

## Approccio perturbativo ai decadimenti

Decadimento  $\alpha$  presuppone formazione ed esistenza della  $\alpha$  nel nucleo, quindi un intervento energeticamente significativo sulla struttura del nucleo, precedente all'emissione di  $\alpha$ .

Si può invece supporre che l'emissione di  $e^-$ ,  $e^+$  o raggi  $\gamma$  comporti qualcosa alla stregua di una **perturbazione** che agisce sugli stati energetici del nucleo, che se abbastanza piccola permette di calcolare la probabilità del decadimento.

Risolvendo equazione di Schrodinger per un sistema con potenziali indipendenti da  $t$  si hanno livelli corrispondenti a **stati stazionari**.

Un sistema in uno stato stazionario, vi permane e non transisce verso altri stati, a meno che non venga **perturbato**.

Si immagina che un potenziale del tipo  $\phi + \phi'$ , con  $\phi$  potenziale nucleare responsabile degli stati stazionari e  $\phi'$  additivo e molto debole (perturbativo) che può determinare transizioni fra gli stati.

Trascurando dapprima  $\phi'$  si risolve per  $\phi$ , ottenendo le funzioni d'onda **statiche** del nucleo, che si usano per calcolare le probabilità di transizione fra **stati stazionari** sotto l'influenza della perturbazione  $\phi'$ .

Probabilità di transizione corrisponde a costante  $\lambda$  di decadimento data dalla **seconda regola d'oro** di Fermi

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \mathcal{M}'_{fi} \right|^2 \rho(E_f) \quad \text{con} \quad \mathcal{M}'_{fi} = \langle \psi_f | \Phi' | \psi_i \rangle = \int \psi_f^* \Phi' \psi_i dV \quad \text{e l' } \int \text{ esteso a tutto lo spazio.}$$

Note  $\psi_f$  e  $\psi_i$  si può calcolare  $\mathcal{M}'_{fi}$ , da cui la probabilità di transizione  $\lambda$ , confrontabile con i risultati sperimentali nota che sia la densità degli stati finali accessibili dal sistema:  $\rho(E_f) = dn_f/dE_f$ . Come è intuibile  $\lambda$  cresce con  $\rho$  che dipende dallo stato finale dopo il decadimento e dall'energia emessa col decadimento.

Soluzione eq. Schrodinger per  $\phi$  indep. da  $t$  da' stati stazionari  $\psi_a(\mathbf{r})$  del nucleo.

La funz. d'onda dipendente da  $t$  è  $\psi_a(\vec{r}, t) = \psi_a(\vec{r}) e^{-iE_a t/\hbar}$ , con  $E_a$  energia e  $|\psi_a(\vec{r}, t)|^2$  probabilità indep. da  $t$  di trovare il sistema in quello stato stazionario.

Per consistenza con la legge del decadimento radioattivo, la probabilità di trovare il sistema in decadimento sempre nello stesso stato deve diminuire col tempo come  $e^{-\lambda_a t} = e^{-t/\tau_a}$

$$|\psi_a(\vec{r}, t)|^2 = |\psi_a(\vec{r}, t = 0)|^2 e^{-t/\tau_a}$$

Si ha dunque, per la funz. d'onda dipendente da  $t$

$$\psi_a(\vec{r}, t) = \psi_a(\vec{r}) e^{-iE_a t/\hbar} e^{-t/2\tau_a}$$

Così non si ha però più uno stato stazionario e non se ne può dunque determinare con esattezza l'energia.

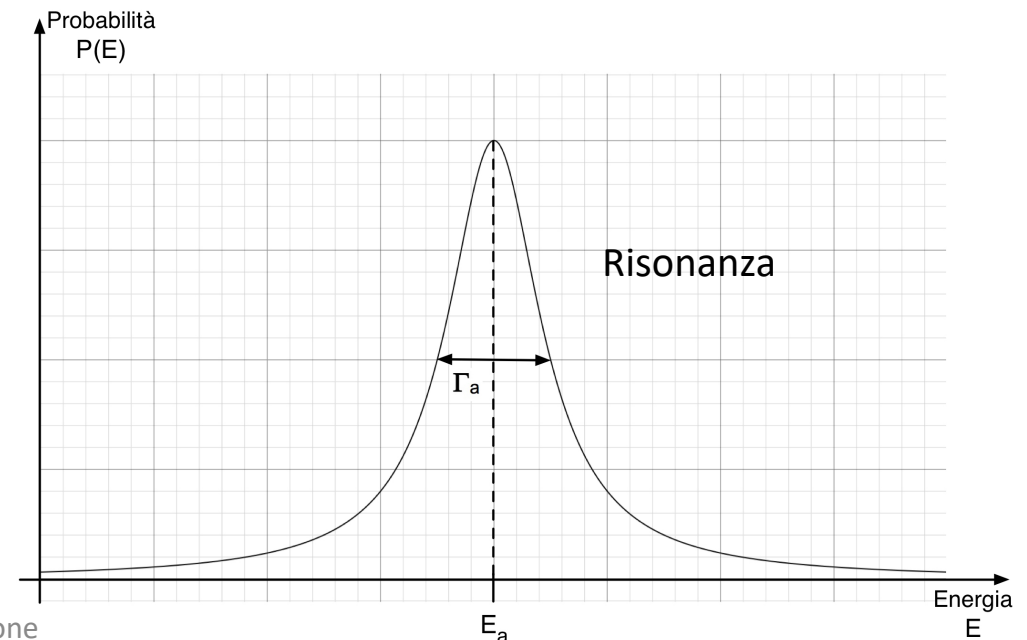
Se lo stato ha una vita media  $\tau = 1/\lambda$ , l'incertezza associata alla determinazione della sua energia è  $\Delta E \cong \hbar/\tau$ .

