

# Urti e reazioni

**Processi d'urto** → strumenti fondamentali d'indagine nella fisica nucleare e delle particelle.

Si individuano un oggetto da studiare, che funge solitamente da **bersaglio** e **proiettili**, sotto forma di fascio incidente.

L'individuazione di proiettile e bersaglio non è però sempre univoca, a volte appartengono entrambi a fasci **mutuamente collidenti**, o si creano fasci di **bersagli** che vengono accelerati contro **proiettili**.

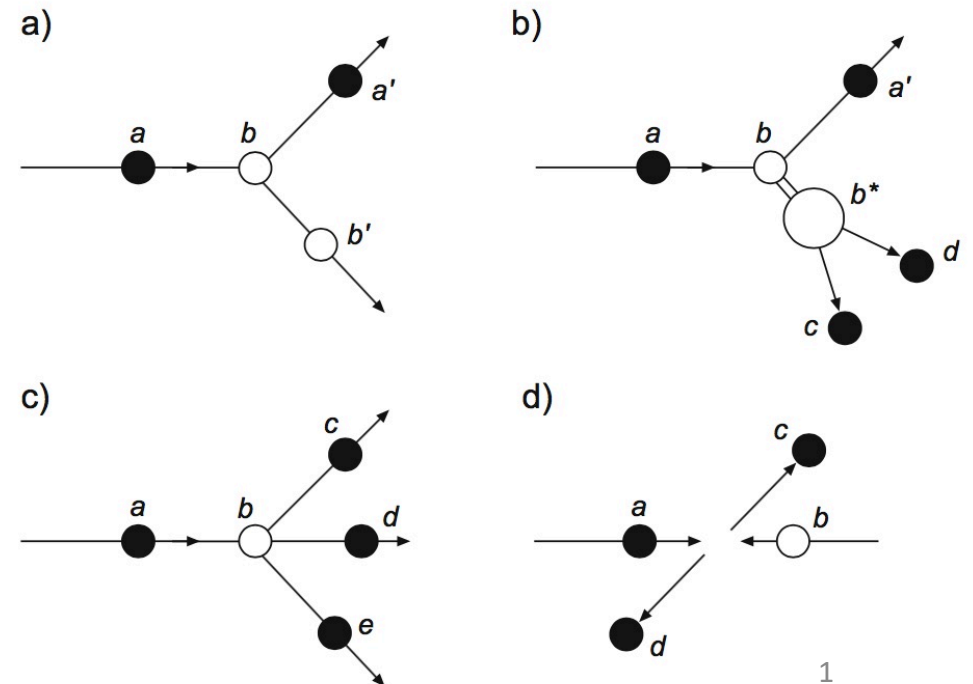
Come esempio una reazione (2 corpi) in (2 corpi) viene genericamente indicata  $a + b \longrightarrow c + d$

$a$  e  $b$  son detti **proiettile** e **bersaglio**, mentre  $c$  e  $d$  sono i **prodotti di reazione**; a sinistra della freccia c'è il **canale d'ingresso** della reazione, dopo la freccia il **canale d'uscita**.

In una **reazione anelastica** il numero dei prodotti di reazione può essere  $> 2$ .

Opportuni sistemi di rivelazione permettono di misurare la quantità dei prodotti di reazione, le loro energie, impulsi, masse, spin, e quindi gli angoli relativi delle direzioni d'emissione rispetto a quella del fascio incidente.

In figura schematizzazione di processi d'urto: **a)** diffusione elastica; **b)** diffusione anelastica con produzione di uno stato eccitato che poi decade in due particelle; **c)** produzione anelastica di nuove particelle; **d)** reazioni tra fasci collidenti.



Come nell'ottica, intensità di particelle diffuse, energia del fascio incidente e angoli di diffusione, danno informazioni sulla distribuzione spaziale del bersaglio.

Minore è la dimensione del bersaglio, maggiori sono le en. cinetiche richieste alle particelle del fascio, per una buona risoluzione spaziale.

Se  $\lambda = \lambda/2\pi$  è la lunghezza d'onda di de Broglie di una particella con impulso  $p$ , si ha

$$\lambda = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar c}{\sqrt{2mc^2 E_k + E_k^2}} \approx \begin{cases} \frac{\hbar}{\sqrt{2mE_k}} & \text{per } E_k \ll mc^2 \\ \frac{\hbar c}{E_k} \approx \frac{\hbar c}{E} & \text{per } E_k \gg mc^2 \end{cases}$$

Una ragionevole risoluzione spaziale per oggetti con dimensioni  $\Delta x$  richiede  $\lambda \approx \Delta x$ .

