

Capitolo 6

Statistica dei decadimenti radioattivi

Tre anni dopo il 1896, anno in cui Becquerel scoprì la radioattività, si osservò che il rateo di decadimento di una sostanza radioattiva pura decresce, col passare del tempo, in accordo con un andamento esponenziale decrescente. Ci vollero altri anni per assodare che la radioattività è un fenomeno che coinvolge ogni singolo atomo di una certa sostanza, e non il campione di sostanza radioattiva in quanto tale nella sua interezza.

Un'ulteriore paio d'anni furono quindi necessari per convincersi che il decadimento radioattivo di un atomo è un processo intrinsecamente statistico, e che sostanzialmente gli atomi di una sostanza, anche radioattivi, "non invecchiano". È quindi impossibile predire quando uno specifico atomo deva decadere e ciò conduce naturalmente alla legge di tipo esponenziale decrescente col tempo.

Considerando processi che coinvolgono grandi numeri di atomi li si può trattare alla stregua di variabili continue e supposto un sistema costituito a un certo istante da un gran numero di atomi radioattivi, la legge di decadimento fornisce il numero medio di atomi del sistema a un qualsiasi istante successivo.

I primi a formulare e applicare coerentemente la legge che descrive il decadimento di sostanze radioattive furono Rutherford e Soddy nel 1902.

6.1 Decadimento radioattivo di una sola sostanza

Dato un qualsiasi atomo, la probabilità che esso decada nell'intervallo di tempo dt è proporzionale a dt moltiplicato per una costante λ , detta *costante o probabilità di decadimento*, le cui dimensioni sono l'inverso di un tempo, che risulta indipendente dall'età dell'atomo ed è caratteristica della sostanza e del tipo di decadimento.

Questa legge si applica indifferentemente a ogni tipo di decadimento radioat-

tivo: α , β , γ , cattura elettronica, fissione spontanea.

Supposto di avere inizialmente un numero molto grande $N(0)$ di atomi di una singola sostanza radioattiva, che ogni singolo decadimento radioattivo sia indipendente da tutti gli altri e considerando il numero residuo $N(t)$ di atomi di tale sostanza ad un istante successivo t alla stregua di una variabile continua, dalla legge del decadimento si ha che la diminuzione $-dN$ di atomi nell'intervallo di tempo dt sarà data da

$$-dN(t) = \lambda N(t)dt \quad (6.1)$$

Integrando quest'equazione tenendo conto del numero $N(0)$ di atomi presenti all'istante iniziale, si ha

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t} \quad (6.2)$$

L'inverso della costante di decadimento, $\tau = 1/\lambda$ è detto *vita media* in quanto costituisce effettivamente il tempo medio $\langle t \rangle$ di vita degli atomi. Si osservi infatti che se

$$\frac{\lambda N(t)}{N(0)} = \frac{\lambda N(0)e^{-\lambda t}}{N(0)} = \lambda e^{-\lambda t} \quad (6.3)$$

rappresenta la funzione di distribuzione statistica dei tempi di vita di ogni atomo della sostanza radioattiva, si ha, per il loro tempo medio $\langle t \rangle$ di vita

$$\langle t \rangle = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} = \tau \quad (6.4)$$

Si utilizza spesso anche il cosiddetto *tempo di dimezzamento* della sostanza radioattiva, definito come il tempo $T_{1/2}$ necessario a far ridurre alla metà il numero di atomi rispetto a quelli presenti inizialmente

$$N(T_{1/2}) = N(0)e^{-T_{1/2}/\tau} = \frac{N(0)}{2} \quad \text{da cui}$$

$$\frac{T_{1/2}}{\tau} = \lambda T_{1/2} = \ln 2 \quad \implies \quad T_{1/2} = \tau \ln 2 \simeq 0.693147 \cdot \tau \quad (6.5)$$

Il numero o *rateo* di decadimenti nell'unità di tempo, detto anche *attività* $\mathcal{A}(t)$ della sostanza radioattiva, si ottiene dalle [6.1](#) e [6.2](#):

$$\mathcal{A}(t) = \left| \frac{dN(t)}{dt} \right| = \lambda N(t) = \lambda N(0)e^{-\lambda t} \quad (6.6)$$

ed è chiaramente anch'esso una funzione decrescente col tempo, dato che al suo trascorrere il numero di atomi non ancora decaduti e che possono quindi decadere, cala.

L'unità di misura internazionale dell'attività è il Becquerel (Bq)¹, corrispondente a 1 disintegrazione al secondo. È ancora molto usato anche il Curie (Ci), corrispondente a $3.7 \cdot 10^{10}$ Bq.

¹Antoine Henri Becquerel condivise con Pierre e Maria Curie il Nobel per la fisica nel 1903 "in riconoscimento degli straordinari servizi che ha reso con la sua scoperta della radioattività spontanea".

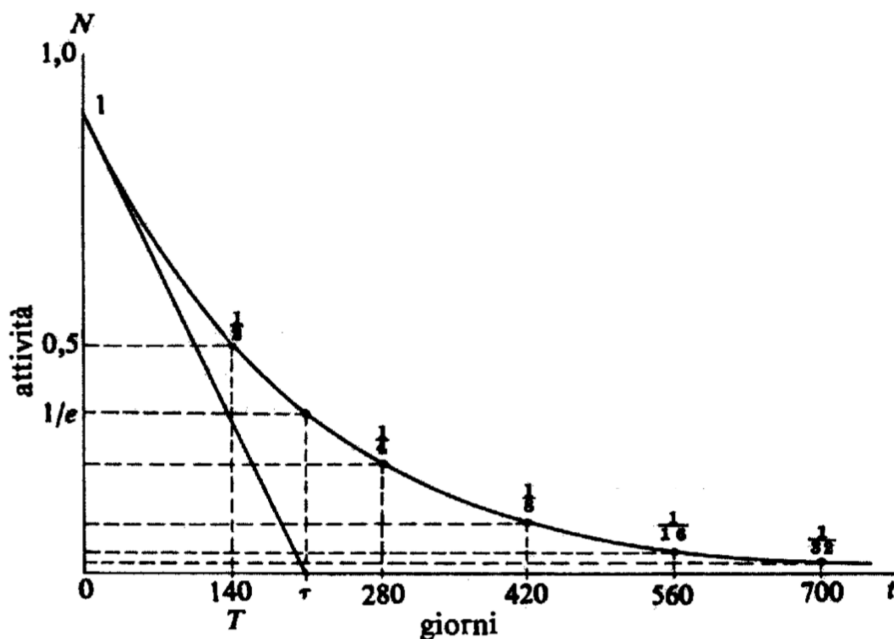


Figura 6.1: Decadimento d'una sostanza radioattiva con tempo di dimezzamento $T_{1/2} = 140$ giorni. La tangente a $N(t)$ nel punto d'ascissa $t = 0$, interseca l'asse t nel punto di valore τ .

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ Bq}$$

Una certa sostanza radioattiva può mostrare diversi meccanismi indipendenti e competitivi di decadimento, detti anche *canali di decadimento*, ognuno caratterizzato da una ben definita costante λ_i , originando così diverse sostanze figlie. Esempi ne sono le catene di disintegrazioni radioattive naturali e quelle di decadimenti beta successivi che caratterizzano alcuni frammenti di fissione, come mostrato ad esempio in figura [6.2](#). Supposto che per una sostanza vi siano n diversi e indipendenti canali di decadimento, la sua probabilità totale λ_{tot} di decadimento, essendo additive le probabilità di eventi fra loro indipendenti, è data da

$$\lambda_{tot} = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tau_i} = \frac{1}{\tau_{tot}} \quad (6.7)$$

Un processo di decadimento con $n > 1$ viene anche detto *diramazione*, e il rapporto fra le quantità di due diversi tipi i e j di prodotti di decadimento associati a due diversi canali, in un certo intervallo di tempo, è detto *rapporto di diramazione (branching ratio) relativo* e coincide col rapporto fra le rispettive costanti di decadimento, λ_i/λ_j .

6.2 Decadimento radioattivo di più sostanze

Una sostanza radioattiva può come detto decadere in un'altra anch'essa radioattiva e in tal caso le due si dicono in relazione genetica, con la prima chiamata *genitore* e la seconda *figlia*. Ciò può estendersi a molte "generazioni".

Si supponga di avere al tempo $t = 0$, $N_1(0)$ ed $N_2(0)$ atomi delle sostanze radioattive (1) e (2), in relazione genetica. Se ne vogliono trovare le quantità $N_1(t)$ ed $N_2(t)$ presenti nel generico istante t successivo. La sostanza

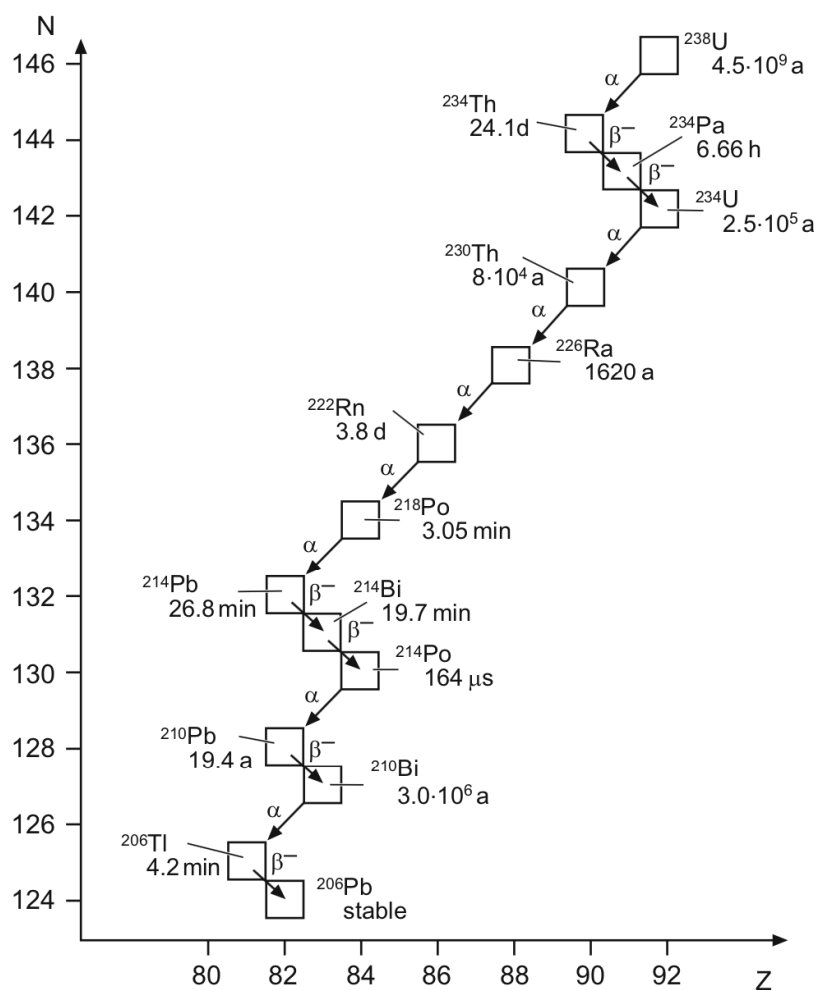


Figura 6.2: Famiglia radioattiva naturale dell' U^{238} .