La trasformata di Fourier di  $e^{-t/2\tau_a}$  fornisce la distribuzione dei livelli energetici.

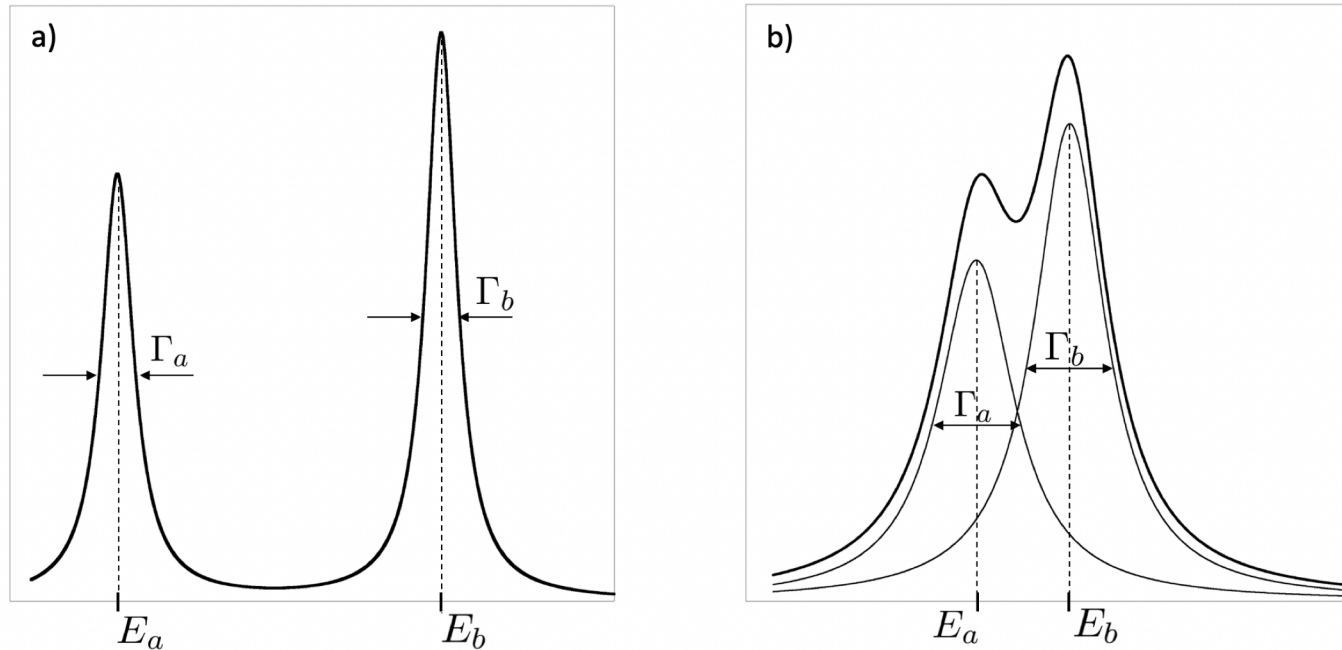
La probabilità d'osservare il sistema in un intorno compreso fra  $E$  ed  $E+dE$ , in prossimità di  $E_a$  è data da

$$P(E)dE \propto \frac{dE}{(E - E_a)^2 + \Gamma_a^2/4}$$

e  $\Gamma_a = \hbar/\tau_a$  è detta **larghezza dello stato** e quantifica l'impossibilità di determinare con precisione l'energia dello stato  $\alpha$ .



Si parla di transizioni fra diversi stati anche se questi non sono caratterizzati da valori esatti di energia, purché le larghezze di tali stati siano piccole a confronto delle differenze fra i valori medi di energia che caratterizzano ognuno degli stati stessi



Se le larghezze di due stati instabili sono piccole rispetto alla loro separazione energetica, come in a), i due stati sono ben riconoscibili; se invece i due stati si sovrappongono e mescolano come in b), allora non posseggono funzioni d'onda ben distinte l'una dall'altra.

Se  $\phi'$  è piccolo e indipendente da  $t$ , allora anche  $\lambda$  calcolato con la **regola d'oro** lo è.

Con tali condizioni l'effetto di  $\phi'$  su stati stazionari  $a$  e  $b$  di  $\phi$  da' la funzione d'onda perturbata  $\psi_a \longrightarrow \psi_a + \frac{\Phi'_{ba}}{E_b - E_a} \psi_b$

e il sistema inizialmente nello stato  $a$ , ha probabilità proporzionale a  $|\Phi'_{ba}|^2$  di trovarsi poi nello stato  $b$ .