Dal principio di indeterminazione si ha, per i corrispondenti impulsi delle particelle incidenti  $p \gtrsim \frac{\hbar}{\Delta x}$ ,  $pc \gtrsim \frac{\hbar c}{\Delta x} \approx \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{\Delta x}$

Per risolvere le tipiche dimensioni nucleari (alcune unità di fm), servono particelle con impulsi

di alcune decine di MeV/c; per risolvere i singoli nucleoni ( $\approx 0.8 \text{ fm}$ ), servono particelle con impulsi maggiori a 100 MeV/c; per i quark servono fasci di particelle con impulsi di molti GeV/c.

Se in una reazione si rivelano tutti i prodotti nel canale d'uscita si parla di misura **esclusiva**, viceversa la misura si dice **inclusiva**.

Le reazioni nucleari hanno luogo rispettando un insieme di leggi di conservazione, oltre ad impulso, momento angolare ed energia totali.

Può avvenire che durante una reazione particelle del fascio incidente non si ritrovino nel canale d'uscita e che l'equivalente energetico della loro massa, o parte della loro energia cinetica, si trasformino in altre particelle o eccitazione dei prodotti nel canale d'uscita.

## Sezione d'urto

La misura dei **tassi di reazione** in esperimenti d'urto, con gli **spettri energetici** e le **distribuzioni angolari** dei prodotti di reazione, danno informazioni sulle caratteristiche dinamiche delle interazioni, quindi sulla forma del potenziale d'interazione e sull'intensità della forza d'accoppiamento.

Strumento concettuale utile nella descrizione delle interazioni fra particelle, o fra nuclei, o fra particelle e nuclei: la **sezione d'urto**.

La introduciamo immaginando una situazione idealizzata che non costituisce limite alla generalità di quanto verrà dedotto.

Si prepara un esperimento con un fascio collimato di proiettili  $\alpha$ , monocinetici di velocità  $\vec{v}_\alpha$  contro un bersaglio di oggetti  $b$  tutti uguali, distribuiti in posizioni fisse nel volume bersaglio. Si suppone che  $b$  ed  $\alpha$  siano "puntiformi", e li si dirà semplicemente "particelle", specificando se proiettile o bersaglio.

Si suppongono: - il bersaglio a riposo nel sistema del laboratorio (SL);

- costante nel tempo e nel volume del fascio la "densità istantanea"  $n_\alpha$  di proiettili;

- costante la densità  $n_b$  di particelle bersaglio.

**Quindi le particelle di fascio e bersaglio sono omogeneamente distribuite in essi.**

Una particella incidente  $\alpha$  ha interagito con una particella bersaglio  $b$  ( $\alpha+b$ ) se il suo stato dinamico cambia con l'interazione.

Per semplicità si immagina grande la massa di ogni particella  $b$ , da poterne trascurare il rinculo.

Si suppone anche che ogni particella  $\alpha$  interagisca al più con una sola particella  $b$ .

Supposto noto il numero  $dN_\alpha/dt$  di particelle  $\alpha$  incidenti sul bersaglio nell'unità di tempo, si cerca il numero  $dN/dt$  (**tasso d'interazioni**) di quelle che attraversando il bersaglio interagiscono con esso.

Detto  $dN'_a/dt$  il numero di particelle del fascio che emergono ogni secondo dal bersaglio senza aver interagito, si ha

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN_a}{dt} - \frac{dN'_a}{dt} = \frac{d}{dt} (N_a - N'_a)$$

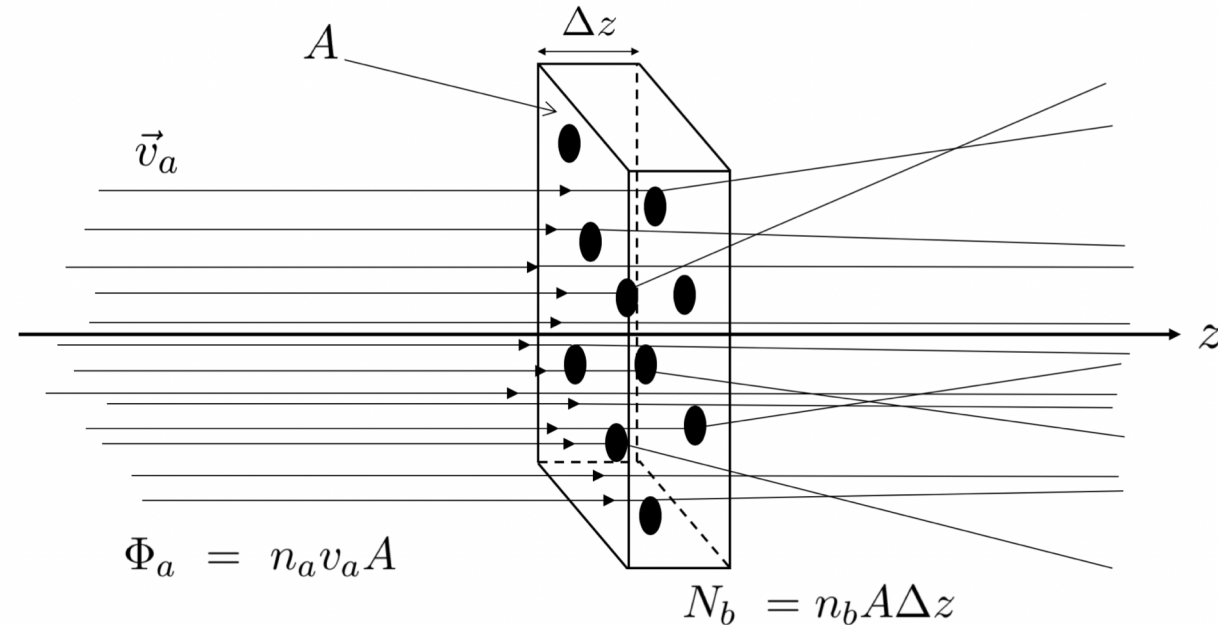
Supponendo la condizione di bersaglio e fasci incidente e diffuso come schematizzato in figura, si ha per il flusso di particelle incidenti

