

5.3 Approccio perturbativo ai decadimenti

Il decadimento α è quindi dovuto all'effetto tunnel attraverso la barriera coulombiana del nucleo e alle forze nucleari che permettono l'aggregazione stabile, entro la materia nucleare e per un sufficiente lasso di tempo, dei nucleoni che costituiscono una particella α . Gli altri tipi di decadimenti nucleari possono invece essere visti come l'effetto di perturbazioni agenti sugli stati in cui si trovano le strutture che poi decadono, e se tali perturbazioni sono abbastanza piccole rispetto alle energie che caratterizzano gli stati di partenza, allora se ne può dare una trattazione abbastanza generale che ora verrà delineata, prima di passare alla trattazione dei decadimenti β e γ .

La soluzione dell'equazione di Schrödinger per un sistema fisico sottoposto a potenziali indipendenti dal tempo fornisce, per tale sistema, livelli energetici corrispondenti a *stati stazionari*.

Inoltre un sistema fisico quantistico originariamente in uno stato stazionario, permane indefinitamente in quello stato e non effettua transizioni (decadimenti) verso altri stati, a meno che non venga opportunamente perturbato. La possibilità che un sistema fisico quantistico sia trovato talvolta in uno stato e talvolta in un altro stato è descrivibile costruendo un'opportuna miscela di due o più stati, come ad esempio con la funzione d'onda $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, dalla quale discendono la probabilità $|c_1|^2$ che il sistema da lei descritto sia trovato nello stato 1 e la probabilità $|c_2|^2$ che sia trovato nello stato 2. Per potenziali indipendenti dal tempo anche c_1 e c_2 risultano indipendenti dal tempo, ma ciò non corrisponde ai risultati sperimentali che vengono dallo studio dei decadimenti, per i quali la probabilità di trovare un sistema in uno specifico stato dipende dal tempo.

Per affrontare il problema inerente ai decadimenti si adotta l'approccio secondo cui il potenziale agente ha una forma del tipo $\Phi + \Phi'$, dove Φ è il potenziale nucleare responsabile degli stati stazionari, mentre Φ' è un potenziale additivo e molto debole (perturbativo) che può determinare transizioni fra gli stati.

Trascurando in prima istanza Φ' , si risolve l'equazione di Schrödinger per il potenziale Φ ottenendo le funzioni d'onda *statiche* del nucleo. Si usano quindi quelle funzioni d'onda per calcolare le probabilità di transizione fra *stati stazionari* sotto l'influenza della perturbazione Φ' .

Questa probabilità di transizione corrisponde alla costante λ di decadimento data dalla cosiddetta *seconda regola d'oro* di Fermi ⁷

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \mathcal{M}'_{fi} \right|^2 \rho(E_f) \quad (5.27)$$

⁷Per la sua derivazione si veda ad esempio E. Gozzi, "Notes on Quantum Mechanics with Examples of Solved Problems" - Cap. 12)

con l'elemento di matrice dell'operatore di transizione \mathcal{M}' espresso da

$$\mathcal{M}'_{fi} = \langle \psi_f | \Phi' | \psi_i \rangle = \int \psi_f^* \Phi' \psi_i dV \quad (5.28)$$

dove l'integrale va esteso a tutto lo spazio.

Note le funzioni d'onda degli stati finale ψ_f e iniziale ψ_i si può dunque calcolare \mathcal{M}'_{fi} , da cui la probabilità di transizione λ , confrontabile con i risultati sperimentali non appena si conosca la densità degli stati finali accessibili dal sistema fisico, $\rho(E_f) = dn_f/dE_f$.

La probabilità di transizione cresce quindi al crescere del numero di stati finali accessibili col decadimento.

Si vedrà nel paragrafo [5.4.4](#) come Fermi abbia brillantemente utilizzato questo approccio per formulare la sua teoria sul decadimento β .

La densità degli stati finali dipende da due contributi, lo stato finale raggiunto dal nucleo dopo il decadimento e la "radiazione" emessa durante il decadimento. Si consideri dapprima lo stato finale del nucleo.

La soluzione dell'equazione di Schrödinger per il potenziale Φ indipendente dal tempo fornisce gli stati stazionari del nucleo $\psi_a(\vec{r})$.

La funzione d'onda dipendente dal tempo per lo stato in questione è

$$\psi_a(\vec{r}, t) = \psi_a(\vec{r}) e^{-iE_a t/\hbar} \quad (5.29)$$

dove E_a rappresenta l'energia dello stato. La probabilità di trovare il sistema in questo stato è $|\psi_a(\vec{r}, t)|^2$, indipendente dal tempo, per uno stato stazionario. Per essere ora consistenti con la legge del decadimento radioattivo, la probabilità di trovare il sistema in decadimento sempre nello stesso stato dovrebbe diminuire col tempo come $e^{-\lambda_a t} = e^{-t/\tau_a}$

$$|\psi_a(\vec{r}, t)|^2 = |\psi_a(\vec{r}, t = 0)|^2 e^{-t/\tau_a} \quad (5.30)$$

dove $\tau_a = 1/\lambda_a$ è la vita media dello stato caratterizzato dalla costante di decadimento λ_a . Con ciò la [5.29](#) diventa

$$\psi_a(\vec{r}, t) = \psi_a(\vec{r}) e^{-iE_a t/\hbar} e^{-t/2\tau_a} \quad (5.31)$$

Il prezzo che si paga introducendo il termine esponenziale reale in $\psi_a(\vec{r}, t)$ è la perdita della possibilità di determinare con esattezza l'energia dello stato, ovvero non si ha più uno stato stazionario.

Ricordando la relazione d'indeterminazione energia-tempo, se uno stato visse per sempre, $\Delta t = \infty$ e l'energia ad esso associata potrebbe essere determinata con esattezza, poichè $\Delta E = 0$. Se invece lo stato vive per un tempo τ , non si può determinare l'energia ad esso associata se non con un'incertezza $\Delta E \cong \hbar/\tau$.

