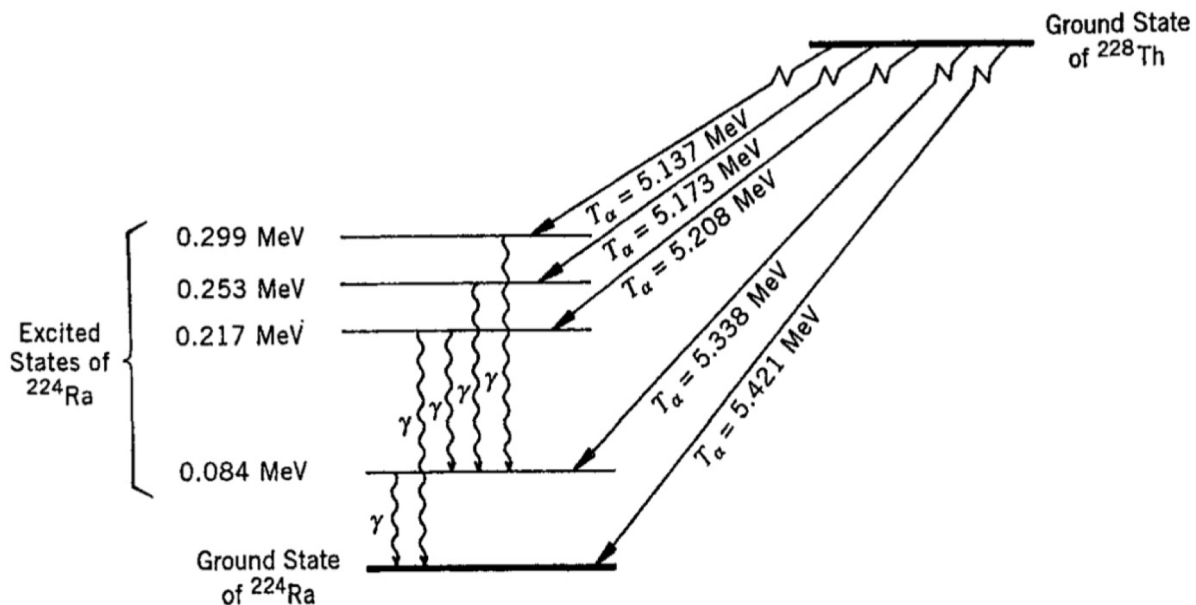
$$E_{k,\alpha} = \frac{M_Y}{M_\alpha + M_Y} Q_\alpha \quad \text{ed} \quad E_{k,Y} = \frac{M_\alpha}{M_Y} E_{k,\alpha}$$

La necessaria positività di $E_{k,\alpha}$, implica che il decadimento sia un processo esotermico, ovvero $\Delta M \geq 0$ e $Q_\alpha \geq 0$.

Per nuclei pesanti, con $A \gg 1$, gran parte dell'energia liberata diventa energia cinetica di α , e si può trascurare il rinculo del nucleo residuo.

Decadimento in due corpi $\rightarrow E_{k,\alpha}$ e $|v_\alpha|$ dovrebbero assumere entrambi un unico valore.

Accurate misure mostrano però una struttura fine negli spettri delle α emesse. Le α più energetiche sono prodotte da sole, quelle meno energetiche sono sempre accompagnate dal concomitante emissione di fotoni, come si vede per lo spettro del torio in figura.