$$\frac{dN_a}{dt} = \Phi_a = n_a v_a A$$

Si cerca qualcosa che rappresenti la "probabilità d'interazione".

$N_b$  è il numero di "centri diffusori"  $b$  nel volume  $V$  del bersaglio, geometricamente intersecato dal fascio.

Si schematizza l'interazione fra una particella  $a$  e un centro diffusore come "istantanea" nel momento in cui  $a$ , transita presso il centro diffusore. Si associa quindi a questo un'area circolare  $\sigma_b$ , centrata su di esso e ortogonale all'asse  $z$  del fascio incidente.



**Si dice che  $a$  ha interagito col centro diffusore se la sua traiettoria interseca  $\sigma_b$ .**

$\sigma_b$  è detta **sezione d'urto geometrica** per l'interazione fra  $a$  e  $b$  ed è funzione anche del tipo di interazione considerata.

Supponendo che non vi siano  $\sigma_b$  di centri diffusori che ne oscurano anche solo parzialmente altre, lungo la direzione  $z$ , si esprime il tasso d'interazioni come

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN_a}{dt} \frac{\sigma_b N_b}{A} = \frac{dN_a}{dt} \sigma_b n_b \Delta z$$

ed esplicitando  $dN_a/dt$

$$\frac{dN}{dt} = n_a v_a N_b \sigma_b = n_a v_a n_b \Delta z A \sigma_b$$

da cui l'espressione per  $\sigma_b$

$$\sigma_b = \frac{dN}{dt} \frac{1}{n_a v_a n_b \Delta z A} = \frac{dN}{dt} \frac{1}{\Phi_a n_b \Delta z} = \frac{dN}{dt} \frac{1}{\Phi_a \delta_s}$$

con  $\delta_s$  la densità areale dei centri diffusori (inverso di un'area).

Ricordando che la probabilità si esprime anche come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili, detti  $dN$  i casi favorevoli di diffusione in un intervallo  $dt$  di tempo, e  $dN_a$  i casi possibili nello stesso intervallo di tempo, si ha anche

$$\sigma_b = \frac{dN}{dN_a} \frac{1}{n_b \Delta z} = \frac{dN}{dN_a} \frac{1}{\delta_s} \quad \text{per cui: } dN_a = \Phi_a dt$$

La sezione d'urto ha le dimensioni di un'area, tipicamente indipendente dalla geometria del modo in cui è eseguita la misura.

In fisica nucleare e sub-nucleare i valori misurati delle sezioni d'urto sono dell'ordine di  $10^{-28} \text{ m}^2 = 1 \text{ barn}$ , o suoi sottomultipli.

La probabilità che due particelle interagiscano dipende da svariati fattori, spesso indipendenti, non esplicitati nell'approccio geometrico visto. Ad esempio il tasso d'interazione di particelle  $\approx$  puntiformi come i  $\nu$ , che interagiscono solo **debolmente** con la materia, è estremamente inferiore rispetto a quello degli  $e$ , anche puntiformi ma che interagiscono anche **elettromagneticamente**.

## Sezione d'urto d'interazione

La sezione d'urto d'interazione efficace dipende principalmente da forma, intensità e raggio d'azione del potenziale d'interazione agente. La si può determinare misurando il tasso di reazione se sono noti il flusso incidente e la densità areale dei centri di diffusione.

Si definisce una **sezione d'urto totale** di reazione  $\sigma_{Tot}$  come

$$\sigma_{Tot} = \frac{\text{numero di eventi di diffusione per unità di tempo}}{\text{part. inc. per unità di tempo} \times \text{centri diffusori per unità d'area}}$$

Si introducono anche una sezione d'urto  $\sigma_{el}$  per le reazioni **elastiche** e una  $\sigma_{anel}$  per le **anelastiche**, tali che  $\sigma_{Tot} = \sigma_{el} + \sigma_{anel}$

## Lunghezza di attenuazione

Valutare l'intensità residua  $I(z)$  di un fascio incidente lungo  $z$ , di intensità iniziale  $I_0$  su un bersaglio spesso di densità  $\rho \text{ kg}\times\text{m}^{-3}$ .