(1) decade secondo la legge

$$dN_1 = -N_1 \lambda_1 dt \quad (6.8)$$

e per ogni suo atomo decaduto se ne forma uno della sostanza (2). Il numero di atomi della sostanza (2) quindi varia per due ragioni: da un lato diminuisce per i decadimenti spontanei degli atomi della sostanza (2), dall'altro cresce per effetto della formazione di atomi della sostanza (2) come prodotto del decadimento di atomi della sostanza (1). La variazione totale risultante è quindi:

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \quad (6.9)$$

con λ_1 e λ_2 le costanti di decadimento delle due sostanze.

Per una terza sostanza derivante dal decadimento di (2) si ha, in modo analogo:

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3 \quad (6.10)$$

e così via.

Considerando k diverse generazioni in cascata si ha un sistema di k equazioni differenziali che può essere risolto ponendo:

$$\begin{cases} N_1 = a_{11}e^{-\lambda_1 t} \\ N_2 = a_{21}e^{-\lambda_1 t} + a_{22}e^{-\lambda_2 t} \\ \dots \\ N_k = a_{k1}e^{-\lambda_1 t} + a_{k2}e^{-\lambda_2 t} + \dots + a_{kk}e^{-\lambda_k t} \end{cases} \quad (6.11)$$

Le costanti a_{ij} vanno determinate in modo che le [6.11](#) soddisfino le equazioni differenziali e le condizioni iniziali $N_i(0)$. Sostituendo le [6.11](#) in [6.8](#), [6.9](#), [6.10](#), ecc. si ottiene la seguente formula di ricorrenza, valida per i coefficienti a_{ij} con indici $i \neq j$

$$a_{ij} = a_{i-1,j} \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}}{(\lambda_1 - \lambda_j)(\lambda_2 - \lambda_j) \dots (\lambda_i - \lambda_j)} a_{11} \quad (6.12)$$

I coefficienti con indici uguali si ricavano dalla condizione

$$N_i(0) = a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{ik} \quad (6.13)$$

Nel caso vi siano costanti di disintegrazione λ fra loro uguali, la [6.11](#) va modificata sostituendo, agli esponenziali con ugual valore di λ , termini della forma $te^{-\lambda t}$, $t^2 e^{-\lambda t}$,

Ogni espressione della [6.11](#) contiene una somma d'esponenziali in cui compaiono le costanti di disintegrazione di tutte le sostanze che precedono quella considerata.

Alcuni casi specifici di condizioni iniziali hanno notevole importanza pratica. Si consideri il caso in cui all'inizio è presente la sola sostanza 1 con $N_1(0)$

atomi. Applicando direttamente le [6.11](#), [6.12](#) e [6.13](#) si ha, procedendo fino alla terza generazione

$$\begin{cases} N_1(t) = N_1(0)e^{-\lambda_1 t} \\ N_2(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \\ N_3(t) = N_1(0) \lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right) \end{cases} \quad (6.14)$$

Si consideri ora l'andamento col tempo delle attività di due sostanze radioattive, un genitore (1) e una sostanza figlia (2), di una stessa catena radioattiva $N_1(t) \xrightarrow{\lambda_1} N_2(t)$ e si determini l'istante $t_{1,2}^*$ in cui le due attività combaciano.

Ciò implica, in base alla [6.6](#)

$$\lambda_1 N_1(t) = \lambda_2 N_2(t) \quad (6.15)$$

e sostituendo dalla [6.14](#)

$$\lambda_1 N_1(0) e^{-\lambda_1 t} = \lambda_2 N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

da cui

$$t_{1,2}^* = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \quad (6.16)$$

L'istante in cui l'entità della sostanza figlia ha il suo massimo si ottiene uguagliando a zero la variazione temporale della quantità di sostanza figlia

$$dN_2(t)/dt = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}) = 0$$

da cui infine

$$t_{max} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \quad (6.17)$$

Quindi ne deriva l'interessante risultato che nel caso sia presente ad un istante iniziale una sola sostanza radioattiva, la sostanza figlia raggiunge il massimo della sua entità allo stesso istante in cui la sua attività coincide con quella della sostanza genitore, $t_{max} = t_{1,2}^*$.

Si consideri ora la catena radioattiva $N_1(t) \xrightarrow{\lambda_1} N_2(t) \xrightarrow{\lambda_2} N_3(t)$ e si faccia sempre riferimento ai risultati presentati nelle [6.14](#) supponendo però che la sostanza di terza generazione sia stabile, ovvero $\lambda_3 = 0$. In tal caso

$$N_3(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} - \frac{1 - e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2} \right) \quad (6.18)$$

Si vedano ora quattro casi notevoli.

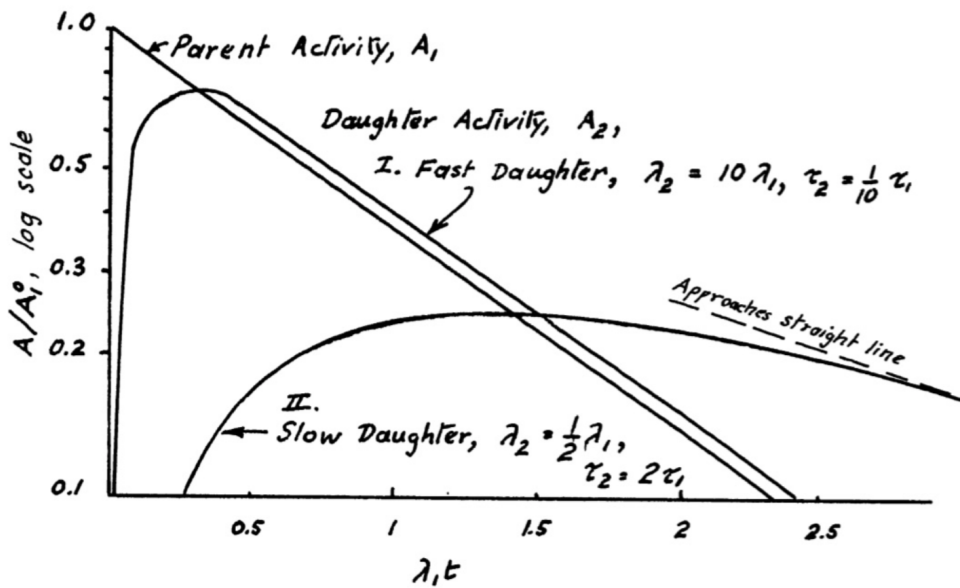


Figura 6.3: Ratei di decadimento di particelle figlie con probabilità di decadimento minore o maggiore di quella di uno stesso genitore.

1. Supponendo dapprima $\lambda_1 > \lambda_2$, si ha che dopo un tempo t abbastanza lungo, per cui $t \gg 1/\lambda_1$, si può trascurare il primo esponenziale in parentesi per $N_2(t)$ dalle [6.14](#), ottenendo

$$N_2(t) \cong N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \quad (6.19)$$

il che mostra come in questo caso, per tempi $t > t_{max}$, la sostanza figlia (2) proceda decadendo sostanzialmente secondo la propria costante di decadimento λ_2 , quindi secondo la propria vita media τ_2 .

2. Se invece si suppone $\lambda_1 < \lambda_2$, si ha che dopo un tempo t abbastanza lungo, per cui $t \gg 1/\lambda_2$ e quindi anche $t > t_{max}$, si può trascurare il secondo esponenziale in parentesi per $N_2(t)$ dalle [6.14](#), ottenendo

$$N_2(t) \cong N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \quad (6.20)$$

che mostra come in questo caso la sostanza figlia (2) proceda decadendo sostanzialmente secondo la costante di decadimento λ_1 della sostanza genitore, quindi secondo la vita media τ_1 .

Ciò risulta comprensibile riflettendo sul fatto che essendo lento il rateo di decadimento della sostanza (1) rispetto a quello della sostanza (2), lo è anche quello di formazione della sostanza (2), che però decade poi rapidamente subito dopo essersi formata.

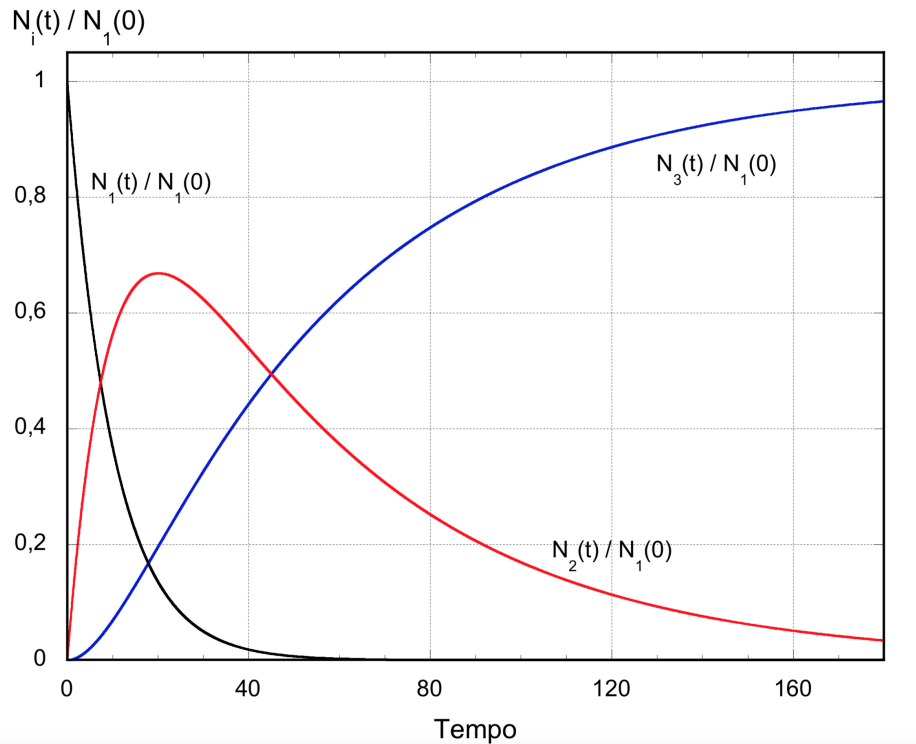


Figura 6.4: Esempio di una serie radioattiva con tre membri, di cui all'inizio è presente solo il genitore, l'ultimo è stabile e quello intermedio ha una vita media cinque volte superiore a quella del genitore