Il problema può essere affrontato in modo rigoroso ottenendo la distribuzione dei livelli energetici dalla trasformata di Fourier di $e^{-t/2\tau_a}$ ⁸. Risulta in tal caso che la probabilità di osservare il sistema in un intorno energetico compreso fra E ed $E + dE$, in prossimità del valore energetico E_a , è data da

$$P(E)dE \propto \frac{dE}{(E - E_a)^2 + \Gamma_a^2/4} \quad (5.32)$$

dove $\Gamma_a = \hbar/\tau_a$ è detta *larghezza* dello stato a . In pratica ciò si risolve nel

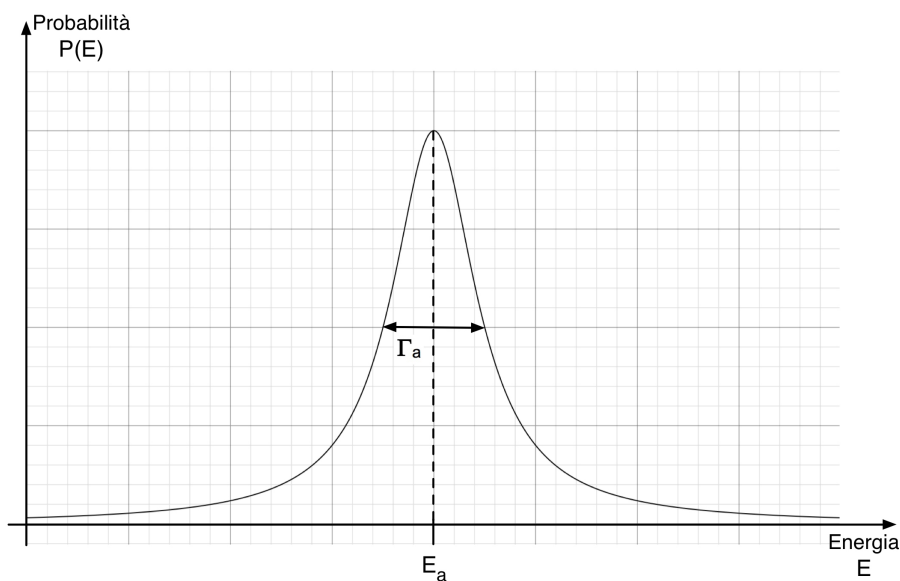


Figura 5.10: Densità di probabilità $P(E)$.

fatto che una qualunque misura dell'energia di un tale stato non è assolutamente detto che fornisca il valore E_a , anche se esso rappresenta il valor medio di più misure effettuate. La larghezza Γ_a quantifica l'impossibilità di determinare con precisione l'energia dello stato a , e ciò è intrinseco nella natura di tale fenomeno, non frutto di limitazioni tecniche nell'effettuazione della misura stessa. Si osservi che geometricamente Γ_a corrisponde alla larghezza a metà altezza della curva che rappresenta $P(E)$, come in figura ^{5.10}. $P(E)$ è proporzionale a quella che vien detta detta funzione di distribuzione *Lorentziana* o di Cauchi, o ancora di Breit-Wigner, e si noti che ha la stessa forma analitica della funzione che descrive i fenomeni di risonanza.

Parlare di transizioni fra diversi stati per un sistema, anche se questi non sono caratterizzati da valori esatti e univocamente definiti di energia, è comunque possibile purchè le larghezze di tali stati siano piccole a confronto delle differenze fra i valori medi di energia che caratterizzano ognuno degli

⁸Si veda in Appendice ??

stati stessi.

Gli stati di interesse nucleare sono caratterizzati da vite medie τ tipicamente superiori a 10^{-12} s, corrispondenti a larghezze $\Gamma < 10^{-10}$ MeV. Gli stati nucleari a breve vita media che vengono popolati durante gli ordinari processi di decadimento, e anche in molte reazioni nucleari, hanno separazioni energetiche dell'ordine di 10^{-3} MeV o superiori. È dunque molto improbabile che determinando l'energia di uno stato nucleare finale raggiunto dopo un processo di decadimento tramite ad esempio la misura dell'energia delle radiazioni emesse, la sovrapposizione energetica fra le distribuzioni di due diversi stati finali a e b possa generare confusione nel riconoscere lo stato finale effettivamente raggiunto come risultato del decadimento.

È in tal caso ragionevole parlare di stati discreti *pseudo-stazionari* e con-

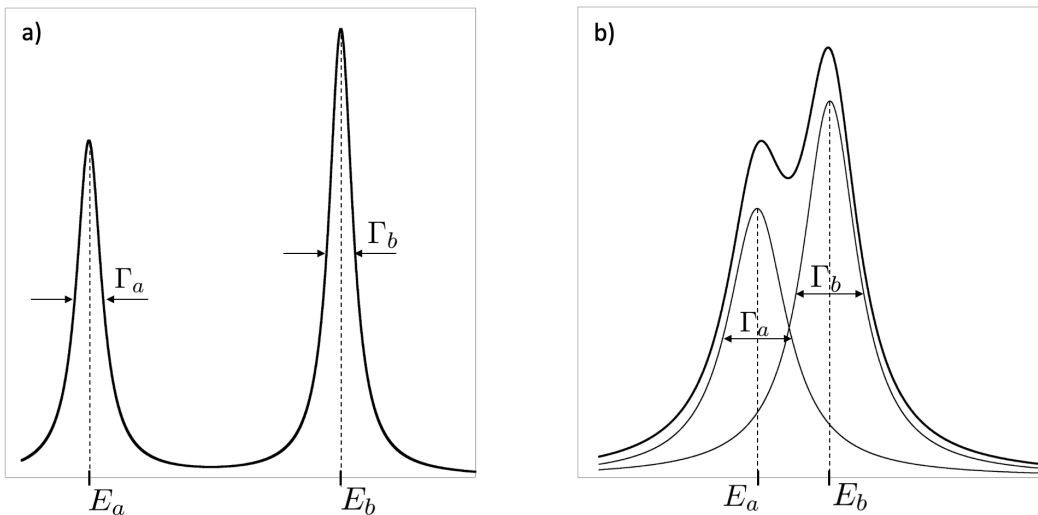


Figura 5.11: Se le larghezze di due stati instabili sono piccole rispetto alla loro separazione energetica, come in a), i due stati sono ben riconoscibili; se invece i due stati si sovrappongono e si mescolano come in b), allora non posseggono funzioni d'onda ben distinte l'una dall'altra.

cludere che essi non contribuiscono alla densità degli stati finali in quanto uno solo di essi può essere raggiunto in un ben determinato processo di decadimento. In tal caso le "radiazioni" emesse sono le sole a contribuire alla densità $\rho(E_f)$ degli stati.

Senza entrare nello specifico del tipo di decadimento, in generale si vede che considerando soltanto la probabilità di formazione di uno stato nucleare di energia E_f , vanno prese in considerazione tutte le possibili radiazioni di energia $E_i - E_f$.

Tale radiazione può essere emessa in qualsiasi direzione e in qualsiasi stato di polarizzazione, e se consiste di particelle dotate di spin, allora questo può avere qualsiasi possibile orientazione.