Si consideri uno spessore infinitesimo di bersaglio fra  $z$  e  $z+dz$  e sia  $dR_i$  il numero totale di interazioni per unità di tempo fra particelle del fascio e centri diffusori del bersaglio nello spessore  $dz$ . La corrispondente variazione d'intensità del fascio è  $dI(z) = -dR_i$ .

Se  $A$  è la sezione retta del fascio, il flusso incidente è 
$$\varphi_b(z) = \frac{I(z)}{A}$$

Quindi :

$$dI(z) = -dR_i = -\sigma_{Tot} \varphi_b(z) dN_b = -\sigma_{Tot} \frac{I(z)}{A} n_b A dz$$

da cui

$$\frac{dI(z)}{I(z)} = -n_b \sigma_{Tot} dz$$

e infine

$$I(z) = I_0 e^{-n_b z \sigma_{Tot}}$$

Si definisce "*lunghezza di attenuazione*"  $z = L_{att}$  la distanza che percorsa nel bersaglio dal fascio, ne riduce l'intensità del fattore  $1/e$  :

$$L_{att} = \frac{1}{n_b \sigma_{Tot}}$$

## Luminosità

Si definisce "*luminosità*"  $\mathcal{L}$  il numero di urti potenziali nell'unità di tempo fra le particelle incidenti e i centri diffusori di un bersaglio

$$\mathcal{L} = \Phi_a \delta_s = \frac{1}{\sigma_b} \frac{dN}{dt} \quad \text{con} \quad [\mathcal{L}] = [m]^{-2} [s]^{-1}$$

## Sezione d'urto differenziale

Per distinguere i prodotti di reazione secondo la direzione d'emissione si tassella l'intero angolo solido ( $\Omega = 4\pi$ ) in sottoinsiemi di cui sia nota l'orientazione dell'asse.

In figura si ipotizza un fascio incidente su un bersaglio fisso in **SL**.

Sia  $\Delta\Omega \simeq A_D/r^2$  l'angolo solido sotteso da un rivelatore di area attiva  $A_D$ , a distanza  $r$  dal punto d'interazione, con  $r \gg A_D^{1/2}$ .

Il tasso di reazioni visibili da questo rivelatore è allora proporzionale

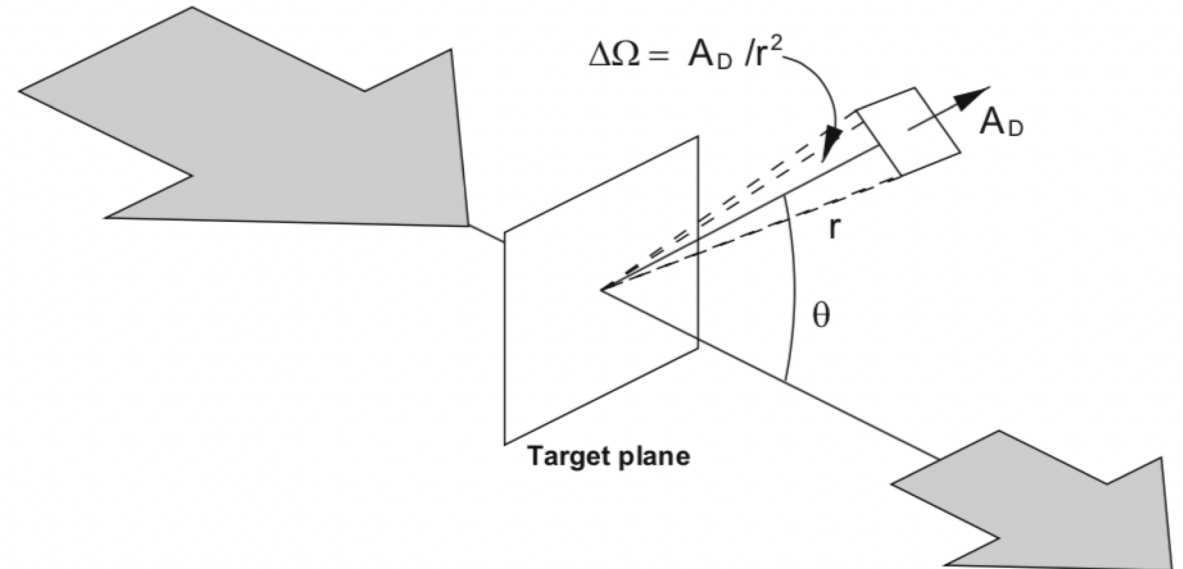
alla **sezione d'urto differenziale** con  $\frac{d\sigma(E, \vartheta, \varphi)}{d\Omega}$   
 $d\Omega = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$  (polari sferiche).