Moltiplicando per λ_2 i due termini della [6.20](#) si ottiene, per il rateo di decadimenti della sostanza (2), ovvero per la sua attività $\mathcal{A}_2(t)$

$$\mathcal{A}_2(t) = \lambda_2 N_2(t) \cong \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \mathcal{A}_1(t) \quad (6.21)$$

3. Supponendo ora $\lambda_1 \ll \lambda_2$, dalla [6.21](#) e sempre per tempi $t > t_{max}$, si ha $\mathcal{A}_2(t) \cong \mathcal{A}_1(t)$, individuando quello che viene detto un *equilibrio transiente* fra le attività degli elementi (1) e (2), con un rapporto sostanzialmente costante fra esse: $\mathcal{A}_2/\mathcal{A}_1 \cong \lambda_2/(\lambda_2 - \lambda_1) \cong 1$.
4. Se ora, oltre a considerare $\lambda_1 \ll \lambda_2$ si suppone anche $\lambda_1 \cong 0$, e si considerano tempi t tali che $1/\lambda_1 \gg t \gg 1/\lambda_2$, allora

$$\begin{cases} N_1(t) \cong N_1(0) \\ N_2(t) \cong N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 t}) \end{cases} \quad (6.22)$$

da cui:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_1(t) \cong \mathcal{A}_1(0) \\ \mathcal{A}_2(t) \cong \mathcal{A}_1(0) (1 - e^{-\lambda_2 t}) \end{cases} \quad (6.23)$$

Si è quindi in presenza di un'attività molto piccola e quasi costante $\mathcal{A}_1(t)$. L'attività $\mathcal{A}_2(t)$ tende all'equilibrio per tempi $t \gg \lambda_2^{-1}$, quando $e^{-\lambda_2 t} \rightarrow 0$ e $\mathcal{A}_2(t) \rightarrow \mathcal{A}_1(0)$, quindi in regime di quasi saturazione, ovvero di quasi equilibrio (Figura [6.5](#)).

L'effettivo equilibrio richiederebbe d'altronde $dN_1(t)/dt = 0$, e riestendendo anche al caso di una generica catena radioattiva con k decadimenti successivi, ciò implicherebbe l'uguaglianza di tutte le attività

$$\mathcal{A}_1(t) = \mathcal{A}_2(t) = \mathcal{A}_3(t) = \dots = \mathcal{A}_k(t) \quad (6.24)$$

Questa condizione non può però essere effettivamente raggiunta in quanto l'aver $dN_1(t)/dt = 0$ significherebbe che la sostanza genitore è stabile, con $\lambda_1 = 0$ e $\tau_1 = \infty$. È d'altronde possibile conseguire una condizione tanto più prossima a quella dell'effettivo equilibrio quanto più lentamente decade la sostanza genitore rispetto ad ogni sostanza figlia della catena radioattiva. In tal caso, col crescere del tempo t , si tende alla condizione

$$N_1(t)\lambda_1 = N_2(t)\lambda_2 = N_3(t)\lambda_3 = \dots = N_k(t)\lambda_k \quad (6.25)$$

detta di *equilibrio secolare*. Essa risulta infatti applicabile soltanto quando un materiale, contenente tutti i prodotti di decadimento provenienti da una sostanza genitore, è stato lasciato indisturbato per un tempo sufficientemente lungo da permettere il conseguimento della suddetta condizione di equilibrio.

L'equilibrio può essere raggiunto anche nel caso in cui la sostanza genitore venga prodotta nel tempo con un rateo di produzione Q uguale al suo rateo di decadimento $\lambda N(t)$. Un caso del genere si può avere ad esempio bombardando un campione di sostanza i cui nuclei siano stabili, con un fascio di particelle che inducano un numero di trasmutazioni su Q atomi/s verso un elemento radioattivo che poi decada con una costante λ . Questo procedimento è in pratica utilizzato per produrre elementi radioattivi sfruttando ad esempio neutroni provenienti da reattori o fasci di particelle prodotti in acceleratori.

La variazione del numero $N(t)$ di nuclei radioattivi presenti si ottiene dal bilanciamento fra il rateo Q di formazione e il rateo $-\lambda N(t)$ di decadimento:

$$\frac{dN(t)}{dt} = Q - \lambda N(t) \quad (6.26)$$

che se $Q = \text{cost.}$, si può riscrivere ridefinendo e quindi separando le variabili:

$$\frac{d[Q - \lambda N(t)]}{Q - \lambda N(t)} = -\lambda dt \quad (6.27)$$

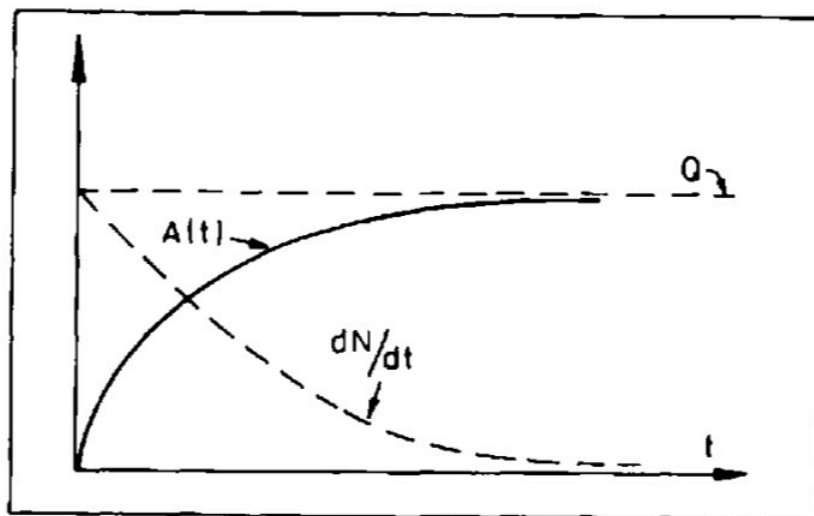


Figura 6.5: Equilibri asintotici fra ratei di produzione e attività.

Integrandola, nell'ipotesi che all'istante iniziale $t = 0$ si abbiano $N(0) = 0$ nuclei, si ottiene

$$Q - \lambda N(t) = [Q - \lambda N(0)] e^{-\lambda t} \implies N(t) = \frac{Q}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \quad (6.28)$$

che rappresenta un andamento a saturazione, tipico dei casi in cui formazione e decadimento sono in competizione. In figura 1.9 sono schematicamente illustrati l'attività $\mathcal{A}(t) \equiv \lambda N(t)$, o rateo di decadimento radioattivo, e la variazione temporale del numero di nuclei genitori $dN(t)/dt$ per un sistema con un rateo di formazione di Q atomi/s. ²

6.3 Tecniche radioattive di datazione

Le tecniche di datazione basate sui decadimenti radioattivi permettono di ottenere le informazioni più attendibili in merito alle valutazioni dei tempi assoluti delle epoche geologiche. Le sostanze comunemente utilizzate per questi scopi sono l'uranio e i suoi isotopi, il torio, il potassio e il rubidio.

La storia iniziale del pianeta Terra non è nota, ma ad un certo punto le rocce raggiunsero la loro composizione attuale, cristallizzandosi e differenziando i loro diversi componenti minerali. Un processo di metamorfosi, seppur lento, è tutt'ora in atto. La datazione radioattiva si riferisce sostanzialmente alla possibilità di determinare il tempo di formazione dei minerali, ovvero la loro

²Per una trattazione completa delle equazioni che descrivono le trasmutazioni nucleari si può vedere ad esempio: Jerzi Cetnar, General solution of Bateman equations for nuclear transmutations, Annals of Nuclear Energy, 33 (2006) 640-645.

età. Una roccia che al momento della sua formazione contenesse ad esempio una certa quantità di uranio, ha accumulato nel tempo trascorso, elio prodotto dal decadimento dell'uranio. Ogni atomo di ^{238}U che si trasforma in ^{206}Pb emette infatti otto particelle α , ovvero otto nuclei di elio, che se non sfuggono dalla roccia permettono di datare quest'ultima dalla valutazione fra l'uranio ancora presente e l'elio nel frattempo accumulato. Anche il torio permette di attuare un procedimento simile.

Particolare attenzione va posta nel verificare che l'elio e l'uranio non siano sfuggiti dai campioni in analisi durante la storia della roccia, cosa peraltro frequente per quanto concerne l'elio. Il rapporto uranio/piombo è anche utilizzabile e risente meno dei problemi che caratterizzano l'elio³, dovuti a diffusione o fuga dalle rocce. Si utilizzano inoltre anche i rapporti $^{206}\text{Pb}/^{207}\text{Pb}$, K/Ar e $^{87}\text{Rb}/^{87}\text{Sr}$.

Si veda ora come implementare questa tecnica, considerando che la si vuole applicare a decadimenti che si sviluppano su tempi geologici ($\sim 10^9$ y) per i quali non si è in grado di misurare direttamente l'attività in funzione del tempo. Quanto si fa in tali casi è utilizzare i numeri relativi di nuclei genitori e figli osservati al tempo t_1 (oggi) in un campione di materiale, confrontandoli con i numeri relativi al tempo t_0 , quando il materiale in studio si è cristallizzato a costituire la roccia (minerale) intrappolando i nuclei genitori nella loro "posizione" attuale.

Dato il decadimento dell'isotopo (nucleo/atomo) genitore G nell'isotopo (nucleo/atomo) figlio F, bisogna semplicemente *contare*, ad esempio con metodi chimici, gli attuali numeri di atomi G ed F, $N_G(t_1)$ e $N_F(t_1)$; se null'altro tranne il decadimento radioattivo ha agito a partire dal tempo t_0 nel modificare $N_G(t)$ ed $N_F(t)$, allora supposto che al tempo t_0 della formazione non vi fosse ancora presenza di nuclei figli, cioè $N_F(t_0) = 0$, si ha

$$N_F(t_1) + N_G(t_1) = N_G(t_0) \quad (6.29)$$

e ancora

$$N_G(t_1) = N_G(t_0) e^{-\lambda(t_1-t_0)} \quad (6.30)$$

da cui

$$\Delta t \equiv t_1 - t_0 = \frac{1}{\lambda} \ln \left[\frac{N_G(t_0)}{N_G(t_1)} \right] = \frac{1}{\lambda} \ln \left[1 + \frac{N_F(t_1)}{N_G(t_1)} \right] \quad (6.31)$$

Noti quindi la costante di decadimento λ del nucleo genitore, misurabile in laboratorio, e il rapporto attuale fra abbondanza di nuclei genitori e figli, si ottiene l'età del campione in studio con una precisione dipendente da quella

³La molecola di elio è monoatomica ed è sostanzialmente la più piccola fra tutte le molecole, quindi, unitamente alla piccola massa, questo spiega la maggior facilità per l'elio di sfuggire da materiali in cui sia presente o sia stato assorbito, sfruttando i micro-difetti strutturali dei materiali stessi.

con cui è nota λ e dalla statistica di conteggio per N_G ed N_F . Nelle relazioni [6.29](#) e [6.30](#) sono implicite delle assunzioni che devono essere accuratamente verificate prima di applicare la relazione [6.31](#) alla determinazione dell'età di un campione. La [6.29](#) assume infatti, come detto, che $N_F(t_0) = 0$, e anche che nel tempo intercorso dalla formazione del campione fino ad oggi non si siano verificati fenomeni che hanno portato a modificare il numero totale di atomi presenti, variando il rapporto genitori/figli, se non per quanto dovuto al processo di decadimento radioattivo. La [6.30](#) assume che la variazione di N_G dipenda soltanto dal decadimento e che quindi non vengano introdotti ulteriori atomi genitori né da altri, diversi e concomitanti, fenomeni di decadimento, né da reazioni nucleari, come ad esempio quelle inducibili da raggi cosmici.