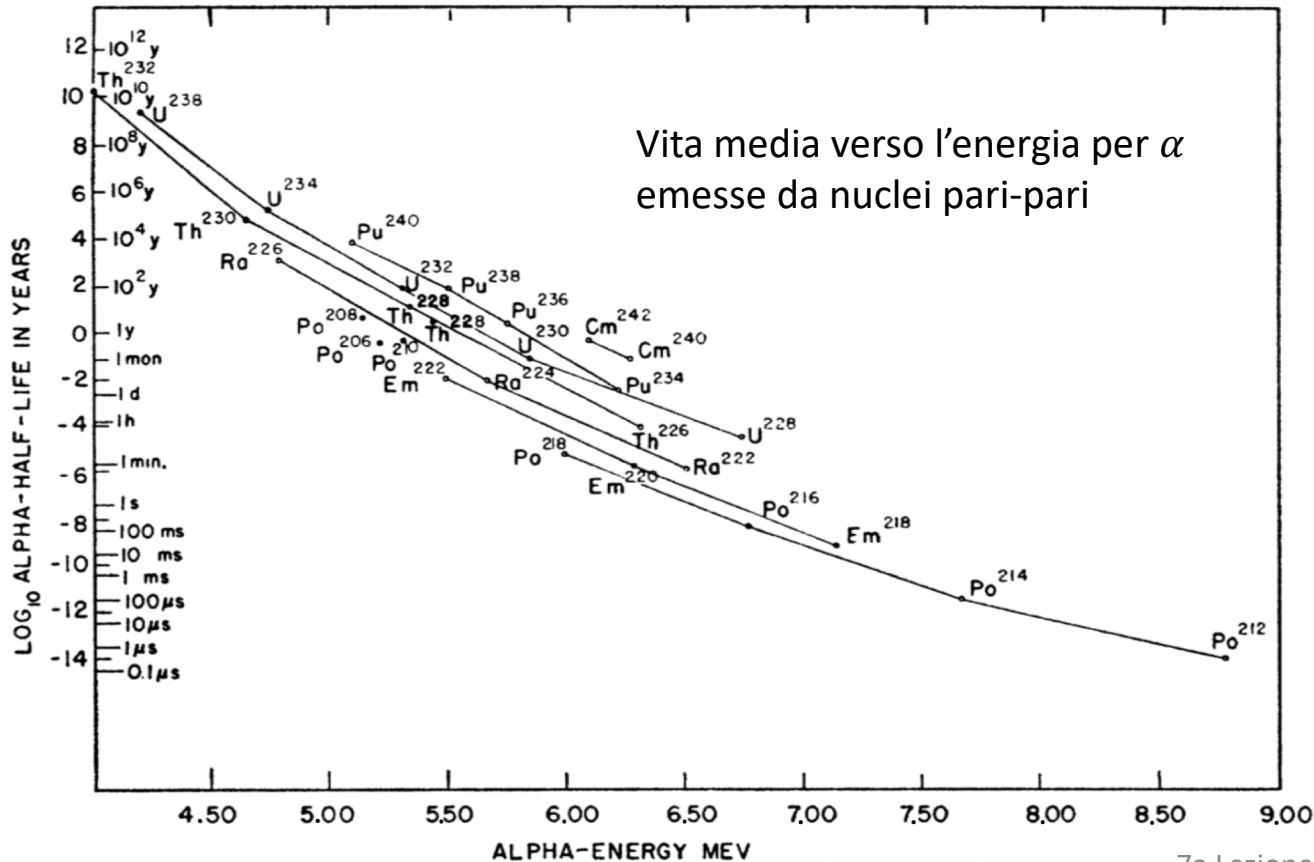
Questo suggerisce presenza di livelli energetici e di una sottostante struttura di stati discreti.

Un nucleo genitore, decadendo α , può anche trasformarsi in uno stato eccitato del nucleo figlio emettendo una particella α di energia inferiore all'intero Q -valore, e il nucleo figlio eccitato può quindi decadere al proprio livello fondamentale emettendo fotoni γ .

Si osserva anche emissione di α con energie maggiori di quelle deducibili dal Q -valore, quando il decadimento avviene da livelli eccitati del nucleo genitore.

Le vite medie $\tau_\alpha = 1/\lambda_\alpha$ dei nuclei α -instabili variano da un massimo di circa 10^{10} anni, fino a circa 10^{-7} s; le corrispondenti energie $E_{k,\alpha}$ variano da alcuni MeV fino a circa 10 MeV.

Sperimentalmente λ_α del nucleo genitore è funzione rapidamente crescente di $E_{k,\alpha}$, ovvero di Q_α , dunque la riga più intensa dello spettro è quella dal livello fondamentale del genitore al quello del figlio.



Geiger e Nuttall suggerirono una relazione empirica che collega probabilità di decadimento λ_α e l'energia totale (Q -valore), per ogni catena isotopica

$$\log \lambda_\alpha = A(Z) Q_\alpha^{-1/2} + B(Z)$$

con $A(Z)$ e $B(Z)$ da determinare tramite fit sui dati sperimentali.

La relazione di Geiger e Nuttall descrive abbastanza bene i dati finché si mantiene lineare la dipendenza di $\log \lambda_\alpha$ dal numero di neutroni.