Si considera questo come un **decadimento dallo stato  $a$  allo stato  $b$** .

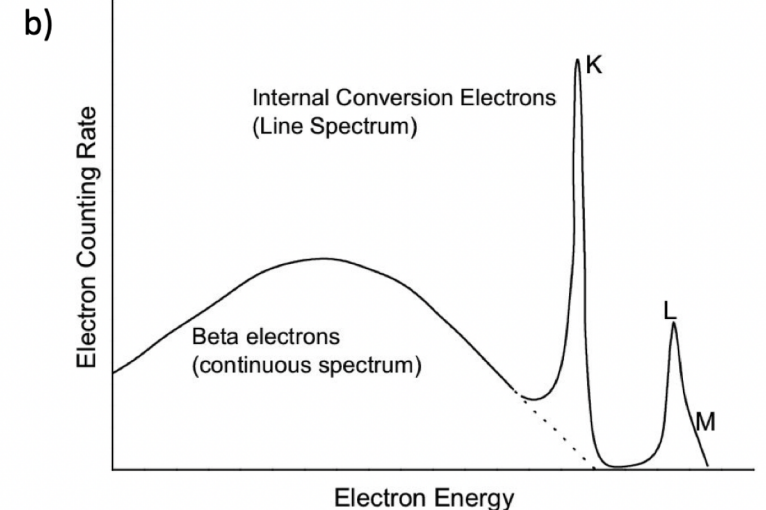
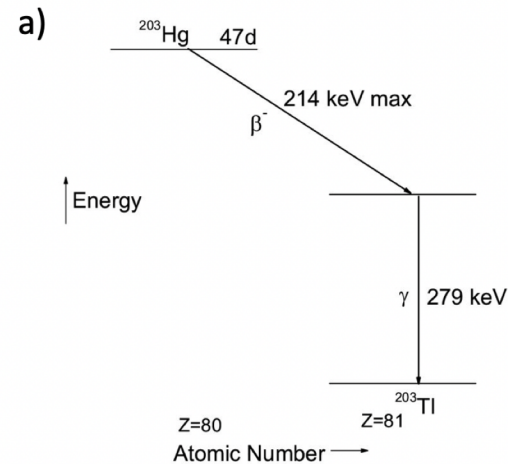
## Emissione di elettroni da nuclei e radioattività beta

Vi sono più modi in cui un nucleo può essere causa dell'emissione di elettroni (positroni)

- **Conversione Interna** \_ Sovrapposizione non nulla tra funz. d'onda di un elettrone atomico degli orbitali più interni e quella del nucleo  
 → probabilità finita che un  $e^-$  si trovi nel nucleo del proprio atomo, e possa accoppiarsi elettromagneticamente a stato energetico eccitato del nucleo, acquisendone direttamente l'energia associata, senza la preventiva produzione di un raggio  $\gamma$ .  
 In tal caso  $e^-$  viene emesso dall'atomo, non dal nucleo, con energia cinetica pari all'energia di transizione dello stato eccitato nucleare, equivalente alla differenza, moltiplicata per  $c^2$ , fra la massa del nucleo eccitato e dello stesso non eccitato, meno l'energia atomica di legame dell'elettrone  $E_{k,e} = E^* - B_e$ .

La conversione interna non determina quindi variazione di  $Z$  per l'atomo, ma soltanto una sua **"ionizzazione"**.

Dopo l'emissione di  $e^-$  per conversione interna, un  $e^-$  di un orbitale meno legato dello stesso atomo cade a riempire la posizione lasciata libera nell'orbitale più interna, con emissione di un raggio  $X$ .



Lo spettro d'emissione di  $e^-$  per conversione interna deve quindi essere **"discreto"**.

- **Decadimento  $\beta$**  \_ Un nucleo con rapporto  $N/Z$  **maggiore** o rispettivamente **minore** di quello dei nuclei stabili, può trasformarsi in un nucleo più stabile emettendo un  $e^-$  o rispettivamente un  $e^+$ .

Nel nucleo genitore si è quindi avuta o la trasformazione di un  $n$  in un  $p$ , nel caso del decadimento  $\beta^-$ , o la trasformazione di un  $p$  in un  $n$ , nel caso del decadimento  $\beta^+$ .

Dai valori delle masse di  $p$ ,  $n$  ed  $e^-$  (uguale a quella di  $e^+$ ),  $938.27 \text{ MeV}/c^2$ ,  $939.56 \text{ MeV}/c^2$  e  $0.511 \text{ MeV}/c^2$ , il decadimento  $\beta^-$  è energeticamente permesso per  $n$  liberi, con vita media  $\tau_n = 881.5 \text{ s}$ ; non lo è il decadimento  $\beta^+$  per  $p$  liberi, che risultano stabili con limite inferiore per la vita media di  $2.2 \times 10^{29}$  anni.

Il possibile decadimento  $\beta^-$  o  $\beta^+$ , nei nuclei dipende dalle energie di legame relative degli isobari con diversi valori di  $Z$  ed  $N$ .

( **Cattura K**: un nucleo con meno  $n$  di un corrispondente isobaro stabile, o con eccesso di  $p$ , può ridurre di un'unità la propria carica anche assorbendo un  $e^-$  da un orbitale atomico (tipicamente K) del proprio atomo (*cattura K*).