E' evidenziata anche la dipendenza dall'energia disponibile nel canale d'ingresso.

Si ha, per il rateo  $\frac{dN(E, \vartheta, \varphi, \Delta\Omega)}{dt} = \mathcal{L} \frac{d\sigma(E, \vartheta, \varphi)}{d\Omega} \Delta\Omega$

Detta  $E'$  l'energia delle particelle diffuse, si definisce la **sezione d'urto doppiamente differenziale**  $\frac{d^2\sigma(E, E', \vartheta, \varphi)}{d\Omega dE'}$

Si ha quindi:  $\sigma_{Tot}(E) = \int_0^{E'_{max}} \int_{4\pi} \frac{d^2\sigma(E, E', \vartheta, \varphi)}{d\Omega dE'} d\Omega dE'$





## Sezione d'urto invariante

Il sistema di riferimento naturale d'un processo d'urto è quello del CM, e può non coincidere col sist. di rif. in cui si effettua la misura. Le caratteristiche di un processo non devono del resto dipendere dal particolare sistema di riferimento scelto per la misura; la sez. d'urto è definita come una superficie ortogonale alla direzione del moto delle particelle incidenti, quindi è un invariante relativistico. Le leggi di trasformazione dal SL al CM, permettono d'esprimere la sezione d'urto differenziale in funzione di variabili invarianti. La variazione  $d\vec{p}$  dell'impulso e della sua componente  $d\vec{p}_{\parallel}$  parallela all'asse del fascio, non sono invarianti, mentre lo sono  $d\vec{p}_{\perp}$  e  $d\sigma$ .

Il rapporto  $d\vec{p}_{\parallel}/E$  è invariante, essendo  $(E/c) = (p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2 + m^2 c^2)^{1/2}$ ,

$$\begin{aligned} dp'_{\parallel} &= \gamma (dp_{\parallel} - \beta dE) = \gamma dp_{\parallel} \left(1 - \frac{\beta p_{\parallel}}{E}\right) = \\ &= \frac{\gamma E - \beta \gamma p_{\parallel}}{E} dp_{\parallel} = \frac{E'}{E} dp_{\parallel} \end{aligned}$$

quindi la **sezione d'urto invariante**, scritta

$$E \frac{d\sigma}{d\vec{p}}$$

è indipendente dal sistema di riferimento scelto per la misura.