Questo modo di contare gli stati finali accessibili permette di ottenere la densità degli stati.

Quando nel prossimo capitolo si affronterà l'equazione differenziale per la descrizione del decadimento radioattivo di una sostanza, si supporrà implicitamente che la probabilità di decadimento λ sia contemporaneamente piccola e indipendente dal tempo. Se Φ' è indipendente dal tempo, allora il valore di λ calcolato tramite la regola d'oro di Fermi [5.27](#) è anche indipendente dal tempo.

Con queste condizioni l'effetto di Φ' sugli stati stazionari a e b di Φ dá la funzione d'onda perturbata

$$\psi_a \longrightarrow \psi_a + \frac{\Phi'_{ba}}{E_b - E_a} \psi_b \quad (5.33)$$

e il sistema inizialmente nello stato a ha una probabilità proporzionale a $|\Phi'_{ba}|^2$ di trovarsi poi nello stato b . Si considera questo come un *decadimento* dallo stato a allo stato b .

La connessione fra l'effettiva probabilità di decadimento per un sistema costituito da un grande numero di nuclei e quanto sopra descritto per la probabilità (microscopica) di decadimento di un singolo nucleo, implica che ogni nucleo del sistema macroscopico decada emettendo radiazioni in modo assolutamente indipendente da tutti gli altri, compresi quelli a lui spazialmente più vicini. Quest'ipotesi è fondamentale per poter confrontare le costanti di decadimento misurate con quelle calcolate.

Parlando di particelle, solo una piccola parte di esse è stabile: l'elettrone, il protone, i neutrini e il fotone. Le particelle che decadono per effetto delle interazioni deboli, come si vedrà, sopravvivono abbastanza da poter percorrere, dopo essere state prodotte e con le energie cinetiche tipiche che le caratterizzano, tragitti sufficientemente lunghi (da significative frazioni del millimetro sino ad alcuni metri) da permetterne la misura del cosiddetto *tempo di volo*, o il tracciamento; le risonanze adroniche che invece decadono per effetto delle interazioni forti, hanno vite medie così brevi che anche se prodotte con notevoli energie cinetiche, non sono in grado di percorrere tragitti sufficienti a permetterne il tracciamento prima che decadano.

I concetti introdotti trovano ampio utilizzo in svariati ambiti della fisica e nel seguito, oltre che per i già citati fenomeni di decadimento, li si ritroverà in particolare a proposito della descrizione di sezioni d'urto e dell'individuazione di particelle fra i prodotti di reazioni.

5.4 Radioattività β

I meccanismi che coinvolgono elettroni e nucleo di uno stesso atomo sono svariati e qui si accenna dapprima alla *conversione interna*, per poi soffermarsi più ampiamente sul *decadimento β* .

5.4.1 Conversione interna

In un atomo la sovrapposizione spaziale tra la funzione d'onda di un suo elettrone, particolarmente uno di quelli delle shell più interne, e quella del suo nucleo non è e mai nulla, c'è quindi una probabilità finita che un elettrone si trovi talvolta dentro il nucleo del proprio atomo. Quando questo si verifica l'elettrone ha la possibilità di accoppiarsi elettromagneticamente ad uno stato energetico eccitato del nucleo acquisendone direttamente l'energia associata, ovvero senza la preventiva produzione di un raggio γ . In tal caso l'elettrone viene emesso dall'atomo, non dal nucleo, con un'energia cinetica $E_{k,e}$ pari all'energia di transizione E^* dello stato eccitato del nucleo, equivalente alla differenza, moltiplicata per c^2 , fra la massa del nucleo eccitato e dello stesso non eccitato, meno l'energia atomica B_e di legame dell'elettrone

$$E_{k,e} = E^* - B_e \quad (5.34)$$

Il processo di conversione interna non determina quindi una variazione del numero atomico dell'atomo coinvolto, ma soltanto una sua "ionizzazione". La gran parte degli elettroni emessi per conversione interna provengono dal-

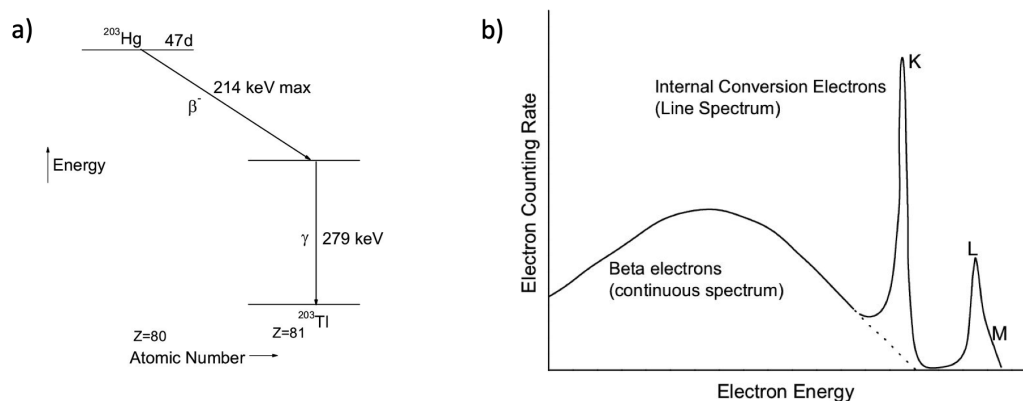


Figura 5.12: In a) lo schema di decadimento β del mercurio ^{203}Hg . In b) lo spettro d'emissione elettronica del ^{203}Hg , dove sono evidenti, oltre alla parte continua tipica dello spettro d'emissione β , anche i picchi dell'emissione atomica per conversione interna dalle shell K, L ed M.

le shell K, le più vicine ai nuclei. Può essere che l'energia d'eccitazione di uno stato nucleare non sia sufficiente ad espellere un elettrone atomico dalla

shell K, ma lo sia per elettroni delle shell L o M di quel nucleo.

Dopo l'emissione dell'elettrone per conversione interna avviene tipicamente che un elettrone di una shell meno legata dello stesso atomo cada a riempire la posizione lasciata libera nella shell più interna, con la concomitante emissione di un raggio X caratteristico del salto energetico effettuato.

In base a quanto descritto si desume che lo spettro d'emissione di elettroni per conversione interna deve essere "discreto".