Si veda ora come modificare la procedura per l'ottenimento di Δt tenendo conto anche dell'eventuale numero di nuclei/atomi figli F già presenti nel campione all'istante t_0 della sua formazione, anche se al momento t_1 dell'analisi del campione non si può dire quali atomi figli siano derivati dal decadimento durante il tempo Δt e quali ci fossero fin dall'inizio.

Si supponga che al tempo t_0 siano già presenti $N_F(t_0)$ nuclei figli, ad esempio formati da decadimenti del genitore in tempi precedenti t_0 o comunque inglobati nel campione al momento t_0 della sua formazione. La [6.29](#) diventa in questo caso

$$N_F(t_1) + N_G(t_1) = N_F(t_0) + N_G(t_0) \quad (6.32)$$

La quantità $N_F(t_0)$ non è però nota e questo non permette quindi di ottenere Δt . Se tuttavia nel campione è presente anche un diverso isotopo F' della specie figlia, che sia stabile e non proveniente dal decadimento di un genitore con lunga vita media, si può comunque risalire all'età del campione. Indicata con $N_{F'}$ la popolazione dell'isotopo F' , il fatto che esso sia stabile implica $N_{F'}(t_1) = N_{F'}(t_0)$, da cui

$$\frac{N_F(t_1) + N_G(t_1)}{N_{F'}(t_1)} = \frac{N_F(t_0) + N_G(t_0)}{N_{F'}(t_0)} \quad (6.33)$$

che diventa

$$\frac{N_F(t_1)}{N_{F'}(t_1)} = \frac{N_G(t_1)}{N_{F'}(t_1)} \left[e^{\lambda(t_1-t_0)} - 1 \right] + \frac{N_F(t_0)}{N_{F'}(t_0)} \quad (6.34)$$

I rapporti $N_F(t_1)/N_{F'}(t_1)$ e $N_G(t_1)/N_{F'}(t_1)$ possono essere misurati in laboratorio ma resta sempre incognito il rapporto isotopico $N_F(t_0)/N_{F'}(t_0)$. Avviene che minerali che cristallizzano secondo una comune origine dovrebbero mostrare uguali età e anche uguali rapporti isotopici $N_F(t_0)/N_{F'}(t_0)$, anche se in essi il numero $N_G(t_0)$ degli stessi atomi genitori può essere molto diverso, ad esempio per la diversa composizione chimica.

Supponendo corretta quest'ipotesi ci si attende al momento della misura, ovvero al tempo t_1 , di osservare minerali con diversi rapporti $N_F(t_1)/N_{F'}(t_1)$ e $N_G(t_1)/N_{F'}(t_1)$, corrispondenti ad una medesima coppia di valori Δt e $N_F(t_0)/N_{F'}(t_0)$.

Questa ipotesi può essere analizzata graficando $N_F(t_1)/N_{F'}(t_1)$ rispetto a $N_G(t_1)/N_{F'}(t_1)$: per svariati minerali la [6.34](#) mostra infatti una dipendenza lineare fra i rapporti, con pendenza data da $[e^{\lambda(t_1-t_0)} - 1]$ e intercetta $N_F(t_0)/N_{F'}(t_0)$.

Un esempio, relativo al decadimento $^{87}\text{Rb} \rightarrow ^{87}\text{Sr}$ ($T_{1/2} = 4.8 \times 10^{10}$ y), confrontato con l'isotopo stabile ^{86}Sr , è illustrato in figura [6.6](#). La buona

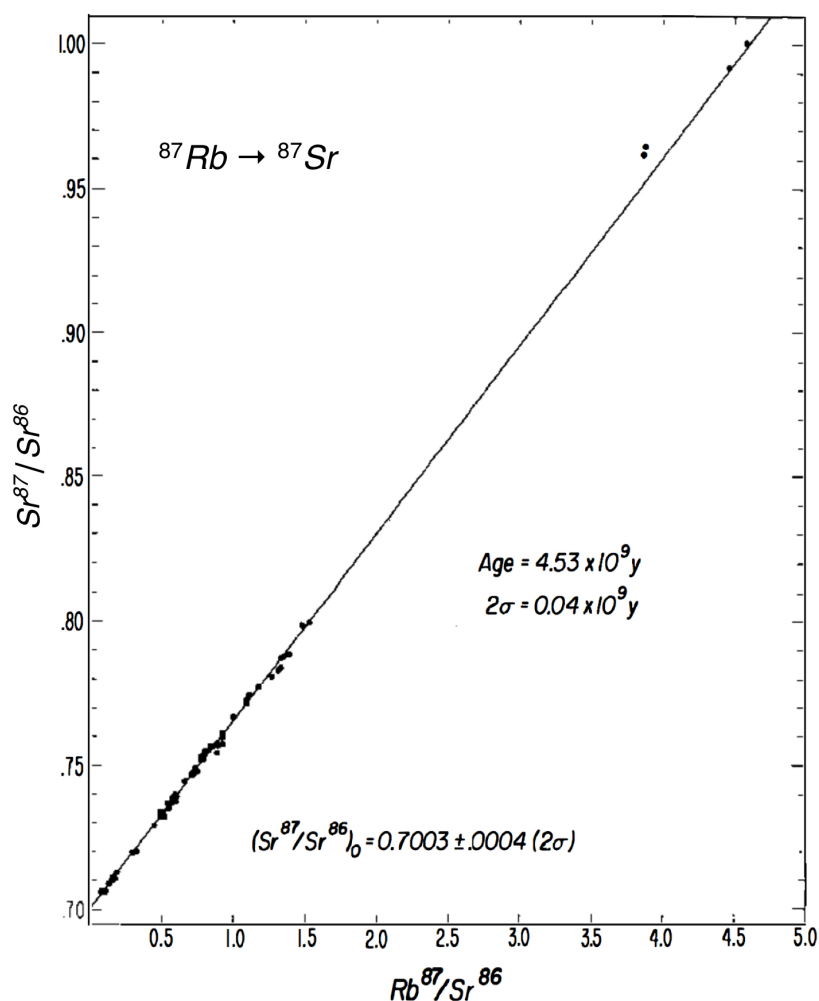


Figura 6.6: Tecnica di datazione Rb-Sr, tratto da G.W. Wertherill, Ann. Rev. Nucl. Sci. 25 (1975) 283.

linearità della regressione sui punti sperimentali suffraga l'ipotesi che non vi

siano state perdite di nuclei genitori o figli.

Le rocce terrestri superficiali più vecchie datate con tali metodi hanno un'età di $4.374 \times 10^9 \pm 0.006 \cdot 10^9$ anni e sono costituite da granuli di zircone scoperti in Australia, nella regione di Jack Hills, nel 2013. Il risultato, compatibile con l'età dei frammenti di meteoriti più antichi analizzati, suggerisce che la crosta terrestre si sia formata circa 100 milioni di anni dopo il gigantesco impatto che potrebbe aver dato origine alla Luna.

Per datazioni di campioni più giovani, come quelli di materiali di tipo organico, il metodo che fa uso dell'isotopo radioattivo ^{14}C del Carbonio è il più utilizzato.

Una struttura organica vivente assorbe anidride carbonica, CO_2 , e il contenuto in carbonio di quest'ultima è costituito quasi interamente da ^{12}C (98.89%), mescolato ad una piccola percentuale di ^{13}C (1.11%).

Il ^{14}C radioattivo, che decade β^- in ^{14}N con una vita media $\tau = 8267$ anni, è continuamente formato negli strati alti dell'atmosfera per effetto della cattura, da parte dell'azoto atmosferico, dei neutroni termici quali prodotti secondari del bombardamento dei raggi cosmici. L'equilibrio dinamico che si instaura fra produzione e decadimento, supposti stabili la struttura chimica e in densità media dell'atmosfera, oltrechè il flusso di raggi cosmici che la investe, mantiene costante la concentrazione di ^{14}C nell'atmosfera stessa.

Il ^{14}C così prodotto con un rateo $Q(^{14}\text{C})$, reagisce con l'ossigeno per dare anidride carbonica $^{14}\text{CO}_2$ che viene riutilizzata dalle piante durante la fotosintesi clorofilliana.

Con questo meccanismo il ^{14}C si trasferisce quindi nei composti organici e attraverso la catena alimentare è presente in ogni struttura vivente secondo un preciso rapporto (abbondanza isotopica), pari a circa 1.3 atomi di ^{14}C ogni 10^{12} atomi di ^{12}C . Tutta la materia vivente è dunque leggermente radioattiva in funzione del suo contenuto di ^{14}C .

Supposto che il rateo di produzione di ^{14}C da parte dei raggi cosmici si mantenga relativamente costante⁴, ne consegue che la materia organica, se vive sufficientemente a lungo, raggiunge l'equilibrio del suo contenuto di ^{14}C con quello dell'atmosfera

$$\frac{dN(^{14}\text{C})}{dt} = 0 \quad \implies \quad Q(^{14}\text{C}) = \lambda(^{14}\text{C}) N(^{14}\text{C}) \quad (6.35)$$

e tramite il metabolismo lo mantiene sino alla morte, momento a partire dal quale smette di assumere ^{14}C e quindi di essere in equilibrio, per il suo

⁴Nella realtà il livello di ^{14}C in atmosfera è variato significativamente nel tempo, sia per motivi naturali che "umani", come ad esempio nel secolo scorso a causa soprattutto degli esperimenti con ordigni nucleari. Questo rende necessario ricorrere a metodi complementari, che affiancano e complementano quello del radiocarbonio, per ottenere affidabili datazioni (M.J.Aitken, "Science-based dating in archaeology" - Longman, 1990; Aitken al., "Chronometric Dating in Archaeology" - Springer US, 1997)

contenuto, con il ^{14}C atmosferico. Dal momento della morte dell'organismo il suo contenuto di ^{14}C decresce quindi secondo la legge del decadimento radioattivo.