Un  $e^-$  da un orbitale più esterno casca poi nell'orbitale dell' $e^-$  catturato dal nucleo, con emissione di uno o più raggi-X, e il numero di nucleoni del nucleo resta sempre invariato. )

Nelle misure sui decadimenti  $\beta$  veniva osservata sempre solo emissione di  $e^-$  o  $e^+$ , assieme al nucleo figlio, e si pensava quindi si trattasse di un decadimento in due corpi, come il decadimento  $\alpha$ .

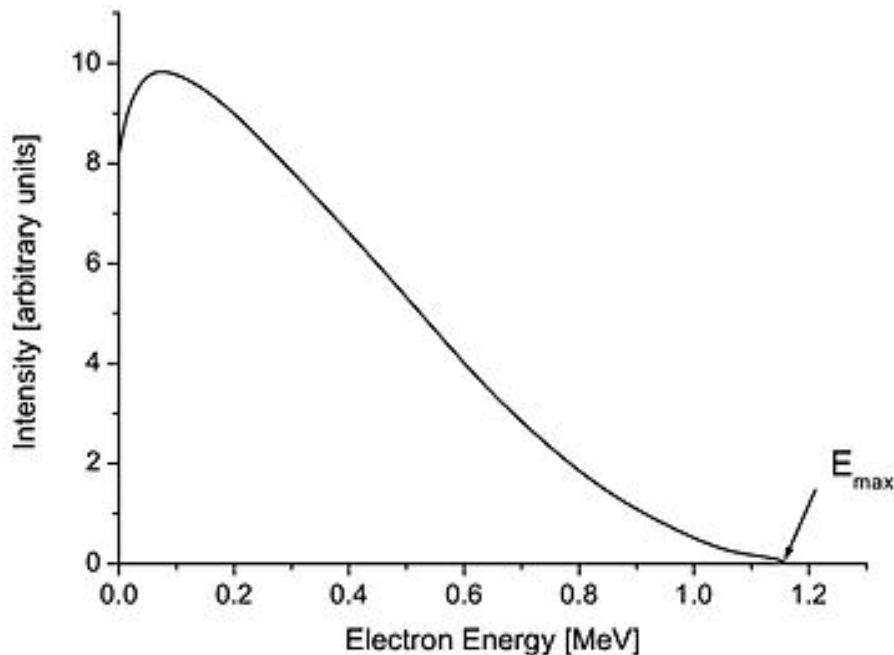
Da conservazione dell'energia nel CM del genitore  $X$ , l'energia  $E_e$  dell' $e$  dovrebbe essere allora 
$$E_e = \frac{M_X^2 c^2 + m_e^2 c^2 - M_Y^2 c^2}{2M_X}$$

e di conseguenza l'energia cinetica dell'  $e$  
$$E_{k,e} = \frac{M_X^2 c^2 + m_e^2 c^2 - M_Y^2 c^2}{2M_X} - m_e c^2$$

Ci si attendeva quindi uno spettro discreto con un unico valore, per l'energia degli  $e^-$  emessi.

Gli spettri misurati di emissione  $\beta$  hanno invece andamento continuo, a partire da un valore minimo, compatibile con 0, fino ad annullarsi per un valore massimo corrispondente ad  $E_{max} \simeq E_{k,e}$ .

Se il decadimento  $\beta$  fosse in in due corpi si avrebbe quindi per esso la violazione del principio di **conservazione dell'energia totale** per un sistema isolato, e le misure di spin sui prodotti di decadimento implicavano anche violazione del principio di conservazione del **momento angolare totale!**



Spettro continuo d'energia degli  $e^-$  emessi nel decadimento  $\beta^-$  del bismuto ( $^{210}\text{Bi}$ )

Per un noto teorema di Emmy Noether, ciò avrebbe anche implicato che l'universo non è isotropo e che ci devono essere un sistema di coordinate assoluto e una scala temporale assoluta, con le ovvie conseguenze ...

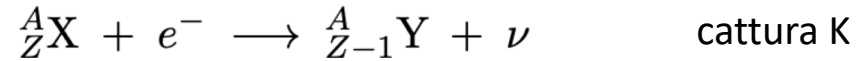
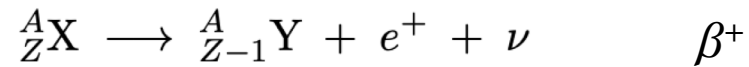
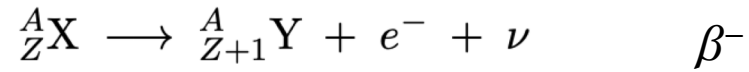
Nel 1930 Pauli propose l'esistenza di una particella, di "*molto difficile rivelazione*" che venisse emessa assieme ad  $e^-/e^+$  e al nucleo figlio; un decadimento in almeno tre corpi giustifica l'andamento continuo degli spettri energetici e non solo.

La conservazione della carica richiede che la particella di Pauli sia neutra.

Poiché le energie cinetiche massime degli  $e^-/e^+$  emessi nei decadimenti  $\beta$  sono circa pari all'energia che avrebbero se il decadimento fosse in due soli corpi, la massa di tale particella è molto piccola.