5.4.2 Decadimento β

Un nucleo con sovrabbondanza o viceversa con scarsità di neutroni, in cui cioè il rapporto N/Z è maggiore o rispettivamente minore che non per i nuclei stabili, può trasformarsi in un nucleo più stabile emettendo un elettrone o rispettivamente un positrone. Questo processo è chiamato *decadimento β* e viene indicato come in [5.5b](#) e in [5.5c](#), distinguendo in β^- , il primo ad essere osservato sperimentalmente da Rutherford nel 1900, e β^+ a seconda che si tratti dell'emissione di elettroni o positroni. Per la conservazione della carica elettrica in questi casi il numero di protoni del nucleo figlio è o maggiore o rispettivamente minore di un'unità rispetto al nucleo genitore, senza peraltro che ciò conduca a una variazione del numero complessivo di nucleoni, fra genitore e figlio.

In pratica ciò significa che all'interno del nucleo genitore si è avuta o la trasformazione di un neutrone in un protone, nel caso del decadimento β^- , o la trasformazione di un protone in un neutrone, nel caso del decadimento β^+ . Ricordando che i valori delle masse del protone, del neutrone e dell'elettrone (uguale a quella del positrone) sono rispettivamente $938.27 \text{ MeV}/c^2$, $939.56 \text{ MeV}/c^2$ e $0.511 \text{ MeV}/c^2$, si deduce che il decadimento β^- è energeticamente permesso anche per neutroni liberi che hanno una vita media $\tau_n = 881.5 \text{ s}$, mentre invece non lo è il decadimento β^+ per protoni liberi, che infatti risultano stabili con un limite inferiore per la vita media di $2.2 \cdot 10^{29}$ anni. La possibilità di decadimenti β^- e soprattutto β^+ , nei nuclei dipende dalle energie di legame relative degli isobari con diversi valori di Z ed N .

Un nucleo con un numero di neutroni inferiore rispetto a un corrispondente isobaro stabile, ovvero con un eccesso di protoni, può ridurre di un'unità la propria carica anche assorbendo un elettrone da un orbitale atomico del proprio atomo, tipicamente da un orbitale K. Questo processo è appunto detto *cattura K*.

In seguito a questa cattura, un elettrone da un orbitale più esterno casca nell'orbitale dell'elettrone catturato dal nucleo, con la conseguente emissione di uno o più raggi-X. Anche in questo caso il numero di nucleoni del nucleo resta comunque invariato.

Nelle misure sui decadimenti β le uniche particelle che venivano osservate come prodotti di decadimento erano elettroni o positroni assieme al corrispondente nucleo figlio; ciò aveva condotto inizialmente a pensare che si trattasse di un processo di disintegrazione in due corpi, come il decadimento α . In tal caso, applicando qui la corretta forma relativistica della conservazione dell'energia nel sistema del centro di massa del nucleo X genitore, per l'energia totale E_e dell'elettrone si dovrebbe avere, come mostrato nella relazione [5.68](#) del paragrafo [5.6](#)

$$E_e = \frac{M_X^2 c^2 + m_e^2 c^2 - M_Y^2 c^2}{2M_X}$$

e di conseguenza, per l'energia cinetica $E_{k,e}$ dell'elettrone

$$E_{k,e} = \frac{M_X^2 c^2 + m_e^2 c^2 - M_Y^2 c^2}{2M_X} - m_e c^2$$

Ci si attendeva, in base a quest'ipotesi e come nel caso del decadimento α , che il prodotto piú leggero del decadimento, l'elettrone o il positrone, raccolta la gran parte dell'energia a disposizione del decadimento la mostrasse in uno spettro discreto con un unico valore, un picco ben definito centrato attorno ad $E_{k,e}$.

Gli spettri misurati di emissione β hanno invece un andamento continuo, a partire da un valore minimo, compatibile con zero, fino ad annullarsi in corrispondenza ad un valore massimo che entro le precisioni sperimentali, corrisponde ad $E_{max} \cong E_{k,e}$. Quando gli spettri β furono osservati per le prime volte ci fu anche la tentazione di mettere in discussione la validità di un principio che fino ad allora era apparso fermo e incrollabile, ovvero la conservazione dell'energia per un sistema fisico isolato⁹, e un nucleo durante il tempo necessario al suo decadimento β , può senz'altro essere considerato come un sistema fisico perfettamente isolato.

Se inoltre il decadimento β fosse proprio in due soli corpi nello stato finale, ciò implicherebbe che neppure il momento angolare totale del nucleo genitore sarebbe conservato nel decadimento. Siccome infatti il numero di nucleoni, fermioni con spin semi-intero pari ad $\hbar/2$, resta invariato fra nucleo genitore e figlio, indipendentemente da qualsiasi possibile variazione di momento angolare orbitale che deve oltretutto necessariamente essere pari ad un multiplo intero di \hbar , il fatto che nello stato finale ci sia un elettrone, che è anche un fermione con spin pari ad $\hbar/2$, implica che il momento angolare non si conserverebbe se il decadimento β avvenisse secondo le

$$\begin{aligned} \frac{A}{Z}X &\longrightarrow \frac{A}{Z+1}Y + e^- & , & & \frac{A}{Z}X &\longrightarrow \frac{A}{Z-1}Y + e^+ \\ & & & & \frac{A}{Z}X + e_K^- &\longrightarrow \frac{A}{Z-1}Y \end{aligned} \quad (5.35)$$

⁹Niels Bohr fu per un pó uno dei piú ferventi sostenitori di quest'ipotesi!

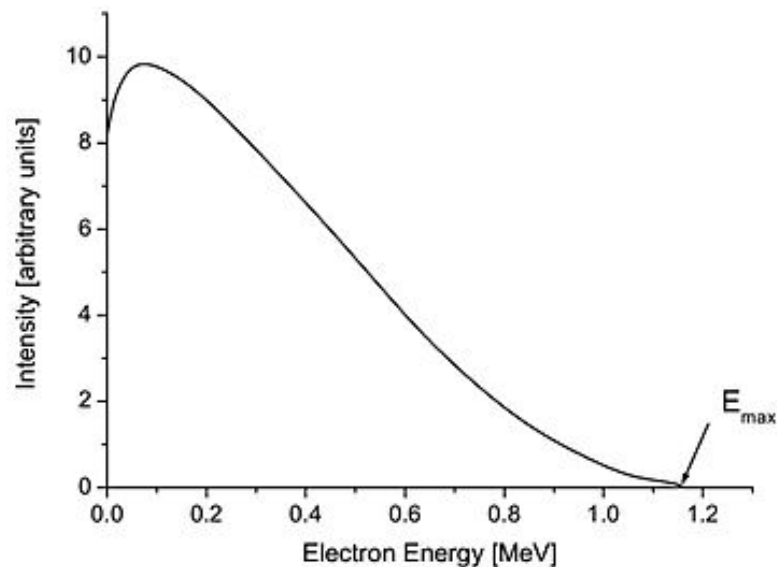


Figura 5.13: Spettro continuo dell'energia degli e^- emessi nel decadimento β^- del bismuto ($^{210}_{83}\text{Bi}$).