“Risultato che una **teoria del decadimento alfa** deve riprodurre”

Soglia di instabilità α

Ricerca dei valori di A e Z per cui è energeticamente possibile decadimento α . **Può aver luogo solo se accompagnato da aumento dell'energia di legame per nucleone nei prodotti finali, rispetto al nucleo genitore.**

Essendo ^{56}Fe il nuclide più stabile, ciò è possibile solo nella regione dove $\partial\langle B \rangle / \partial A < 0$ e contemporaneamente $A > 60$.

Q -valore si scrive in termini delle energie medie di legame per nucleone:

$$Q \equiv [M(A, Z) - M(A - 4, Z - 2) - M_\alpha] c^2 =$$

$$= A(\langle B_Y \rangle - \langle B_X \rangle) - 4(\langle B_Y \rangle - \langle B_\alpha \rangle) > 0$$

$\langle B_\alpha \rangle \simeq 7.1 \text{ MeV}$, minore di quelle dei nuclei pesanti coinvolti nel decadimento, ne segue che il secondo termine è positivo, per cui la soglia di instabilità deve essere decisamente superiore ad $A = 60$.

Da **Weizsacker** senza termine d'accoppiamento, posto $Z(Z-1) \simeq Z^2$, e sviluppando in serie troncando al primo membro, si ha

$$Q = 4\langle B \rangle_\alpha - [A\langle B \rangle_X - (A - 4)\langle B \rangle_Y] = B_\alpha - (B_X - B_Y) \simeq$$

$$\simeq B_\alpha + 4b_V + 4 \left[\frac{2}{3}b_S + b_C Z \left(1 - \frac{Z}{3A} \right) \right] A^{-1/3} - 4b_{sim} \left(1 - \frac{2Z}{A} \right)^2$$

Sostituendo i valori di b_k , si hanno nel piano (Z, A) le linee per $Q = \text{cost.}$ che individuano le **soglie di instabilità** per emissione di α con en. cinetica $E_k \simeq Q$, ottenendo: $A \approx 140$, per $Q = 0 \text{ MeV}$; $A \approx 200$, per $Q = 4 \text{ MeV}$; $A \approx 240$, per $Q = 8 \text{ MeV}$.

Il decadimento α è energeticamente possibile anche per nuclei con $A < 200$, ma i decadimenti con $Q < 4 \text{ MeV}$ hanno vite medie così lunghe da essere **praticamente inosservabili**.

Teoria del decadimento α

Nel 1928 Gamow propose una teoria del decadimento α che da' una descrizione quantitativa e predittiva del fenomeno pur basata su un approccio con assunzioni e descrizioni fisiche approssimate.

- Le α emesse dai nuclei non esistono come tali nei nuclei prima del decadimento, ma si formano durante il processo.

Egli ammise che almeno a sufficiente distanza dal centro di massa del nucleo genitore, esso sia comunque descrivibile come l'insieme " α + nucleo figlio", assumendo che la α possieda una propria identità strutturale e si muova in una buca di potenziale.

L'energia potenziale del sistema si può allora rappresentare come quella di due sottosistemi separati.

$V(r) \propto 2Ze^2/r$ è l'energia pot. elettrostatica della α a distanza r dal nucleo.

Immaginando α e nucleo figlio come sfere rigide, si può stimare la distanza r_s a cui l'interazione nucleare diviene predominante

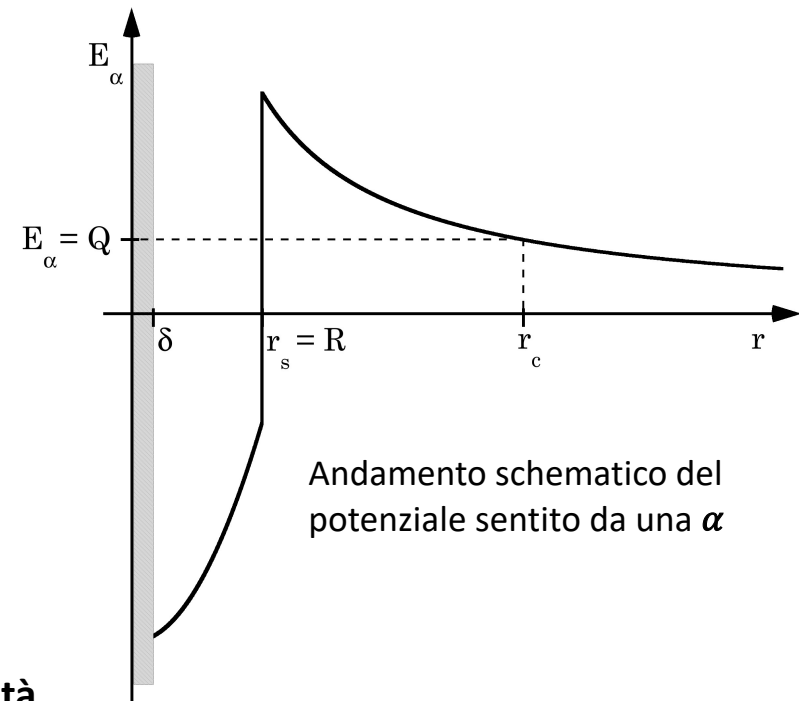
$$r_s \simeq R_0 [(A)^{1/3} + (4)^{1/3}]$$