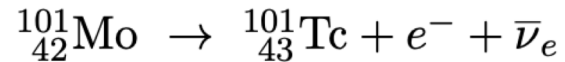
Dovendo questa particella anche garantire la conservazione del momento angolare, ne consegue che deve essere un fermione con spin pari ad  $1/2$ .

Fermi la chiamò **neutrino** ( $\nu$ ). Tenendo conto del neutrino i decadimenti  $\beta$  si possono scrivere



Sperimentalmente si trova che in una sequenza isobarica il nucleo con massa inferiore è stabile rispetto al decadimento  $\beta$ .

Isobari con più  $n$ , quali  ${}^{101}_{42}\text{Mo}$  e  ${}^{101}_{43}\text{Tc}$ , decadono convertendo un  $n$  del nucleo in un  $p$  ( $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ ), per cui

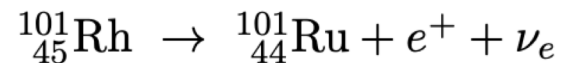


Isobari con eccesso di  $p$  rispetto al  ${}^{101}_{44}\text{Ru}$  decadono invece  $\beta^+$  convertendo un  $p$  del nucleo

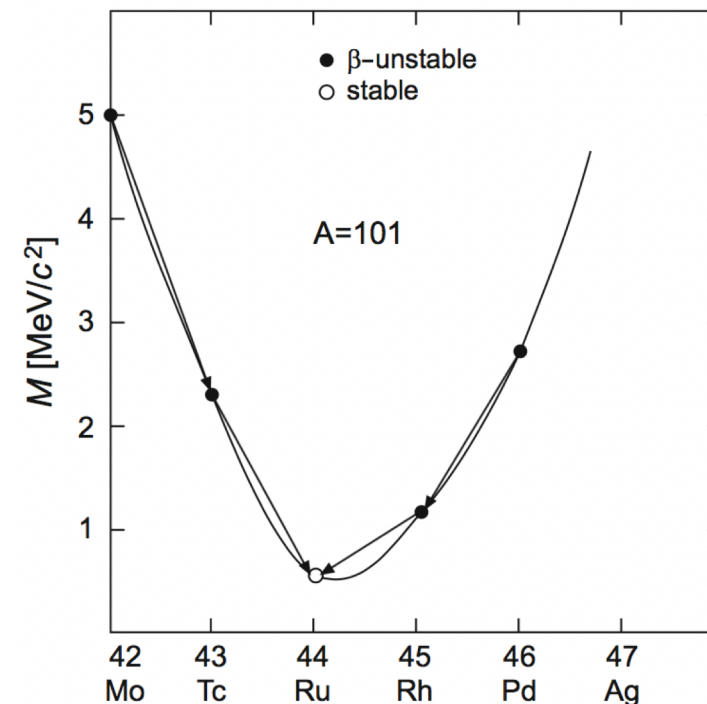


come  $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$  (\*).

L'isobaro  ${}^{101}_{44}\text{Ru}$  è prodotto dalla sequenza



illustrata qui a fianco



**La conservazione dell'energia vieta (\*) al di fuori dei nuclei.** In un nucleo essa è permessa se l'incremento in energia di legame del nucleo figlio derivante dal decadimento è sufficiente, cioè  $\geq (m_n + m_e + m_{\bar{\nu}_e} - m_p) c^2$ .

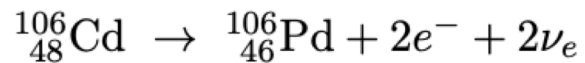
Nei nuclei con  $A$  pari le sequenze isobariche si dispongono su due diversi andamenti parabolici, uno per i nuclei **dispari-dispari** e separato del doppio dell'energia di accoppiamento  $2 |B_{ac}(A,Z)|$ , uno per i nuclei **pari-pari**.

Per valori di  $A > 70$  ci possono essere più isobari  $\beta$ -stabili.