Ma tutto questo, in conseguenza di quanto affermato da un noto teorema di Emmy Noether¹⁰ sul legame esistente fra simmetrie di un sistema fisico e quantità conservate, avrebbe anche implicato che l'universo non è isotropo, e che inoltre ci devono essere un sistema di coordinate assoluto e una scala temporale assoluta, con le ovvie conseguenze

A *togliere le castagne dal fuoco* che avrebbe potuto *bruciare* gran parte della fisica esistente venne Wolfgang Pauli, che nel 1930 propose l'esistenza di un'ulteriore particella, di "molto difficile rivelazione"¹¹, che nel corso del decadimento β venisse emessa assieme all'elettrone/positrone e al nucleo figlio. Come è mostrato in Appendice ??, un decadimento in almeno tre corpi dá ragione dell'andamento continuo degli spettri energetici e non solo.

La conservazione della carica elettrica richiede che la particella proposta da Pauli sia neutra. Siccome inoltre le energie cinetiche massime degli elettroni/positroni emessi nei decadimenti β corrispondono sostanzialmente all'energia che avrebbero se il decadimento fosse in due soli corpi, se ne deduce che la massa di tale particella è molto piccola, sostanzialmente compatibile

¹⁰Vedi corso di Introduzione alla Fisica Teorica.

¹¹Per avere una prima conferma sperimentale diretta dell'esistenza del neutrino fu infatti necessario attendere ben 26 anni, quando nel 1956 Cowan e Reines riuscirono a rivelare inequivocabilmente antineutrini elettronici provenienti da un reattore nucleare, come descritto nel paragrafo 9.5.

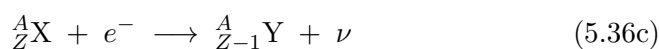
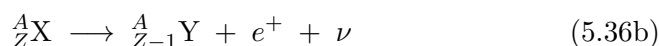
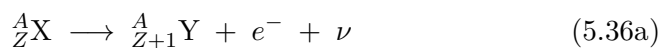
con *zero*.

Uno dei compiti di questa particella era anche di garantire la conservazione del momento angolare nel decadimento β , e da ciò consegue che deve essere un fermione con momento angolare di spin pari ad $\hbar/2$.

Le caratteristiche dedotte per questa particella, a meno della massa, la fanno in un certo qual modo assomigliare a un neutrone, ed è per questo che E. Fermi la chiamò *neutrino*, indicata dalla lettera ν . In capitoli successivi si riprenderà approfondendolo, il filo cronologico dalla formulazione dell'ipotesi dell'esistenza del neutrino, introducendo altre sue interessanti e importanti proprietà, e analizzandone soprattutto la connessione con quanto concerne l'interazione *debole*.

Qui di seguito si vedranno più specificamente alcuni fatti direttamente connessi con la fenomenologia del decadimento β nucleare.

Grazie all'introduzione del neutrino le [5.35](#) si possono intanto più correttamente scrivere come



che però, come si vedrà nel paragrafo [9.5](#), non è ancora la forma definitivamente corretta.

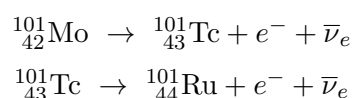
Sperimentalmente si trova che in una sequenza isobarica il nucleo con massa inferiore è stabile rispetto al decadimento β .

Considerando i nuclei con numero di massa A dispari si vedano come esempio gli isobari con $A = 101$. In tal caso l'isobaro di massa minima è il rutenio ${}^{101}_{44}\text{Ru}$, un nuclide pari-dispari che per quanto visto nei paragrafi [4.2](#) e [4.3.8](#), è in corrispondenza al minimo della parabola che descrive la sequenza isobarica. Isobari con più neutroni, quali ${}^{101}_{42}\text{Mo}$ e ${}^{101}_{43}\text{Tc}$, decadono convertendo un neutrone del nucleo in un protone secondo la



Il numero atomico di ogni nucleo figlio è quindi superiore di un'unità a quello del nucleo genitore. Nel resto di questo paragrafo si userà la simbologia completa e corretta per indicare i neutrini (e gli antineutrini) che sono parte dei decadimenti considerati, anche se il senso esatto di ciò apparirà chiaro nel paragrafo [9.5](#).

Si ha dunque



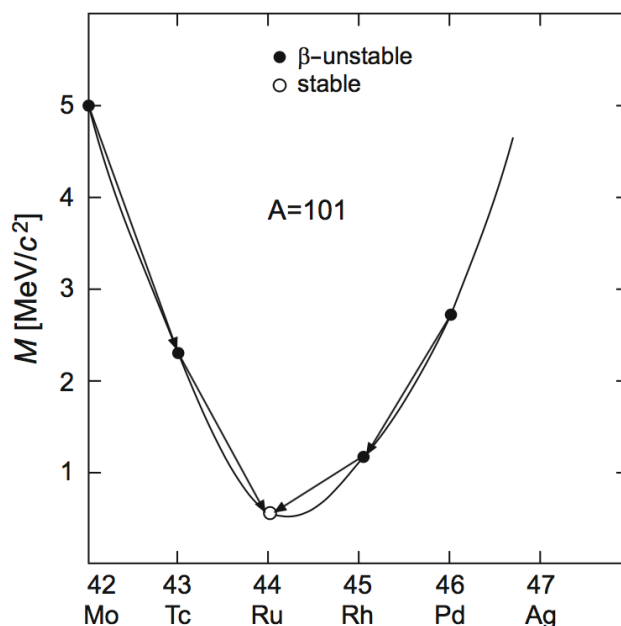
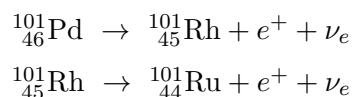


Figura 5.14: Sequenza isobarica del rutenio $^{101}_{44}\text{Ru}$

Gli isobari con un eccesso di protoni rispetto al $^{101}_{44}\text{Ru}$ decadono invece β^+ convertendo un protone interno al nucleo secondo la

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e \quad (5.38)$$

In tal caso l'isobaro $^{101}_{44}\text{Ru}$ è prodotto dalla sequenza



Si ricordi che il principio di conservazione dell'energia vieta la [5.38](#) al di fuori dei nuclei, mentre invece la [5.37](#) è permessa. Il fatto che la [5.38](#) possa aver luogo all'interno di un nucleo implica che sia energeticamente permessa, ovvero che l'incremento in energia di legame del nucleo figlio derivante dal decadimento sia sufficiente, cioè $\geq (m_n + m_e + m_{\bar{\nu}_e} - m_p) c^2$.