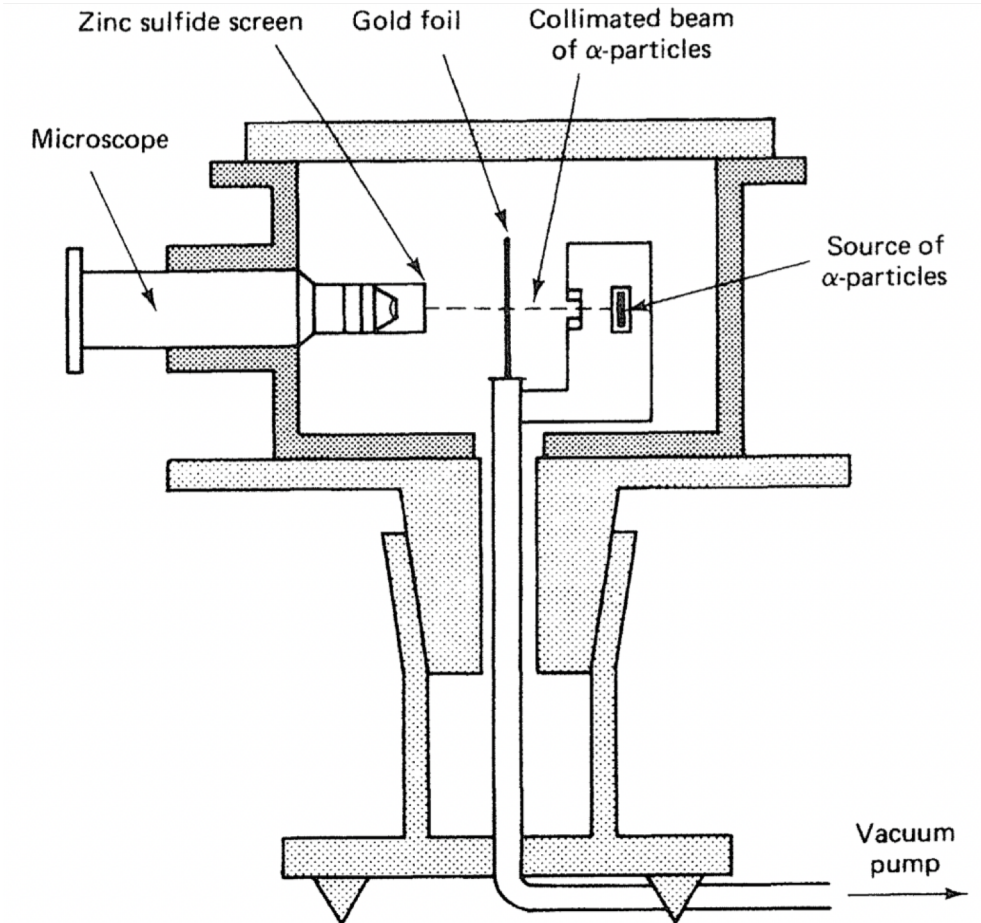
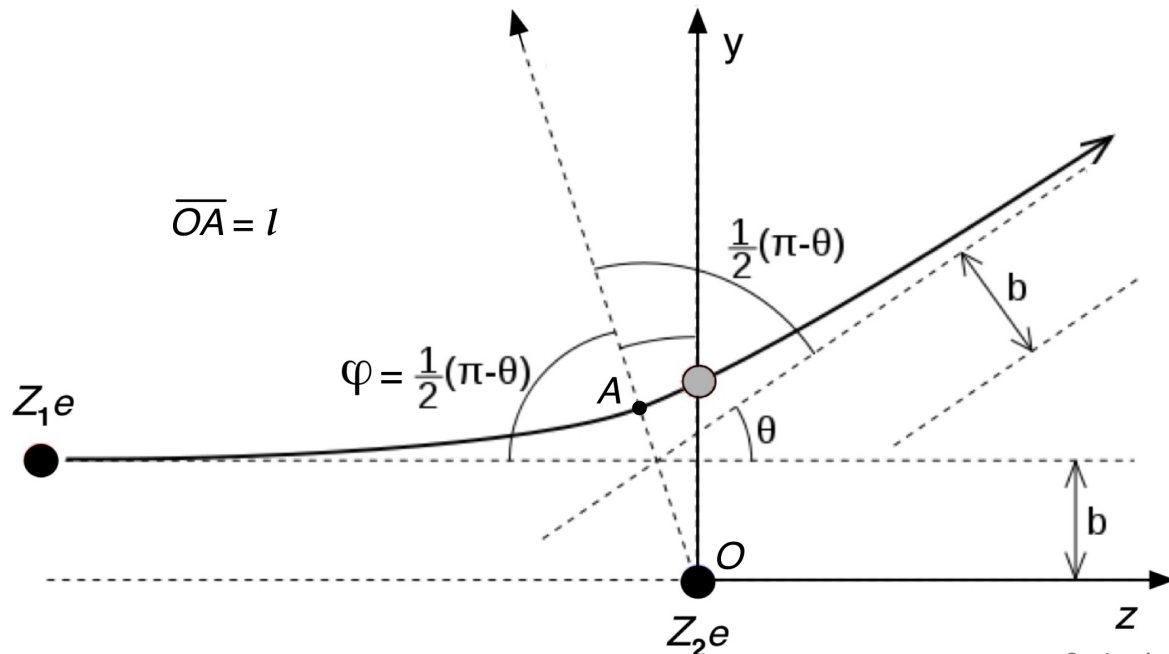
## Sezione d'urto di Rutherford

Deflessione di particelle cariche su un nucleo di carica  $Z_2e$ .

Per semplificare si suppongano unicamente interazioni elettromagnetiche.

Nell'originale esp. di Rutherford particelle  $\alpha$  da una sorgente venivano fatte incidere su bersagli di sottili fogli d'oro e le  $\alpha$  deflesse venivano osservate e contate con un microscopio tramite i lampi di fluorescenza provocati su uno schermo di solfuro di zinco.

Consideriamo classicamente il problema per particelle incidenti di carica  $Z_1e$  e massa  $m$ , su un nucleo di carica  $Z_2e$  e massa  $M \gg m$ .



Apparato di Geiger & Mardsen

Si trascura quindi il rinculo del nucleo bersaglio dopo l'urto.

$V = Z_2 e / (4\pi\epsilon_0 r)$  è il potenziale, di tipo centrale kepleriano, generato dal centro diffusore con  $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$ ,  $v$  è il modulo della velocità d'avvicinamento del proiettile.  $b$  è detto "**parametro d'urto**". La traiettoria è un'iperbole, dato che  $E_{tot} > 0$ .