Si può dunque determinare l'età di un campione organico a partire dal momento della morte dell'organismo cui esso è appartenuto, misurando l'attività per grammo di carbonio in esso contenuto, detta *attività specifica* (A_{sp}), e confrontandola con l'attività specifica del carbonio atmosferico, pari a circa 0.23 Bq/g , ovvero 13.8 disintegrazioni/g al minuto.

Detto t_0 il tempo della morte dell'organismo, e t_1 il tempo della misura, si ha, per l'età $\Delta t = (t_1 - t_0)$ del campione

$$A_{sp} (^{14}\text{C}, t_1) = A_{sp} (^{14}\text{C}, t_0) e^{-\lambda(t_1-t_0)} \quad (6.36)$$

da cui:

$$\Delta t \equiv (t_1 - t_0) = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{A_{sp} (^{14}\text{C}, t_0)}{A_{sp} (^{14}\text{C}, t_1)} \quad (6.37)$$

I metodi di datazione che sfruttano l'attività danno affidamento fino a tempi sostanzialmente non superiori a $7 \times \tau$, quindi con il ^{14}C si possono ottenere datazioni di una certa attendibilità fino a tempi inferiori a circa $6 \times 10^4 \text{ y}$. Si può fare ancor meglio utilizzando la tecnica della spettrometria di massa

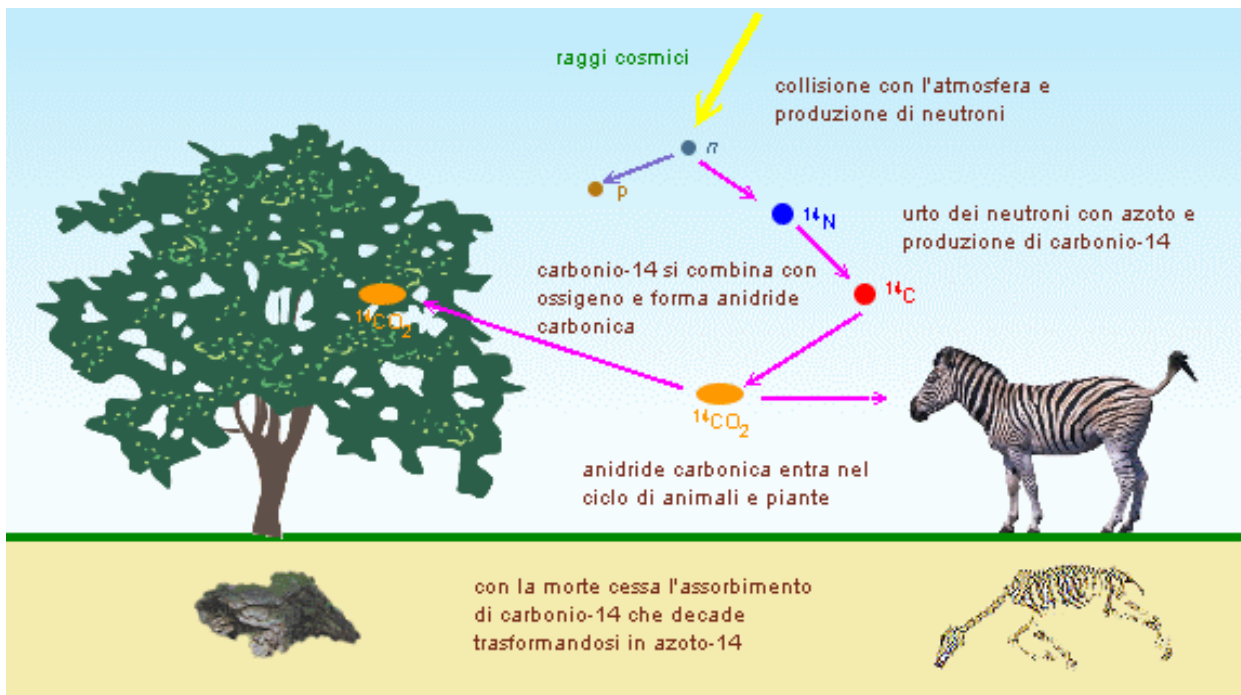


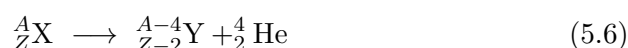
Figura 6.7: Schematizzazione del ciclo del ^{14}C .

con acceleratore (AMS) che permette di contare direttamente il numero di atomi sia di ^{14}C che anche di altri isotopi, presenti in un campione.

5.2 Radioattività α

Fu Rutherford nel 1909 a scoprire che la radiazione α è costituita da nuclei di elio: egli fece decadere sotto vuoto una sostanza radioattiva che emetteva particelle α e analizzando poi il contenuto dell'ambiente originariamente vuoto trovò presenza di elio.

Il decadimento α rappresenta quindi la disintegrazione di un nucleo genitore in un nucleo figlio e un nucleo di elio



e può essere considerato come una fissione spontanea del nucleo genitore (si veda il paragrafo [5.7](#)) in due nuclei figli con masse fortemente asimmetriche. Esso è sostanzialmente dovuto all'azione concomitante delle forze nucleari e di quelle elettromagnetiche.

La sua importanza cresce al crescere del numero di massa A , in quanto la repulsione coulombiana, dipendendo da Z^2 , cresce più rapidamente della forza di legame nucleare che dipende approssimativamente da A solo per nuclei leggeri per poi saturare al crescere di A .

Il motivo per cui un nucleo scelga il decadimento α per liberarsi *spontaneamente* di carica elettrica va ricercato nel fatto che la particella α è una struttura molto stabile e fortemente legata, ha quindi un'energia di massa equivalente sensibilmente inferiore alla somma delle energie di massa dei suoi componenti presi singolarmente. Se quindi si definisce spontaneo un processo di decadimento che porti una struttura a una riduzione della propria massa con la maggior possibile trasformazione di questa in energia cinetica, e si desidera nel contempo che il prodotto emesso nel decadimento sia il più leggero possibile, allora la particella α è un ottimo candidato.

Per alcuni nuclei molto pesanti c'è la possibilità energetica dell'emissione spontanea anche di altri nuclei leggeri, quali ${}^8\text{Be}$ o ${}^{12}\text{C}$, ma la probabilità è così bassa da rendere sperimentalmente non rilevabile il processo.

Per studiare l'energetica del processo si supponga il nucleo genitore inizialmente a riposo rispetto a un osservatore inerziale solidale col sistema del laboratorio (SL), che in questo caso coincide con quello del centro di massa (CM), la conservazione dell'energia si esprime come

$$M_X c^2 = M_Y c^2 + E_{k,Y} + M_\alpha c^2 + E_{k,\alpha} \quad (5.7)$$

con M_X , M_Y ed M_α le masse rispettivamente del nucleo genitore, di quello figlio e della particella α , $E_{k,Y}$ ed $E_{k,\alpha}$ le energie cinetiche del nucleo figlio e della particella α .

Dalla [5.7](#) si ha

$$E_{k,Y} + E_{k,\alpha} = (M_X - M_Y - M_\alpha) c^2 = \Delta M c^2 \equiv Q \quad (5.8)$$

che viene detto Q -valore del decadimento e coincide con l'energia a disposizione della disintegrazione. Le energie in gioco sono tali da permettere, con buona approssimazione, l'utilizzo delle formule non relativistiche; le energie cinetiche del nucleo figlio e della particella α sono quindi

$$E_{k,Y} = \frac{1}{2} M_Y v_Y^2 \quad , \quad E_{k,\alpha} = \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 \quad (5.9)$$

con \vec{v}_Y e \vec{v}_α le velocità del nucleo figlio e della particella α . Avendo supposto il nucleo genitore a riposo, la conservazione dell'impulso implica che nucleo figlio e particella α si muovano secondo due versi opposti

$$M_Y \vec{v}_Y = -M_\alpha \vec{v}_\alpha \quad \text{da cui,} \quad v_Y = \frac{M_\alpha}{M_Y} v_\alpha \quad (5.10)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} E_{k,Y} + E_{k,\alpha} &= \frac{1}{2} M_Y v_Y^2 + \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2} M_Y \left(\frac{M_\alpha}{M_Y} v_\alpha \right)^2 + \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 = \\ &= \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 \left(\frac{M_\alpha}{M_Y} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\text{da cui,} \quad E_{k,Y} + E_{k,\alpha} = E_{k,\alpha} \left(\frac{M_\alpha}{M_Y} + 1 \right) = Q_\alpha \quad (5.11)$$

e ancora

$$E_{k,\alpha} = \frac{M_Y}{M_\alpha + M_Y} Q_\alpha \quad \text{ed} \quad E_{k,Y} = \frac{M_\alpha}{M_Y} E_{k,\alpha} \quad (5.12)$$

Non potendo essere negativa l'energia cinetica della particella α emessa nel decadimento, ne deriva come prevedibile che questo, per aver luogo, deve necessariamente essere un processo esotermico, ovvero

$$\Delta M \geq 0 \quad \text{e} \quad Q_\alpha \geq 0 \quad (5.13)$$

Nel caso di nuclei pesanti, con $A \gg 1$, la gran parte dell'energia liberata dal decadimento diventa energia cinetica della particella α . Dalla seconda delle [5.12](#) si ottiene infatti

$$E_{k,Y} = \frac{M_\alpha}{M_Y} E_{k,\alpha} \ll E_{k,\alpha} \quad (5.14)$$

Ponendo poi $(M_\alpha/M_Y) \simeq 4/(A-4)$ si ha

$$E_{k,\alpha} \approx \frac{A-4}{A} Q_\alpha \quad , \quad E_{k,Y} \approx \frac{4}{A} Q_\alpha \quad (5.15)$$

che permettono una rapida stima dell'energia rilasciata nel decadimento, nota che sia Q_α .

Trattandosi di un decadimento in due corpi osservato nel sistema del centro di massa del nucleo genitore, l'energia cinetica espressa dalla prima delle [5.12](#) e il modulo della velocità della particella α emessa nel decadimento, dovrebbero assumere entrambi un unico valore.