Si considerino ora i nuclei con numero di massa A pari. Sempre per quanto visto nei paragrafi [4.2](#) e [4.3.8](#), in questo caso le sequenze isobariche si dispongono secondo due diversi andamenti parabolici, uno per i nuclei dispari-dispari e uno, separato del doppio dell'energia di accoppiamento $2|B_{ac}(A, Z)|$ nella formula di Weizsäcker, per i nuclei pari-pari.

Capita spesso che soprattutto per valori di $A > 70$ vi sia più di un isobaro β -stabile. Si considerino come esempio gli isobari con $A = 106$.

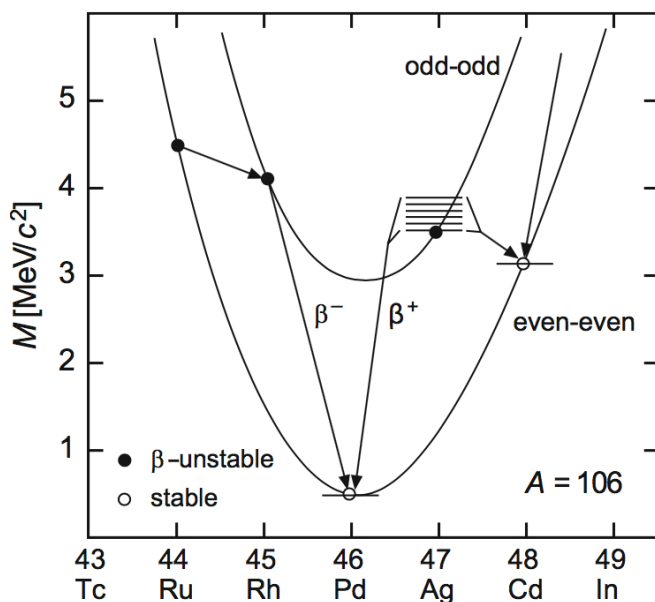
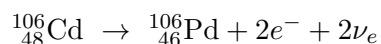


Figura 5.15: Sequenze isobariche del Palladio $^{106}_{46}\text{Pd}$

Gli isobari pari-pari $^{106}_{46}\text{Pd}$ e $^{106}_{48}\text{Cd}$ sono sulla parabola inferiore e $^{106}_{46}\text{Pd}$, il più stabile dei due, si trova in corrispondenza al minimo della parabola pari-pari. Il $^{106}_{48}\text{Cd}$ è β -stabile in quanto i due isobari dispari-dispari a lui più prossimi sono situati a livelli energetici superiori, come mostrato in figura 5.15. Il decadimento del $^{106}_{48}\text{Cd}$ in $^{106}_{46}\text{Pd}$ sarebbe possibile soltanto attraverso un cosiddetto *doppio decadimento β* ¹²



La probabilità di un simile processo è però così piccola che il $^{106}_{48}\text{Cd}$ può essere considerato praticamente stabile.

I nuclei dispari-dispari hanno sempre almeno un nucleo pari-pari loro prossimo più fortemente legato nella sequenza isobarica, e di conseguenza sono instabili. Le sole eccezioni a questa regola sono i nuclei leggeri ^2_1H , ^6_3Li , $^{10}_5\text{B}$ e $^{14}_7\text{N}$ che sono β -stabili in quanto l'aumento dell'energia di asimmetria nella formula di Weizsäcker supera in valore assoluto la diminuzione nell'energia d'accoppiamento.

Vi sono anche nuclei che possono decadere sia β^- che β^+ , come il potassio $^{40}_{19}\text{K}$ e il $^{64}_{29}\text{Cu}$.

Per quanto concerne la cattura elettronica o *cattura K* essa, come per la conversione interna, è dovuta alla probabilità non trascurabile che la funzione d'onda di un tale elettrone si sovrapponga spazialmente e in modo

¹²Del doppio decadimento β si tratterà nel [paragrafo ...](#)

consistente, alla funzione d'onda del nucleo, permettendo che un protone di questo e l'elettrone si combinino per formare un neutrone e un neutrino secondo la



Questa reazione si presenta prevalentemente in nuclei pesanti per i quali il raggio nucleare è maggiore e l'estensione radiale degli orbitali atomici è minore. Solitamente gli elettroni catturati provengono dall'orbitale più interno, K appunto, la cui funzione d'onda ha la massima sovrapposizione spaziale con la zona occupata dal nucleo. Similmente al processo di conversione interna, la cattura di un elettrone dall'orbitale K ingenera la successiva cascata, nella vacanza da lui lasciata, di un altro elettrone dell'atomo proveniente da orbitali più esterni, quindi a energie più elevate, con la conseguente emissione di caratteristici raggi-X.

Questo processo è energeticamente in competizione col decadimento β^+ , come si può vedere ad esempio nel caso del $^{40}_{19}\text{K}$, di cui in figura 5.16 è riportato lo schema dei livelli. Il $^{40}_{19}\text{K}$ è un isotopo naturale con abbondanza

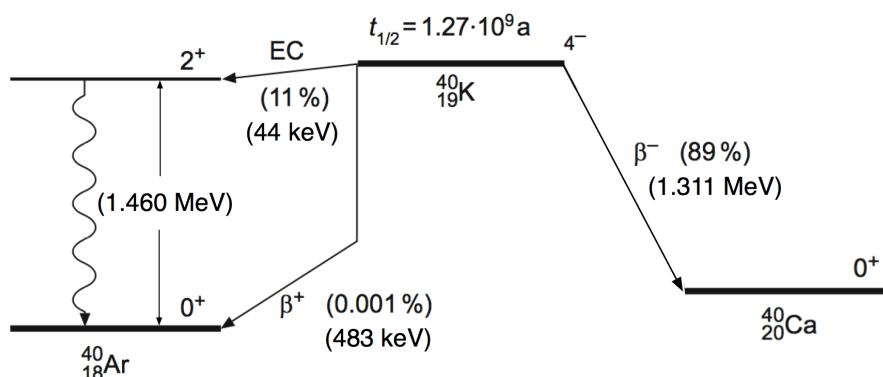


Figura 5.16: Decadimenti β e cattura K del $^{40}_{19}\text{K}$

dello 0.0117 % che può decadere β^- verso il livello fondamentale del $^{40}_{20}\text{Ca}$, con probabilità dell'89.25 % e un Q-valore di 1.311 MeV. Ma esso può anche, con probabilità del 10.55 %, dar luogo a una cattura K con successiva emissione di fotoni da 1.460 MeV verso il livello fondamentale di $^{40}_{18}\text{Ar}$. La residua probabilità di decadimento β^+ , sempre verso $^{40}_{18}\text{Ar}$, è pari a circa 0.001 % e l'energia di 483 keV a disposizione di positrone e neutrino tiene conto della frazione, pari a 1.022 MeV, necessaria a creare la coppia e^+e^- .