E' circa a questa distanza, in prossimità della superficie del nucleo, che si può considerare la particella α come ormai formata.

Classicamente r_c , **raggio esterno della barriera**, è la distanza di massimo avvicinamento al nucleo per una α di energia cinetica $E_{k,\alpha} = Q_\alpha$, con $r_c = 2Ze^2/4\pi\epsilon_0 Q_\alpha$, assunto che il potenziale totale sentito dalla α fuori dal nucleo sia coulombiano.

Nel nucleo, per $r < r_s$, α sente il potenziale attrattivo delle forze nucleari fino a $r \simeq \delta < r_s$.

Per $r < \delta$ perde significato immaginare α come struttura dotata di una propria individualità.



Si immagina che α sia nella buca di potenziale e che per uscirne deva, disponendo dell'energia del Q -valore, "superare" la barriera coulombiana che può valere alcune decine di MeV.

Ciò è classicamente impossibile, ma quantisticamente lo è tramite ***l'effetto tunnel***.

Si immagina che α si muova nella buca di potenziale riflettendosi sulle sue pareti che solo talvolta riesce ad attraversare per effetto tunnel.

La probabilità del decadimento si esprime come prodotto di due fattori, in prima approssimazione indipendenti:

- la ***frequenza*** con cui si ha una particella α con propria individualità nel nucleo;
- la ***probabilità*** che la particella α superi la barriera di potenziale.

Si può dire qualcosa sul secondo fattore. Dal calcolo si ottiene, per la vita media e la probabilità di decadimento:

$$\tau_\alpha = \tau_0 e^G \quad \text{e,} \quad \lambda_\alpha = \frac{1}{\tau_0} e^{-G} = \lambda_0 e^{-G}$$

dove G , detto **fattore di Gamow** vale, per energie non troppo alte

$$G \simeq \frac{Ze^2}{2\epsilon_0 \hbar c \beta_\alpha} \sim (E_{k,\alpha})^{-1/2} \quad \text{con,} \quad \beta_\alpha = \frac{v_\alpha}{c}$$

v_α è la velocità di α fuori dalla barriera; τ_0 una funzione lentamente variabile e indipendente dal nucleo considerato.

Dal grafico precedente è qualitativamente evidente che al crescere di $E_{k,\alpha} = Q_\alpha$, aumenta la probabilità di emissione per effetto tunnel, riducendosi l'estensione $(r_c - r_s)$ della barriera e quindi aumenta la probabilità d'emissione tunnel, inversa della vita media ...

Esercizi

Esercizio 1 _ Valutazione dell'attività specifica di un preparato a base di Sr

Lo ^{89}Sr decade β con un tempo di dimezzamento di 1224 ore.

Quanto ne deve essere aggiunto a 2 mg di Sr stabile per ottenere un preparato con un'attività specifica iniziale di 2740 Ci/g ?

Che attività mostrerà il preparato dopo 35 giorni ?

Soluzione esercizio 2

Si ricordi che $1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ bq}$

$$T_{1/2} = \frac{1}{\lambda} \ln 2 = \tau \ln 2 = 4.4064 \times 10^6 \text{ s}$$

da cui

$$\tau = \frac{4.4064 \times 10^6}{\ln 2} \text{ s} \simeq 6.3571 \times 10^6 \text{ s}$$

Si indichino con m_0 la massa di stronzio non attivo presente nel preparato ($m_0 = 2 \text{ mg}$), e con Δm la massa di ^{89}Sr che va aggiunta al preparato e che va determinata, per cui la massa totale del preparato è $m = m_0 + \Delta m$.