Accurate misure in proposito hanno tuttavia evidenziato una struttura fine negli spettri energetici delle particelle α emesse da materiali radioattivi per diversi possibili Q -valori. Le particelle α più energetiche sono prodotte da sole, mentre quelle meno energetiche sono sempre accompagnate dalla concomitante emissione di fotoni. Questo concorre a suggerire la presenza nei nuclei di livelli energetici e di una sottostante struttura di stati discreti. In tal caso quindi un nucleo genitore, decadendo α , può trasformarsi nello stato fondamentale di un nucleo figlio emettendo una particella α di energia corrispondente all'intero Q -valore disponibile, o può prima decadere in uno stato eccitato ${}_{Z-2}^{A-4}Y^*$ del nucleo figlio emettendo una particella α di energia inferiore all'intero Q -valore. Il nucleo figlio eccitato risultante potrà

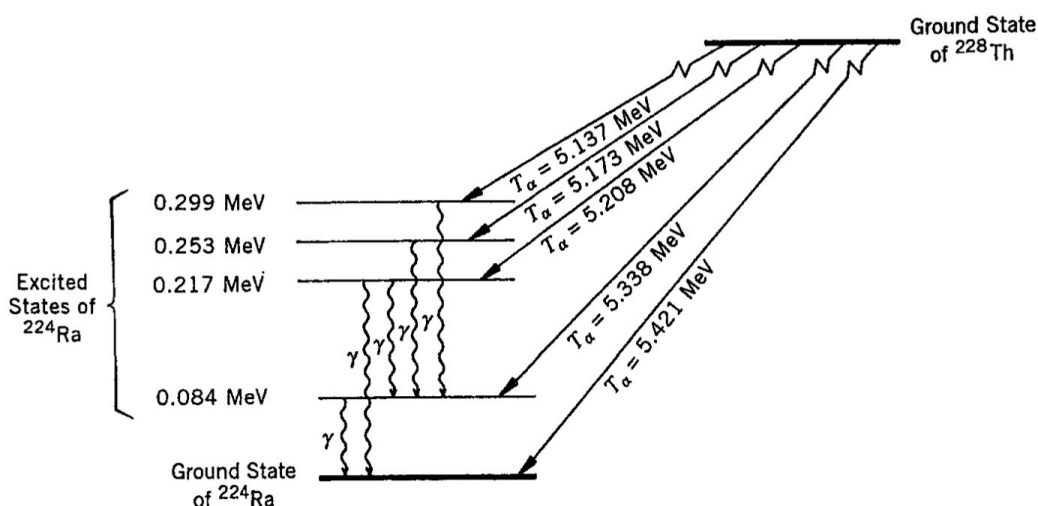
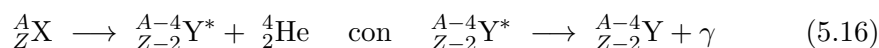


Figura 5.3: Struttura dello spettro di emissione α del torio ${}^{228}\text{Th}$.

quindi decadere al proprio livello fondamentale emettendo fotoni γ , come ad esempio nel caso del torio ${}^{228}\text{Th}$ che decade α nel radio ${}^{224}\text{Ra}$, illustrato nelle figure [5.3](#) e [5.4](#)



Questo tipo di processo avviene raramente nei nuclei pari-pari, dato il loro ridotto Q -valore. Nei nuclei pari-dispari e dispari-dispari invece, è meno probabile che il nucleone spaiato prenda parte al processo di formazione della particella α , per cui ha una maggior probabilità di trovarsi in un livello eccitato del nucleo figlio Y, dopo il decadimento α .

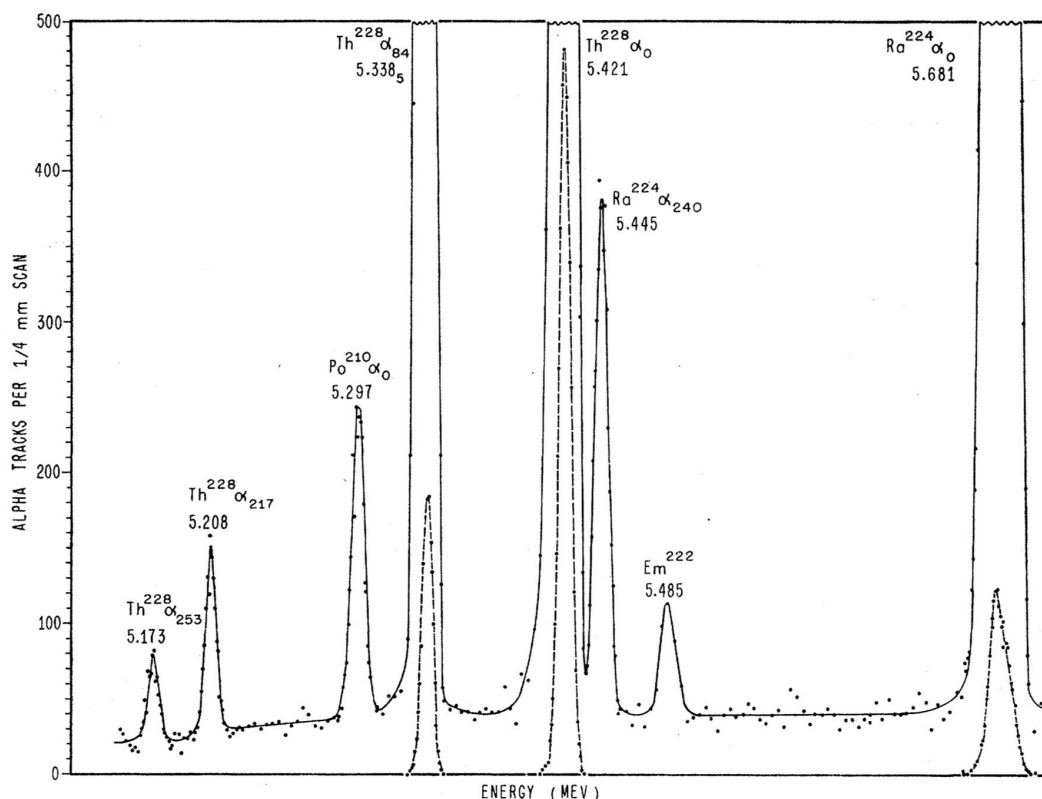


Figura 5.4: Spettro α del torio ^{228}Th [Asaro & al., Phys. Rev. 92 (1953) 1495]. L'area di ogni picco è proporzionale al rateo di decadimento per l'energia ad esso associata.

La struttura fine dello spettro può essere determinata dalla misura delle energie cinetiche delle diverse particelle α osservate in un particolare decadimento, confrontata con il corrispondente Q -valore disponibile.

$$Q_\alpha \approx E_{k,\alpha} + E_\gamma \quad (5.17)$$

La misura diretta delle energie dei fotoni γ associati conferma quindi l'esistenza nel nucleo di una struttura a stati energetici discreti.

Talvolta si osserva l'emissione di particelle α con energie maggiori di quelle corrispondenti alla transizione tra i due livelli fondamentali dei nuclei genitore e figlio, ed è dovuta a decadimenti che avvengono a partire da livelli eccitati del nucleo genitore.

L'analisi sistematica dei risultati sperimentali provenienti da decadimenti α mostra che la vita media $\tau_\alpha = 1/\lambda_\alpha$ dei nuclei α -instabili varia su un'intervallo amplissimo di valori, da un massimo di circa 10^{10} anni fino a circa 10^{-7} secondi, per oltre 24 ordini di grandezza; le corrispondenti energie E_α delle particelle emesse variano da alcuni MeV fino a circa 10 MeV. I nuclidi a vita

media più breve emettono quindi particelle α più energetiche, e viceversa. Sempre dai dati sperimentali si deduce che la probabilità di decadimento α

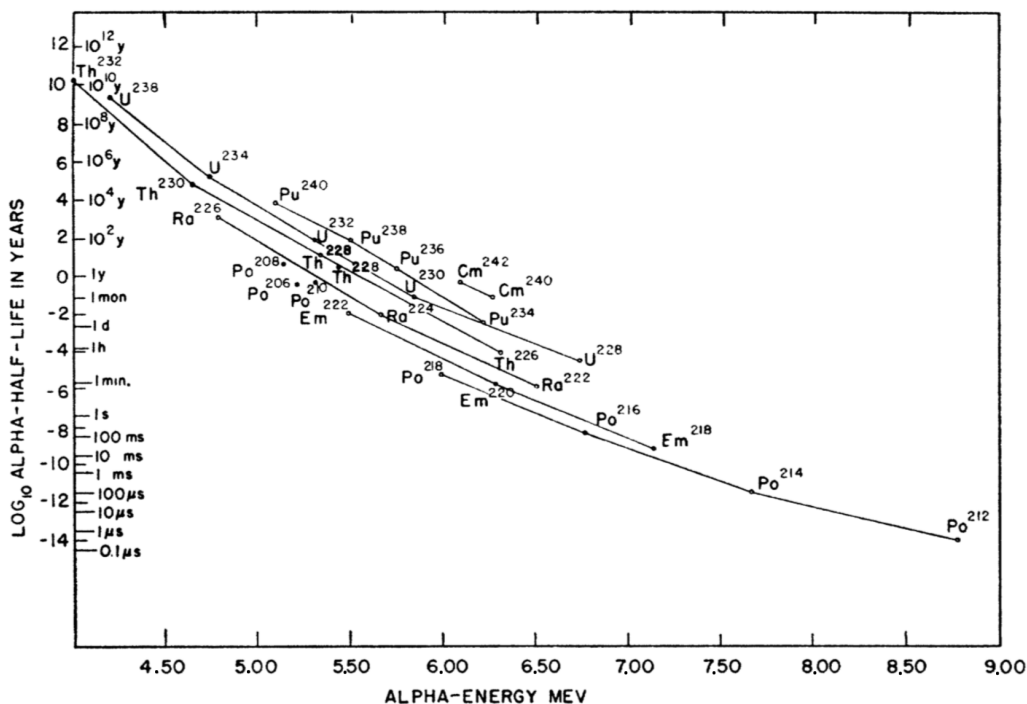


Figura 5.5: Vita media verso l'energia per α emesse da nuclei pari-pari [I.Permann, A.Ghiorso, G.T.Seaborg, Phys. Rev. 75 (1949) 1096].

del nucleo genitore è una funzione rapidamente crescente dell'energia $E_{k,\alpha}$, ovvero di Q_α , e dunque la riga più intensa dello spettro è quella dal livello fondamentale del nucleo genitore al livello fondamentale del nucleo figlio. Per riorganizzare la comprensione di questi dati sperimentali e prima della formulazione di una teoria da parte di Gamow et al., Geiger e Nuttall suggerirono, nel 1911⁴ una relazione empirica che collega la probabilità di decadimento λ_α e l'energia totale, ovvero il Q -valore a disposizione del decadimento, per ogni catena isotopica

$$\log \lambda_\alpha = A(Z) Q_\alpha^{-1/2} + B(Z) \quad (5.18)$$

con $A(Z)$ e $B(Z)$ coefficienti che vanno determinati tramite fit sui dati sperimentali.