Per quanto concerne le vite medie caratteristiche dei decadimenti dei nuclei β -instabili, $\tau_\beta = 1/\lambda_\beta$, i loro valori spaziano fra circa 10^{16} anni e circa 10^{-3} secondi, con la massima energia d'emissione E_0 variabile da alcune frazioni di MeV fino a circa 7 MeV.

La costante di decadimento β va circa come la quinta potenza dell'energia

rilasciata (legge di Sargent)

$$\lambda_\beta = \frac{1}{\tau_\beta} \propto E^5 \quad (5.40)$$

e dipende sia dalle caratteristiche del nucleo genitore che da quelle del nucleo figlio.

Non vi sono casi di due isobari contigui che siano β -stabili, anche se talvolta uno dei due ha vita media così lunga da poter essere a tutti gli effetti considerato stabile. Un ben noto esempio è il ^{40}K che decadendo sia β^- che β^+ , si trasforma in altri isobari per i quali entra in competizione anche la cattura K. I prodotti stabili del decadimento del ^{40}K sono ^{40}Ar e ^{40}Ca , rappresentando un caso di due nuclei stabili con uguale numero di massa A , come si vede in figura [5.16](#)

La scelta del ^{40}K come esempio non è casuale, infatti esso contribuisce considerevolmente all'esposizione radioattiva di tutte le strutture biologiche: il potassio è un elemento essenziale nella trasmissione dei segnali nervosi e la sua concentrazione nel corpo umano è tale da far sì che esso costituisca circa il 16% della radiazione naturale cui siamo mediamente esposti.

I nuclidi β -instabili con emissione di positroni hanno tutti $Z < 80$.

5.4.3 Regole di Sargent

Con l'intento di cercare delle regolarità che permettessero di capire il meccanismo alla base dei decadimenti β , nel 1933 B.W. Sargent pubblicò un lavoro in cui mostrava che graficando il logaritmo della costante di decadimento λ_β verso il logaritmo della massima energia E_{max} degli elettroni emessi da nuclei β -emettitori, la gran parte dei punti trovati cadeva in prossimità di due curve quasi rettilinee, come mostrato in figura [5.17](#).

Il diagramma risultante, detto di Sargent, costituisce una regola empirica del tipo di quella di Geiger-Nuttal per il decadimento α .

In questo caso però le costanti di disintegrazione non cambiano molto velocemente con l'energia e le due curve non corrispondono ognuna a una diversa serie radioattiva. Per un definito valore di E_{max} la curva superiore fornisce un valore di λ_β circa 100 volte superiore a quello corrispondentemente fornito dalla curva inferiore per cui si può dire che fissata un'energia, un decadimento β prossimo alla curva inferiore è circa 100 volte meno probabile di quello corrispondente sulla curva superiore. Ciò ha portato a dire *transizioni permesse* quelle rappresentate dalla curva superiore e *transizioni proibite* quelle rappresentate dalla curva inferiore. Chiaramente i termini "permesse" e "proibite" vanno intesi come diversi valori di probabilità di decadimento spontaneo.

La descrizione della globalità dei dati sperimentali richiede di considerare separatamente curve di Sargent per nuclidi con numeri atomici piccoli, intermedi o grandi. In tutti i casi si ottengono più curve, una delle quali viene

identificata come rappresentante le transizioni permesse e le altre come rappresentanti diversi livelli di transizioni proibite. Una teoria del decadimento

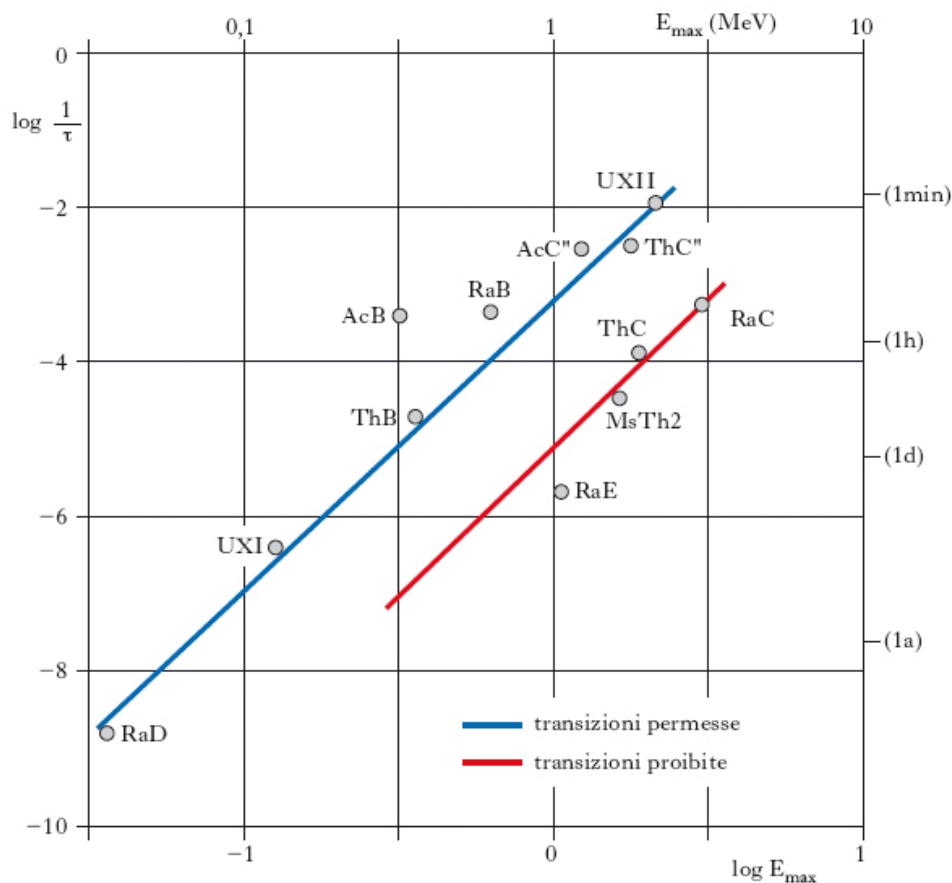


Figura 5.17: Tipico diagramma di Sargent.