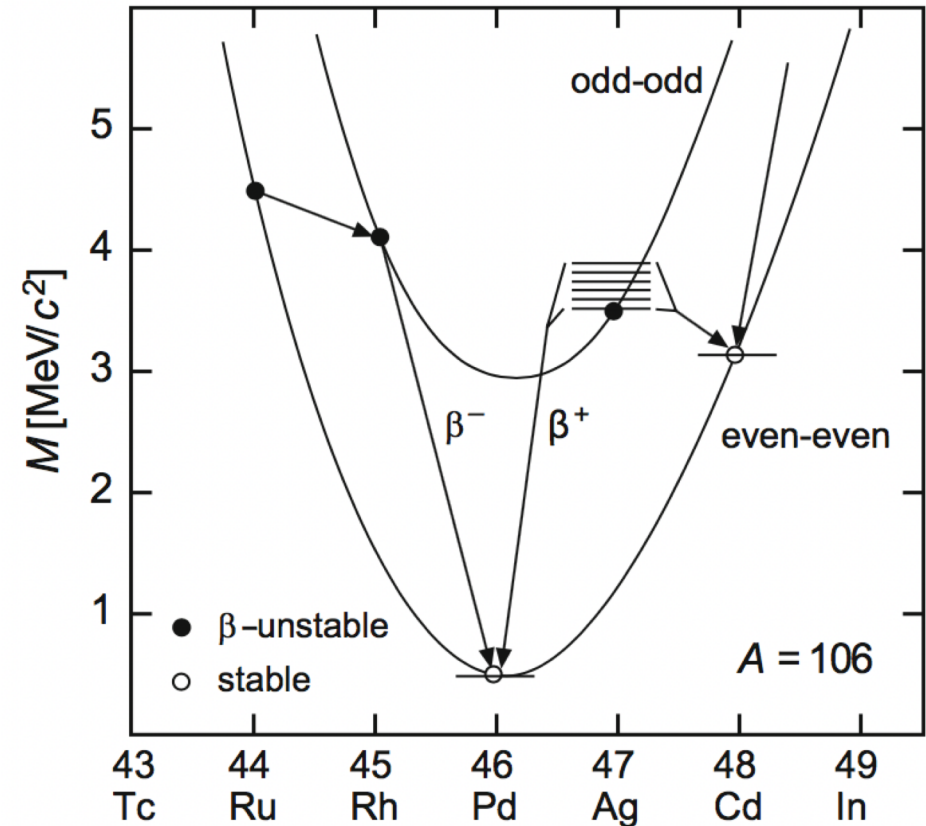
$^{106}\text{Pd}$  e  $^{106}\text{Cd}$  sono sulla parabola inferiore e  $^{106}\text{Pd}$ , il più stabile, è nel minimo della parabola pari-pari.

$^{106}\text{Cd}$  è  $\beta$ -stabile poiché i due isobari dispari-dispari più vicini sono su livelli energetici superiori.

Il decadimento del  $^{106}\text{Cd}$  in  $^{106}\text{Pd}$  sarebbe possibile solo attraverso un **doppio decadimento  $\beta$**



ma la probabilità di questo processo è così piccola che  $^{106}\text{Cd}$  può considerarsi stabile.





Vi sono nuclei che possono decadere sia  $\beta^-$  che  $\beta^+$ , come  $^{40}\text{K}$  e il  $^{64}\text{Cu}$ .

La **cattura K**, come la conversione interna, è dovuta alla probabilità non trascurabile che la funzione d'onda di un  $e$  si sovrapponga abbastanza a quella del nucleo, cosicché un  $p$  e l' $e$  si combinino per formare un  $n$  e un  $\nu$ :  $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$   
 Ciò avviene più spesso in nuclei pesanti, dove il raggio nucleare è maggiore e l'estensione degli orbitali atomici è minore.

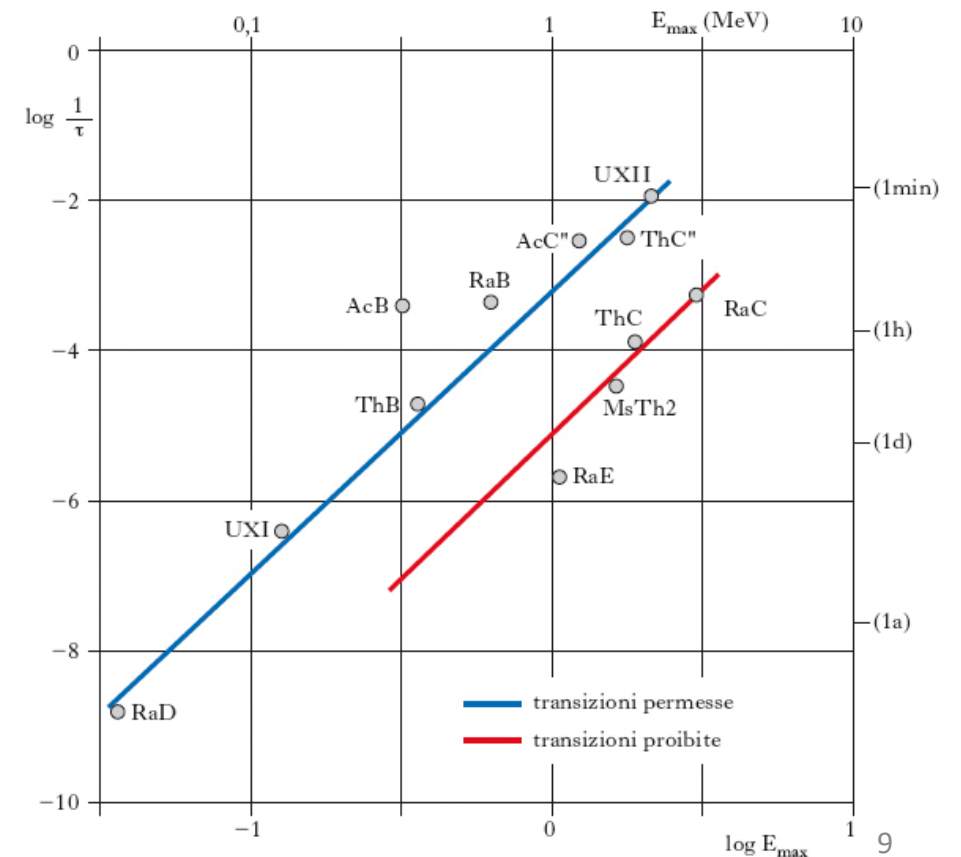
Le vite medie caratteristiche dei decadimenti  $\beta$  nucleari,  $\tau_\beta = 1/\lambda_\beta$ , spaziano fra  $\approx 10^{16}$  y e  $\approx 10^{-3}$  s, con la massima energia d'emissione  $E_0$  da alcune frazioni di MeV fino a  $\approx 7$  MeV.