Prendendo l'esponente ad ogni membro della [5.18](#) si può anche scrivere

$$\lambda_\alpha(Q_\alpha) \propto e^{D(Z) Q_\alpha^{-1/2}} \quad (5.19)$$

⁴H.Geiger, J.M.Nuttall, "The ranges of the α particles from various radioactive substances and a relation between range and period of transformation" - Philos. Mag. 22 (1911) 613-621

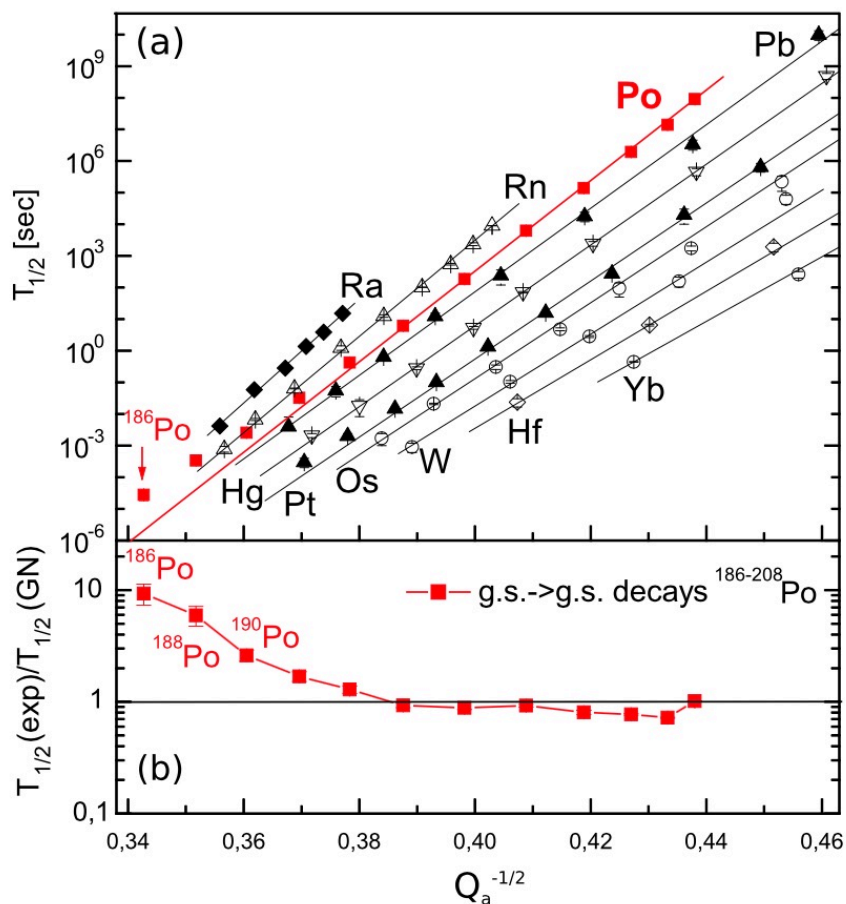


Figura 5.6: Dipendenza del tempo di dimezzamento $T_{1/2}$ dall'inverso della radice quadrata del Q -valore, per i decadimenti α di alcune catene isotopiche. Sono sovrapposte le previsioni secondo Geiger-Nuttal ed è in evidenza il comportamento del Po. (Andreyev et al., Phys. Lett. B 734 (2014) 203)

La relazione di Geiger e Nuttall descrive abbastanza bene i dati finché la dipendenza di $\log \lambda_\alpha$ dal numero di neutroni si mantiene lineare.

Un risultato che senz'altro una teoria del decadimento alfa deve riprodurre, e la teoria di Gamow et al. entro opportune approssimazioni lo fa, è di riottenere la relazione di Geiger e Nuttall ⁵.

In figura 5.6 è illustrato uno studio recente in cui, con la relazione di Geiger e Nuttall, si descrive la dipendenza da $Q_\alpha^{-1/2}$ dei tempi di dimezzamento ⁶ per decadimento α di un certo numero di catene isotopiche, evidenziando i problemi che insorgono nel caso degli isotopi leggeri del polonio "Po".

⁵Si veda l'Appendice ⁵.

⁶Il legame fra tempo di dimezzamento $T_{1/2}$ e vita media τ è dato nel paragrafo 6.1

5.2.1 Soglia di instabilità

Si vuole ora individuare per quali valori di A e Z il decadimento α sia energeticamente possibile, tenendo conto del fatto che in ogni decadimento una parte dell'energia di massa del genitore è convertita in energia cinetica dei prodotti del decadimento.

Dato che la massa di un nucleo equivale alla somma delle masse dei nucleoni costituenti meno l'energia totale di legame divisa per c^2 , e dato che nel decadimento α i nucleoni non cambiano natura, si ha che il decadimento può aver luogo soltanto se accompagnato da un aumento dell'energia di legame per nucleone nei prodotti finali, rispetto al nucleo genitore.

Analizzando l'andamento dell'energia media di legame per nucleone $\langle B \rangle \equiv |B/A|$ in funzione di A , come mostrata in figura 4.5, ed essendo il ^{56}Fe il nuclide più stabile, ciò è possibile soltanto nella regione dove $\partial\langle B \rangle/\partial A < 0$ e contemporaneamente $A > 60$.

Il Q -valore del decadimento α espresso dalla 5.8 può essere scritto in termini delle energie medie di legame per nucleone $\langle B \rangle_{X,Y,\alpha}$ dei nuclei coinvolti

$$\begin{aligned} Q &\equiv [M(A, Z) - M(A - 4, Z - 2) - M_\alpha] c^2 = \\ &= A(\langle B_Y \rangle - \langle B_X \rangle) - 4(\langle B_Y \rangle - \langle B_\alpha \rangle) > 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Essendo l'energia media di legame di un nucleone nella particella α : $\langle B_\alpha \rangle \simeq 7.1$ MeV, quindi minore di quelle per i nuclei pesanti coinvolti nel decadimento, ne segue che il secondo termine della 5.20 è positivo, da cui si ha che la soglia di instabilità deve essere decisamente superiore ad $A = 60$.

Utilizzando la formula di Weizsäcker 4.55 a meno del termine d'accoppiamento, ponendo $Z(Z - 1) \simeq Z^2$, e sviluppando in serie troncando al primo membro, il calcolo del Q -valore dà

$$\begin{aligned} Q &= 4\langle B \rangle_\alpha - [A\langle B \rangle_X - (A - 4)\langle B \rangle_Y] = B_\alpha - (B_X - B_Y) \simeq \\ &\simeq B_\alpha + 4b_V + 4\left[\frac{2}{3}b_S + b_C Z \left(1 - \frac{Z}{3A}\right)\right] A^{-1/3} - 4b_{sim} \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Sostituendo ora i valori dei parametri b_k come riportati in 4.56, si ottengono nel piano (Z, A) , le linee per

$$Q = \text{costante}$$

(figura 5.7) che individuano le *soglie di instabilità* del decadimento per emissione di particelle α con energia cinetica $E_k, \simeq Q$. Si noti che si ottiene:

$$\begin{aligned} Q = 0 \text{ MeV} &\rightarrow A \approx 140 \\ Q = 4 \text{ MeV} &\rightarrow A \approx 200 \\ Q = 8 \text{ MeV} &\rightarrow A \approx 240 \end{aligned}$$

Il decadimento α è quindi energeticamente possibile anche per nuclei con $A < 200$, ma siccome i decadimenti α con $Q < 4$ MeV sono caratterizzati dall'aver vite medie così lunghe da renderli praticamente inosservabili, si può affermare che i nuclei con $A < 200$ sono essenzialmente nuclei stabili rispetto all'emissione α .

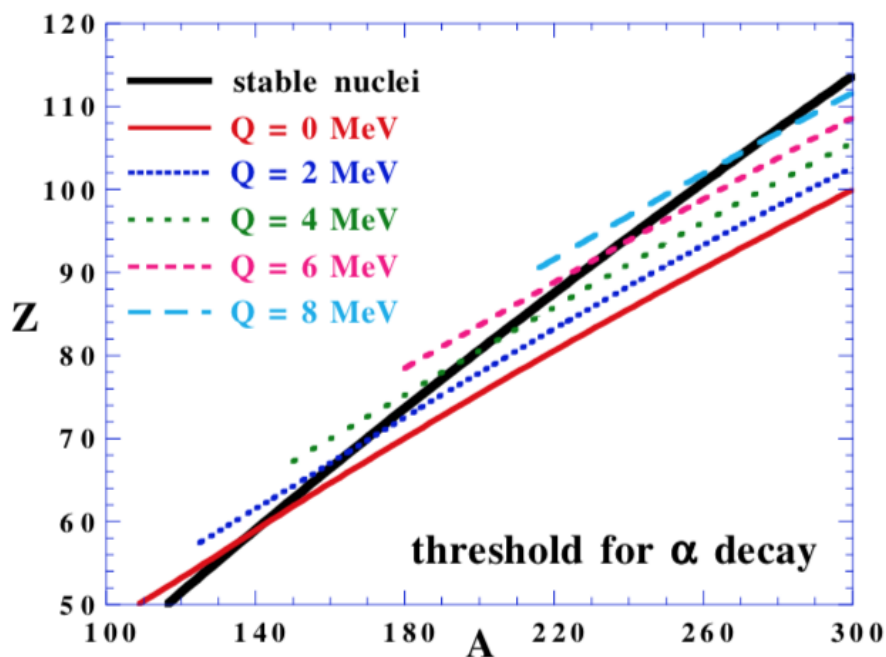


Figura 5.7: Linee di instabilità per il decadimento α .

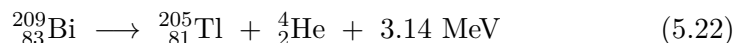
5.2.2 Teoria del decadimento α

La teoria proposta nel 1928 da Gamow, e indipendentemente da Gurney e Condon per spiegare il decadimento α , pur fornendo una descrizione quantitativa e predittiva del fenomeno è però basata su un approccio che si avvale di assunzioni e descrizioni fisiche approssimate. Se ne riportano qui le linee generali, mettendo in evidenza i risultati e la capacità di riprodurre la legge di Geiger-Nuttal, ma lasciando il calcolo completo di un caso semplificato all'Appendice [C](#).

Le particelle α emesse dai nuclei non esistono come tali nei nuclei prima del decadimento, ma si formano durante questo processo. Gamow formulò però la sua teoria ammettendo l'ipotesi base che almeno a sufficiente distanza dal centro di massa del sistema, il nucleo genitore possa essere descritto come un sistema costituito da "particella α + nucleo figlio", in cui si assume quindi che la particella α possieda una propria identità strutturale e si muova all'interno di una buca di potenziale.

L'energia potenziale del sistema nella sua interezza può allora essere rappresentata come l'energia del sistema "particella α + nucleo figlio" considerati come due sottosistemi nucleari separati.