Detta $A_{sp}(t = 0)$ l'attività specifica iniziale si ha

$$A_{sp}(t = 0) = 2740 \text{ Ci/g} \simeq 1.0138 \times 10^{14} \text{ bq/g}$$

$$\text{con } \mathcal{A}_{sp}(t = 0) = \frac{\mathcal{A}(t = 0)}{m} = \frac{\mathcal{A}(t = 0)}{m_0 + \Delta m} = \frac{N_0 \lambda}{m_0 + \Delta m}$$

dove N_0 rappresenta il numero di nuclei di ^{89}Sr che vanno aggiunti al preparato inizialmente per soddisfare le condizioni del problema. Si ha anche, detto N_A il numero di Avogadro,

$$N_0 = \frac{\Delta m}{A} N_A$$

con $A = 89$ il numero di massa dello ^{89}Sr , ma anche il suo peso atomico in $\text{g} \times \text{mol}^{-1}$. Sostituendo si ha dunque

$$\mathcal{A}_{sp}(t = 0) = \frac{N_0 \lambda}{m_0 + \Delta m} = \frac{\Delta m \lambda N_A}{A (m_0 + \Delta m)}$$

e ricavando Δm

$$\Delta m = \frac{m_0 A \mathcal{A}_{sp}(t = 0)}{\lambda N_A - A \mathcal{A}_{sp}(t = 0)} = \frac{m_0 A \mathcal{A}_{sp}(t = 0)}{T_{1/2}^{-1} N_A \ln(2) - A \mathcal{A}_{sp}(t = 0)}$$

Sostituendo infine i valori numerici nelle corrette unità di misura si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta m &\simeq \frac{(2 \cdot 10^{-3} \text{ g})(89 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1})(1.0138 \cdot 10^{14} \text{ bq/g})}{(4.406 \cdot 10^6 \text{ s})^{-1}(0.69315)(6.0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}) - (89 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1})(1.0138 \cdot 10^{14} \text{ bq/g})} \\ &\simeq 2.1 \cdot 10^{-4} \text{ g} \end{aligned}$$

Tenendo conto che un intervallo $\Delta t = 35$ giorni equivale a $\Delta t = 3.024 \times 10^6$ s si ottiene, per l'attività residua del preparato dopo 35 giorni dalla preparazione

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\Delta t = 3.024 \times 10^6 \text{ s}) &= \mathcal{A}(t = 0) e^{-\Delta t/\tau} = \\ &= \frac{N_0}{\tau} e^{-\Delta t/\tau} = \frac{N_A \Delta m}{A\tau} e^{-\Delta t/\tau} = \\ &\simeq \frac{(6.0221 \cdot 10^{23})(2.1 \cdot 10^{-4})}{(89)(6.3571 \cdot 10^6)} e^{-3.024 \cdot 10^6 / 6.3571 \cdot 10^6} = \\ &\simeq 2.235 \cdot 10^{11} \times 0.621 \simeq 1.39 \cdot 10^{11} \text{ bq}\end{aligned}$$

Esercizio 2 _ Convertitore termoelettrico a plutonio

Il ^{238}Pu decade α , con un tempo di dimezzamento $T_{1/2} \simeq 88.03 \text{ y}$, rilasciando un'energia cinetica $E = 5.49 \text{ MeV}$.

Il nucleo figlio ^{234}U ha una vita media $\tau_U \simeq 3.5 \times 10^5 \text{ y}$. L'energia così prodotta può essere convertita in energia elettrica tramite un generatore radiotermico (RTG) e quello che equipaggia la sonda spaziale Voyager 2 ha un'efficienza del 5.5 %.

Il Voyager 2, lanciato il 20/08/1977, raggiunse la minima distanza da Saturno il 26/08/1981. Saturno dista dal Sole 9.5 U.A., e 1 U.A. corrisponde alla distanza fra Terra e Sole.

- Si calcoli con quanto plutonio era stato equipaggiato l'RTG del Voyager 2 sapendo che questo, al momento di massimo avvicinamento a Saturno, disponeva di una potenza elettrica $W_{Sat} = 395 \text{ W}$.
- Quale potenza elettrica aveva ancora disponibile il Voyager 2 quando, il 24/08/1989 sorvolò alla minima distanza Nettuno, che dista 30.1 U.A. dal Sole? Quale potenza elettrica ha ancora disponibile oggi Voyager 2?
- Sapendo che i pannelli solari che equipaggiavano lo Skylab avevano un'area attiva di 730 m^2 e gli fornivano 10.5 kW, quale area avrebbero dovuto avere pannelli solari equivalenti che avessero equipaggiato Voyager 2, in grado di alimentarlo come ha fatto l'RTG?