La costante di decadimento  $\lambda_\beta$  va  $\approx$  come la quinta potenza dell'energia rilasciata (legge di **Sargent**):

- **Regole di Sargent** \_ Regolarità nei dati dei decadimenti  $\beta$  suggerirono a Sargent di graficare il **log** della costante  $\lambda_\beta$  verso il **log** della  $E_{max}$  degli  $e$  emessi; così la gran parte dei punti cadeva in prossimità di due curve quasi rettilinee e parallele.

Il diagramma risultante, detto di Sargent, esprime una regola empirica del tipo di quella di Geiger-Nuttal per il decadimento  $\alpha$ .

Una teoria del decadimento  $\beta$  deve poter riprodurre sia queste regolarità nei dati sperimentali che le caratteristiche degli spettri d'emissione  $\beta$ .



## Accenno alla Teoria di Fermi del decadimento $\beta$

Le  $\tau_\beta$  dei decadimenti  $\beta$  sono  $\gg$  di quelle caratteristiche delle interazioni nucleari ed elettromagnetiche: la scala temporale tipica dei processi forti è dell'ordine di  $10^{-23}$  s o inferiore, quella dei processi elettromagnetici dell'ordine di  $10^{-16}$  s.

Nonostante i decadimenti  $\beta$  siano un fenomeno nucleare, **non coinvolgono quindi ne' la forza nucleare ne' quella elettromagnetica.**

Data inoltre la piccolezza delle probabilità  $\lambda_\beta = 1/\tau_\beta$ , l'interazione associata deve essere **debole**.

Ciò condusse Fermi a postulare l'esistenza di una nuova forza, responsabile dei decadimenti  $\beta$ , chiamata **forza debole** e a breve raggio d'azione, essendo efficace solo entro l'ambiente nucleare.

La bassissima intensità di questa forza è responsabile delle lunghe vite medie osservate nei decadimenti  $\beta$ .

**Intensità relative:** assunta **1** per la forza **forte**, si ha  $\approx 10^{-2}$  per l'**elettromagnetica**,  $\approx 10^{-5}$  per la **debole**,  $\approx 10^{-39}$  per la **gravitazionale**.

Date queste premesse Fermi affrontò con tecniche perturbative la formulazione di una teoria del decadimento  $\beta$ .

Qui ora non sviluppiamo completamente il calcolo di Fermi, che è riportato negli appunti, ne delineiamo soltanto le ipotesi e la traccia.

Nei nuclei non ci sono  $e$  stabilmente presenti, quelli emessi col decadimento  $\beta$  non vengono dal nucleo ma devono essere prodotti al momento del decadimento, analogamente alle transizioni atomiche, i cui  $\gamma$  emessi non preesistono negli atomi ma sono prodotti al momento delle transizioni.

Come la transizione atomica è ad esempio indotta da un'interaz. di dipolo, **calcolabile perturbativamente**, similmente per il decadimento  $\beta$ , visto come dovuto alla **debole forza rappresentata dall'Hamiltoniano di interazione debole**.

**Fermi** affrontò il calcolo di  $\lambda_\beta$  e della **forma dello spettro** delle particelle emesse nel processo, con la **Regola d'Oro n. 2**.

La teoria di Fermi dell'interazione debole è una teoria di campo il cui Hamiltoniano d'interazione è un operatore agente sui campi fermionici tramite assorbimento o emissione di fermioni.

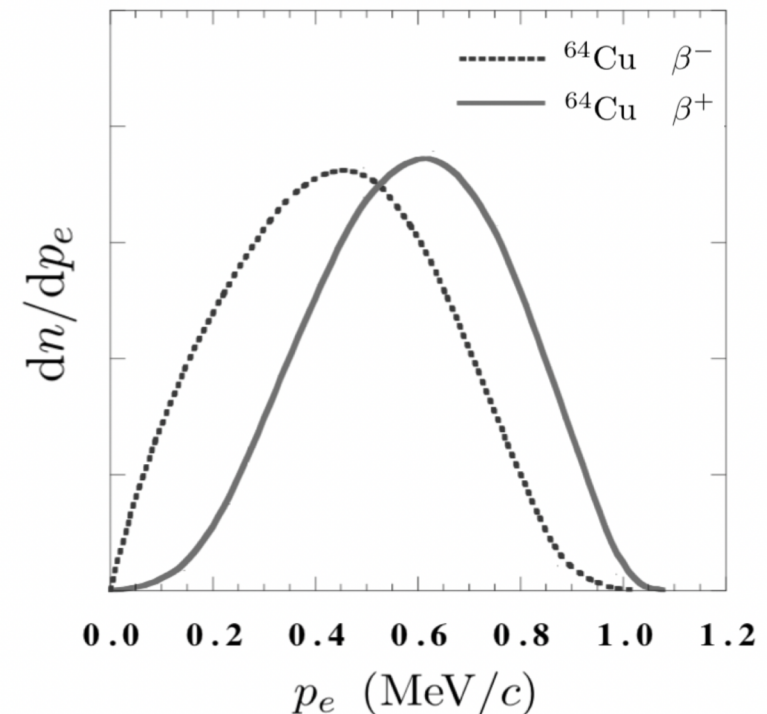
Fermi assunse che la probabilità d'emissione dipenda dalla probabilità per  $e$  e  $\nu$  di essere "creati" contemporaneamente e nello stesso punto, coincidente con le coordinate del centro di massa del nucleo, origine del sistema di riferimento.