Classicamente il problema è determinare l'angolo  $\vartheta$  di deflessione della traiettoria della particella in funzione di  $b$ , ovvero  $\vartheta(b)$ .  
**Si procede determinando l'inverso, ovvero  $b(\vartheta)$ .**

Si suppongano, senza perdere in generalità, forze repulsive. Dalle **conservazioni** del momento angolare e dell'energia totali si ha

$$b = \frac{lv_A}{v}, \quad v^2 = v_A^2 + \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 ml}. \quad \text{Ponendo } l_0 = \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E_k}, \text{ che fissata } E_k, \text{ corrisponde al punto di massimo}$$

avvicinamento possibile  $A^*$  per un urto centrale, si ha  $v^2 = v_A^2 + v^2 \frac{l_0}{l}$ . E ancora  $v_A^2 = \frac{b^2}{l^2} v^2$ ,  $v_A^2 = v^2 \left(1 - \frac{l_0}{l}\right)$

$b^2 = l^2 \left(1 - \frac{l_0}{l}\right)$  ed  $l = b \cotg \frac{\varphi}{2}$ , come proprietà geometrica dell'iperbole. Con un po' di trigonometria e sostituendo si

ottiene infine  $l_0 = 2 b \cotg \varphi$ , da cui quanto cercato:

$$b(\vartheta) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \cotg \frac{\vartheta}{2}$$

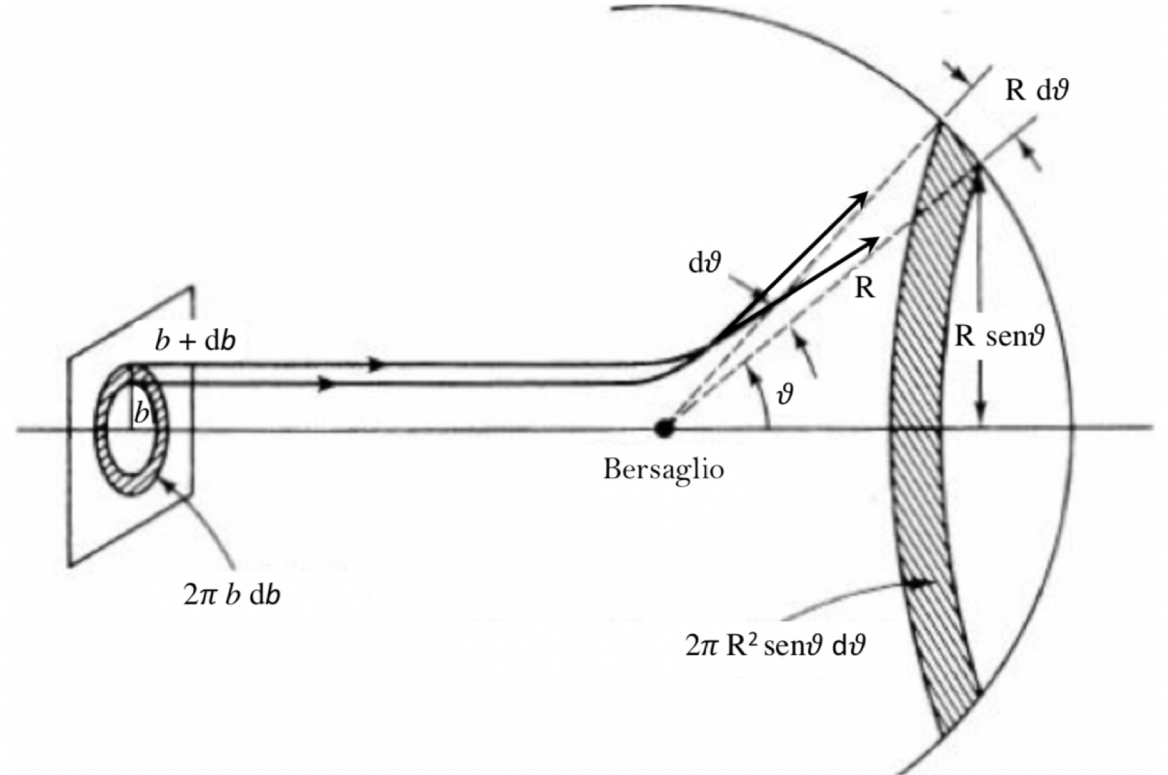
Detto  $n_0$  il numero di proiettili che a distanza  $\infty$  dal bersaglio attraversano l'unità di superficie del piano  $(x,y)$  nell'unità di tempo, è  $dN = 2\pi n_0 b db$  il loro numero che sempre nell'unità di tempo, attraversano l'anello circolare fra  $b$  e  $b+db$ .

Se il numero di particelle si conserva ( incidenti  $\equiv$  diffuse), allora quelle diffuse nell'angolo solido compreso fra  $\vartheta$  e  $\vartheta+d\vartheta$  saranno

$$|db(\vartheta)| = \left| \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} d\left(\cotg\frac{\vartheta}{2}\right) \right| = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \frac{d\vartheta}{2 \sin^2\vartheta/2}$$

Sostituendo in  $dN$  e ricordando che  $d\Omega(\vartheta) = 2\pi \sin\vartheta d\vartheta$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} &= \frac{1}{n_0} \frac{dN(\vartheta)}{d\Omega(\vartheta)} = \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{\cotg\vartheta/2}{2 \sin\vartheta \sin^2\vartheta/2} = \\ &= \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{\cos\vartheta/2}{2 \sin^3\vartheta/2 \cdot 2 \sin\vartheta/2 \cos\vartheta/2} = \\ &= \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{1}{\sin^4\vartheta/2} \end{aligned}$$



ovvero la **sezione d'urto di Rutherford**, indipendente dai segni delle cariche.