Ci si riferisca ad esempio al decadimento



energeticamente possibile ma che non viene in pratica osservato, data la sua lunghissima vita media pari a 1.9×10^{19} anni. In figura 5.8 è mostrata

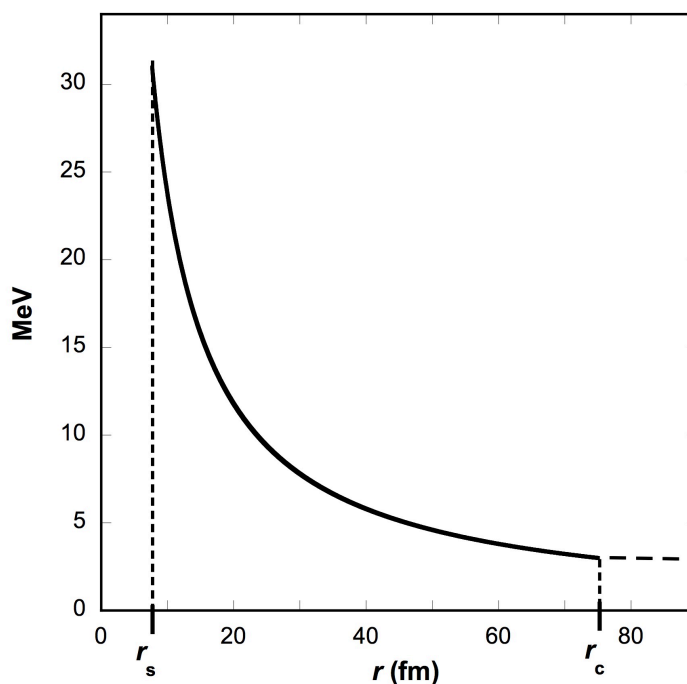


Figura 5.8: Energia potenziale elettrostatica di una particella α rispetto a un nucleo di tallio di ${}^{205}_{81}\text{Tl}$.

l'energia potenziale elettrostatica $V(r) \propto 2Ze^2/r$ della particella α a una distanza r da un nucleo di tallio. È indicata anche la distanza r_s alla quale l'interazione nucleare comincia a diventare predominante. Immaginando i due nuclei come due sfere rigide di raggi dati dalla formula $R_A = R_0 A^{1/3}$, si può stimare r_s come

$$r_s \simeq R_0 [(A)^{1/3} + (4)^{1/3}] \sim 8.23 \text{ fm} \quad (5.23)$$

È circa a questa distanza, nella regione in prossimità della superficie del nucleo di bismuto (Bi), che si può considerare la particella α come ormai formata.

In figura 5.8 è indicata anche la distanza $r_c \simeq 75$ fm, che classicamente coincide con quella di massimo avvicinamento possibile al nucleo di tallio da parte di una particella α di energia cinetica $E_k = Q_\alpha$, ovvero pari al Q -valore del decadimento analizzato, per cui

$$r_c = \frac{2Z_{Tl} e^2}{4\pi\epsilon_0 Q_\alpha} = \frac{Z_{Tl} e^2}{2\pi\epsilon_0 Q_\alpha} \quad (5.24)$$

Il parametro r_c viene anche detto *raggio esterno della barriera*.

Per quanto concerne il potenziale totale sentito dalla particella α , all'esterno del nucleo si può assumere che coincida con quello coulombiano repulsivo che tende a 0 per $r \rightarrow \infty$.

All'interno del nucleo, per distanze inferiori ad r_s , la particella sentirà il potenziale attrattivo delle forze nucleari ma fino a un valore di $r \approx \delta < r_s$, al di sotto del quale perde significato l'ipotesi di immaginare la particella α come una struttura dotata di una propria individualità entro il nucleo genitore.

Il potenziale globale potrà quindi essere descritto da un andamento come quello in figura 5.9, dove appare in grigio la zona in cui non ha più senso descrivere il fenomeno in termini di potenziale. Si modella quindi il processo di decadimento immaginando che la particella α si trovi entro la buca di potenziale descritta e che per uscirne deva, avendo come energia a disposizione i 3.14 MeV del Q -valore, affrontare e "superare" la notevole barriera di potenziale coulombiano presente che alla distanza $r = r_s$ vale, per il bismuto, circa 28.4 MeV.

Ciò è impossibile dal punto di vista classico, ma possibile ricorrendo all'effetto tunnel quantistico. Si immagina quindi che la particella α si muova all'interno della buca di potenziale descritta e che per la gran parte del tempo venga riflessa dalle sue pareti che solo talvolta riesce ad attraversare per effetto tunnel.

La probabilità del decadimento può quindi essere espressa come il prodotto di due fattori in prima approssimazione indipendenti:

- la *frequenza* con la quale si può avere una particella α con la propria individualità all'interno del nucleo;
- la *probabilità* che la particella α superi la barriera di potenziale.

Si è in grado di dire qualcosa sul secondo fattore, la probabilità di superamento della barriera, il cui calcolo è svolto in modo approssimato nell'Appendice C per l'esempio del decadimento α del bismuto qui considerato. Tale fattore è responsabile di quanto descritto dalla relazione di Geiger e Nuttal.

Dal calcolo si ottiene infatti, per la vita media e la probabilità di decadimento associata:

$$\tau_\alpha = \tau_0 e^G \quad \text{e,} \quad \lambda_\alpha = \frac{1}{\tau_0} e^{-G} = \lambda_0 e^{-G} \quad (5.25)$$

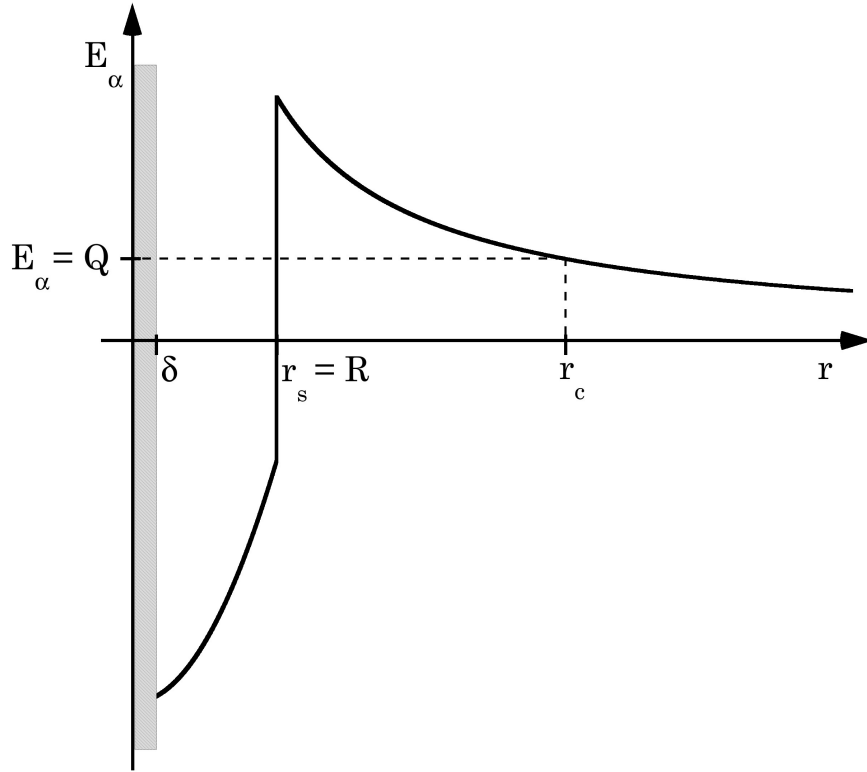


Figura 5.9: Schema dell'andamento del potenziale globale sentito da una particella α .

dove G , detto fattore di Gamow vale, per energie non troppo alte

$$G \simeq \frac{Ze^2}{2\epsilon_0 \hbar c \beta_\alpha} \sim (E_{k,\alpha})^{-1/2} \quad \text{con,} \quad \beta_\alpha = \frac{v_\alpha}{c} \quad (5.26)$$

essendo v_α la velocità della particella α fuori dalla barriera di potenziale, e τ_0 una funzione lentamente variabile, approssimabile ad una costante indipendente dal particolare nucleo considerato.

La grande estensione di possibili vite medie per decadimenti α è quindi spiegata dalla presenza nell'esponente del fattore di Gamow che fa sì che piccole variazioni nell'energia delle particelle α emesse determinino appunto grandi effetti sulle vite medie.

Assumendo ragionevolmente $\tau_0 = 7.0 \cdot 10^{-23}$ s, si possono ad esempio calcolare i valori di τ_α riportati in tabella per alcune sequenze isotopiche, dove sono confrontati con i valori sperimentali corrispondenti.

| | Q_α (MeV) | r_s (fm) | r_c (fm) | G | τ_{exp} (s) | τ_{th} (s) |
|---|---------------------|---------------|---------------|------|----------------------|--|
| ${}^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\text{Th}$ | 4.27 | 8.52 | 60.7 | 0.53 | 2.0×10^{17} | 3.3×10^{17} |
| | | | | | | (${}^{234}_{90}\text{Th} \rightarrow {}^{234}_{91}\text{Pa} \rightarrow {}^{234}_{92}\text{U}$) |
| ${}^{234}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{230}_{90}\text{Th}$ | 4.86 | 8.49 | 53.3 | 0.51 | 1.1×10^{13} | 1.1×10^{13} |
| ${}^{230}_{90}\text{U} \rightarrow {}^{226}_{88}\text{Ra}$ | 4.77 | 8.45 | 53.1 | 0.51 | 3.5×10^{12} | 3.9×10^{12} |
| ${}^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn}$ | 4.87 | 8.41 | 50.9 | 0.50 | 7.4×10^{10} | 7.4×10^{10} |
| ${}^{222}_{86}\text{Rn} \rightarrow {}^{218}_{84}\text{Po}$ | 5.59 | 8.37 | 43.3 | 0.46 | 4.8×10^5 | 4.2×10^5 |
| ${}^{218}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{214}_{82}\text{Pb}$ | 6.11 | 8.33 | 38.7 | 0.43 | 2.6×10^2 | 1.6×10^2 |
| | | | | | | (${}^{214}_{82}\text{Pb} \rightarrow {}^{214}_{83}\text{Bi} \rightarrow {}^{214}_{84}\text{Po}$) |
| ${}^{214}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{210}_{82}\text{Pb}$ | 7.84 | 8.28 | 30.1 | 0.36 | 2.3×10^{-4} | 1.1×10^{-4} |
| | | | | | | (${}^{210}_{82}\text{Pb} \rightarrow {}^{210}_{83}\text{Bi} \rightarrow {}^{210}_{84}\text{Po}$) |
| ${}^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{206}_{82}\text{Th}$ | 5.41 | 8.24 | 43.7 | 0.47 | 1.7×10^7 | 5.8×10^5 |

È straordinario il livello con cui questa teoria semplice è in accordo con i risultati sperimentali, ricordando che copre scale temporali che vanno dall'età della Terra che è di circa $1.45 \times 10^{17} s$, fino a tempi dell'ordine di $10^{-4} s$. La discrepanza maggiore si ha nel caso del ${}^{210}_{84}\text{Po}$, che avendo un numero di neutroni magico (126) corrisponde a una shell chiusa.

Da quanto riportato in tabella si nota anche che un nucleo figlio di un decadimento α può essere β -instabile.