Egli non introdusse quindi l'azione di un "**mediatore**" per l'interazione, ma considerò il processo come "**puntuale**".

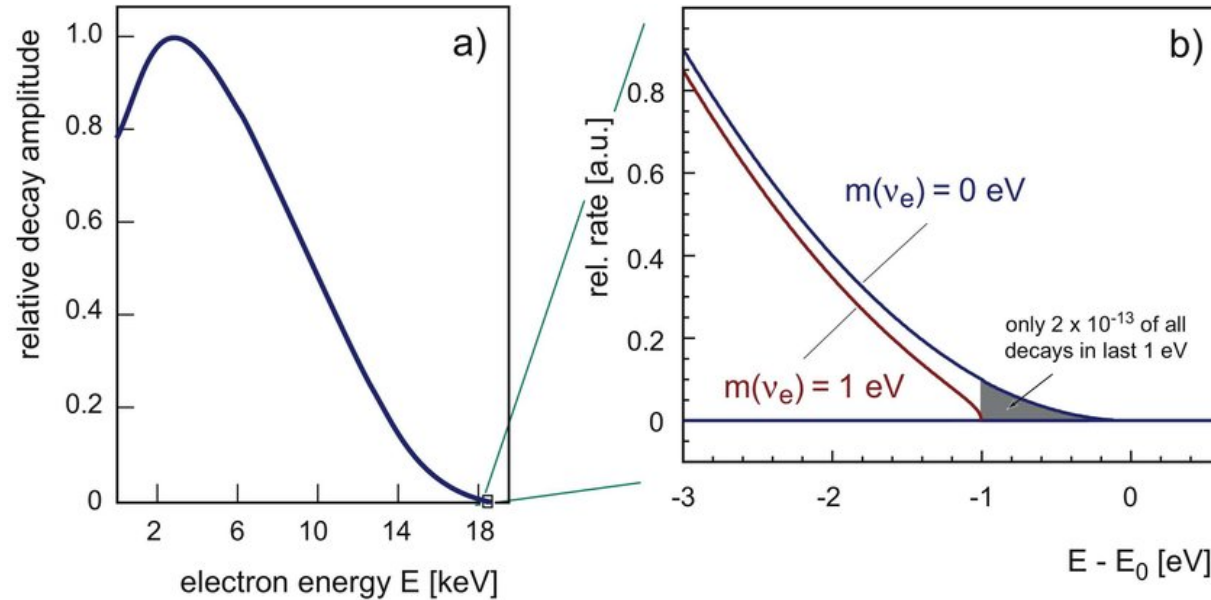
(Oggi sappiamo che il decadimento del  $n$  considerato da Fermi, avviene col decadimento di uno dei due **quark down** del  $n$  in un **quark up** più una "**particella virtuale**", il bosone  $W^-$  di massa pari a  $\approx 80.4 \text{ GeV}$ , che con una vita media di circa  $3 \times 10^{-24} \text{ s}$  decade poi in  $e + \nu$ . La breve vita media di  $W^-$  e la sua notevole massa giustificano l'ipotesi di "**puntualità**" del processo fatta da Fermi, date le basse energie coinvolte nel decadimento del  $n$ .)

Lo sviluppo del calcolo, riportato nelle dispense, mostra come si possano riprodurre le regole di Sargent, e le forme degli spettri in impulso (energia), dei decadimenti nucleari  $\beta^-$  e  $\beta^+$ .

In figura gli andamenti sperimentali delle distribuzioni in impulso di  $e^-$  ed  $e^+$  emessi nel decadimento  $\beta$  del  $^{64}\text{Cu}$ .



Nel suo sviluppo Fermi immagina nullo il valore di  $m_\nu$ . Questo porta l'andamento della distribuzione in impulso verso i valori più alti a tendere dolcemente a 0. Si può provare che se viceversa  $m_\nu \neq 0$ , l'avvicinamento avverrebbe con derivata decrescente tendente a  $-\infty$ , tanto più marcato quanto maggiore fosse la massa del neutrino.



I dati sperimentali sono compatibili con  $m_\nu = 0$ , o comunque con una  $m_\nu$  inferiore a quanto rilevabile dai dati stessi.

Ciò rende chiaramente difficoltoso individuare sperimentalmente con precisione l'estremo superiore  $p_{e,max}$  dei valori di  $p_e$ , ovvero il punto in cui la distribuzione incontra l'asse delle ascisse, e quindi anche  $E_{e,max}$ .