Soluzione:

- Il tempo di dimezzamento $T_{1/2} \simeq 88.03 \text{ y}$ di ^{238}Pu corrisponde ad una vita media $\tau_\alpha = T_{1/2}/\ln 2 \simeq 88.03/0.6931 = 127 \text{ y}$.
Dato che $\tau_\alpha/\tau_U \simeq 3.6 \times 10^{-4} \ll 1$, si può considerare il nucleo figlio ^{234}U come praticamente stabile e trascurare il contributo dei suoi decadimenti al funzionamento del sistema RTG.

Supponendo che l'RTG sia stato caricato di plutonio al momento del lancio del Voyager 2, si associ ad esso il tempo $t_0 = 0$ giorni, e sia $t_1 = 1467$ giorni il tempo associato al sorvolo di Saturno da parte del Voyager 2.

Si calcoli ora, tenendo conto dell'efficienza del sistema RTG, il numero $\Delta N(t_1)$ di decadimenti al secondo che garantiscono una potenza di 395 Watt, ricordando che $1 \text{ Watt} = 6.2415 \times 10^{12} \text{ MeV/s}$

$$\Delta N(t_1) = \frac{395 \times 6.2415 \times 10^{12}}{5.49 \times 0.055} \simeq 8.1649 \times 10^{15}$$

Lo scopo è però risalire alla massa di plutonio con cui è stato caricato il sistema RTG, ovvero al numero N_0 di atomi di plutonio presenti all'istante t_0 . Si esprime quindi $\Delta N(t_1)$ con $\lambda = \tau_\alpha$

$$\begin{aligned} \Delta N(t_1) &= N_0 e^{-t_1/\tau_\alpha} - N_0 e^{-(t_1+1)/\tau_\alpha} = N_0 \left(e^{-t_1/\tau_\alpha} - e^{-t_1/\tau_\alpha} e^{-1/\tau_\alpha} \right) = \\ &= N_0 e^{-t_1/\tau_\alpha} \left(1 - e^{-1/\tau_\alpha} \right) \quad \text{da cui,} \\ N_0 &= \Delta N(t_1) e^{t_1/\tau_\alpha} \left(1 - e^{-1/\tau_\alpha} \right)^{-1} \end{aligned}$$

e sostituendo i valori si ottiene: $N_0 \simeq 3.37524 \times 10^{25}$.

Quindi, essendo pari a 244.06 g la massa molare del plutonio e ricordando il numero di Avogadro, si ha che la quantità di ^{238}Pu con cui è stato inizialmente caricato il dispositivo RTG ammonta a circa 13.7 kg.

- b)** Per rispondere alla seconda domanda si ponga $t_2 = 4387$ giorni il tempo associato al sorvolo di Nettuno da parte del Voyager 2. Poiché la potenza disponibile dal dispositivo RTG è in qualsiasi momento t_i sempre proporzionale ad $N_0 e^{-t_i/\tau_\alpha} (1 - e^{-1/\tau_\alpha})$, si ottiene la potenza disponibile al momento del sorvolo di Nettuno come

$$W_{Net} = W_{Sat} \frac{e^{-t_2/\tau_\alpha}}{e^{-t_1/\tau_\alpha}} \simeq 370.9 \text{ W}$$

Similmente, la potenza ancora disponibile al 1/03/2018, supposta immutata l'efficienza del dispositivo RTG, ammonta a circa 296 W.

- c)** Assumendo ragionevolmente che l'energia luminosa irradiata dal Sole scali come l'inverso del quadrato della distanza, detta $A_1 = 730 \text{ m}^2$ l'area attiva delle celle fotovoltaiche che fornivano allo Skylab 10.5 kW a una distanza di 1 U.A. dal Sole, l'area che dovrebbero avere celle equivalenti per fornire a Voyager 2 395 W a 9.5 U.A. (Saturno), equivale ad

$$A_2 = 730 \times \frac{395}{10500} \times 9.5^2 \simeq 2478.5 \text{ m}^2$$

L'area necessaria alla distanza di Nettuno sarebbe invece

$$A_3 = 730 \times \frac{370.9}{10500} \times 30.1^2 \simeq 23361.8 \text{ m}^2$$

quindi circa 9.5 volte maggiore e pari a quella di circa 3.3 campi da calcio.