La sez. d'urto coulombiana totale, ottenuta integrando su tutto l'angolo solido, ha valore  $\infty$ , che non ha senso fisico.

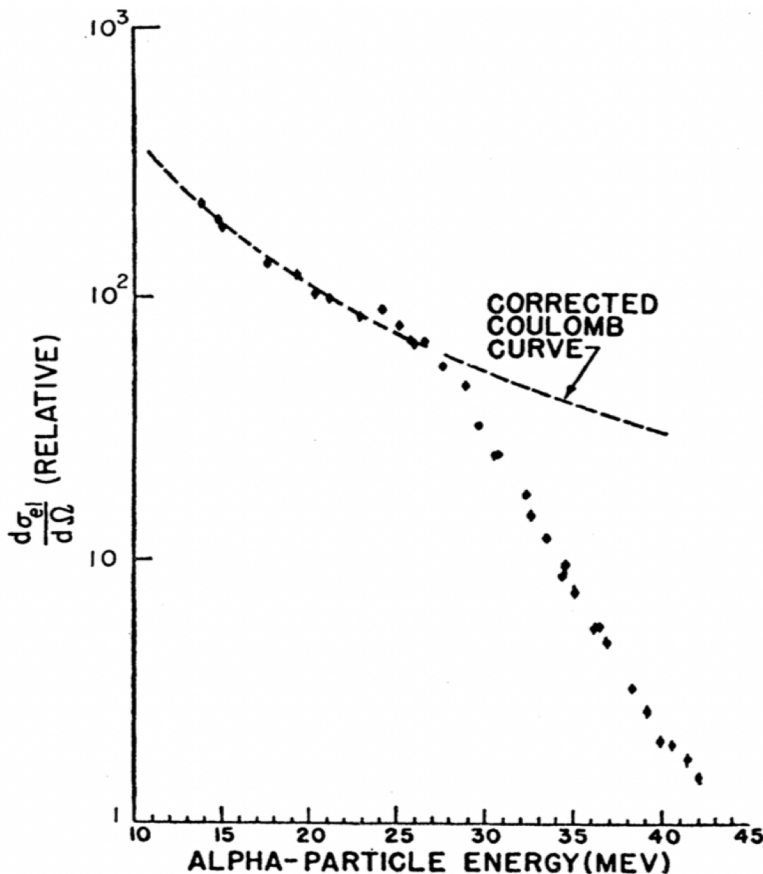
Si risolve considerando  $V(r)$  proporzionale a  $1/r$  solo fino a certi  $r$ , infatti aumentando  $b$  la costituzione dei bersagli fa sì che le particelle incidenti sentano sempre più gli effetti degli  $e$  atomici e delle altre strutture cariche del bersaglio che schermano la carica  $Z_2 e$  del diffusore.

Considerando la struttura del centro diffusore non puntiforme ma sferica di raggio  $r_0$ , se  $l_0 > r_0$ , la traiettoria del proiettile sarà tutta esterna alla regione in cui è distribuita la carica bersaglio, e la relazione fra  $\mathbf{b}$  e  $\vartheta$  resta invariata, come  $d\sigma(\vartheta)/d\Omega$ .

Per  $l_0 < r_0$ , con energie cinetiche  $E_k > E_{k,0} = Z_1 Z_2 e^2 / (4\pi\epsilon_0 r_0)$ , l'effetto della spazialità della carica diffondente si percepisce solo per

$\vartheta$  maggiori di un valore limite  $\vartheta_0$  tale che

$$r_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \cotg \frac{\vartheta_0}{2}$$



L'osservazione sperimentale delle deviazioni a grandi angoli nella sezione d'urto differenziale, confrontata con le previsioni per bersagli puntiformi, permette di stimare  $r_0$ . Bisogna anche tener conto delle dimensioni finite del proiettile.

Rutherford lo aveva intuito e pensava giustamente che l'effetto delle dimensioni nucleari si sarebbe dovuto manifestare, al crescere dell'energia cinetica delle  $\alpha$  incidenti, con una deviazione della sezione d'urto da quella ottenuta considerando esclusivamente l'interazione coulombiana.

$d\sigma(\vartheta)/d\Omega$  della reazione  $\alpha + {}^{197}\text{Au}$ , per  $\vartheta = 60^\circ$  a energie crescenti. Oltre 27 MeV i dati si scostano dall'andamento coulombiano.