β deve naturalmente essere in grado di riprodurre sia queste regolarità nei dati sperimentali che le caratteristiche degli spettri d'emissione β .

5.4.4 Teoria di Fermi del decadimento β

Le vite medie misurate τ_β associate ai decadimenti β sono molto maggiori dei tempi caratteristici coinvolti nelle interazioni nucleari ed elettromagnetiche: infatti la scala temporale tipica dei processi governati dall'interazione forte è dell'ordine dei 10^{-23} s o inferiore, mentre quella dei processi governati dall'interazione elettromagnetica è come si vedrà nel prossimo paragrafo [5.5](#), dell'ordine dei 10^{-16} s. Da ciò si desume che nonostante i decadimenti β siano chiaramente un fenomeno nucleare, essi non coinvolgono però né la forza nucleare né quella elettromagnetica, e data la piccolezza delle probabilità

$\lambda_\beta = 1/\tau_\beta$ di decadimento ad essi associate, l'interazione che li governa deve essere *debole*.

Questa conclusione condusse Fermi a postulare l'esistenza di una nuova forza che fosse responsabile dei decadimenti β . Essa è stata chiamata *forza debole* ed è a breve raggio d'azione, dato che è efficace soltanto all'interno dell'ambiente nucleare. La bassissima intensità di questa forza è quindi responsabile delle lunghe vite medie osservate nei decadimenti β . In termini di intensità relative, assunta come pari ad 1 quella della forza forte, si ha rispettivamente 10^{-2} per l'elettromagnetica, 10^{-5} per la debole e 10^{-39} per la gravitazionale.

Così come nel caso dell'interazione elettromagnetica, il ridotto valore dell'intensità d'accoppiamento della forza debole permette dunque di affrontare con tecniche perturbative la formulazione di una teoria del decadimento β . Si è visto che all'interno dei nuclei non vi possono essere, stabilmente presenti, elettroni (dimensioni nucleari, modello Rutherford, ecc. ecc.), e conseguentemente si deduce che gli elettroni emessi durante il decadimento β non possono provenire dal nucleo ma devono essere stati prodotti nel momento del decadimento. Questa sequenza è abbastanza analoga a quanto avviene nelle transizioni atomiche, in cui i fotoni non pre-esistono all'interno degli atomi ma sono prodotti al momento delle transizioni. Così come la transizione in un atomo può essere capita come indotta, ad esempio, da un'interazione di dipolo, e quindi calcolata utilizzando la teoria delle perturbazioni, similmente il decadimento β può essere capito come dovuto alla debole forza rappresentata dall'Hamiltoniano di interazione debole.

Il calcolo della probabilità λ_β di transizione per unità di tempo, e della forma dello spettro energetico delle particelle emesse nel processo, può quindi essere affrontato come fatto da Fermi¹³, con tecniche perturbative e utilizzando la Regola d'Oro n. 2. Anche se i risultati ottenuti da Fermi sono poi stati superati da sviluppi successivi e infine dalla *teoria elettrodebole*¹⁴ di S. Glashow, A. Salam e S. Weinberg, è molto istruttivo riproporlo qui in una forma semplificata utilizzata dallo stesso Fermi in "Nuclear Physics" - The University of Chicago Press (1950).

La teoria di Fermi dell'interazione debole è sostanzialmente una teoria di campo in cui l'Hamiltoniano d'interazione è un operatore agente sui campi fermionici tramite assorbimento o emissione di fermioni.

Si riprende dunque l'osservazione che in un decadimento β l'elettrone e il neutrino vengono formati al momento del decadimento e della loro emissione dall'atomo. Siano ψ_e e ψ_ν le funzioni d'onda che descrivono gli stati nei quali sono state create le due particelle e si assuma che siano rappresentabili da

¹³E. Fermi, Tentativo di una teoria dei raggi β , Nuovo Cimento 11 (1934) 1-19.

¹⁴Citare il paragrafo dove ne parlerò ...

due onde piane di impulsi rispettivamente \vec{p}_e e \vec{p}_ν

$$\psi_e = N_e e^{i\vec{p}_e \cdot \vec{r}/\hbar} \quad , \quad \psi_\nu = N_\nu e^{i\vec{p}_\nu \cdot \vec{r}/\hbar} \quad (5.41)$$

dove N rappresenta un fattore di normalizzazione. ψ_e è in realtà più complicata di quanto detto in quanto sente l'influenza della carica nucleare Ze . Considerarla un'onda piana è una buona approssimazione se l'energia dell'elettrone è molto maggiore dell'energia media di legame degli elettroni del nucleo di numero atomico Z . Per elettroni di bassa energia, dell'ordine ad esempio di 200 KeV, e in prossimità di un nucleo con alto valore di Z , risulta che ψ_e è fortemente perturbata.

Fermi assunse che la probabilità d'emissione dipenda dalla probabilità per l'elettrone e il neutrino di essere "creati" contemporaneamente e nello stesso punto^[15], coincidente con le coordinate del centro di massa O del nucleo, che si considera anche come origine del sistema di riferimento. La probabilità d'emissione dipende quindi dal prodotto $|\psi_e(O)|^2 |\psi_\nu(O)|^2$, ma anche da altri fattori "la cui natura è incerta".

Un fattore è il modulo quadro dell'elemento di matrice \mathcal{M} fra gli stati iniziali e finale del nucleo. Questo elemento di matrice è analogo a quello usato nella descrizione dell'emissione di fotoni per la quale, nel caso di radiazione da dipolo, si ha

$$\mathcal{M} = \int \psi_{fin}^* (\text{mom. el.}) \psi_{in} d\tau$$

Nel caso dell'interazione β , \mathcal{M} non è noto esattamente. Per la trasformazione $n \rightarrow p$, la forma più semplice da scegliere, se si assume che nel processo sia coinvolto un solo nucleone del nucleo, è

$$\mathcal{M} = \int \psi_p^* \psi_n d\tau \quad (5.42)$$

dove ψ_n e ψ_p rappresentano rispettivamente lo stato iniziale e finale del nucleone coinvolto. Se si tiene anche conto dei possibili stati di spin, allora \mathcal{M} diventa un vettore la cui generica componente è

$$\mathcal{M}_i = \int \psi_p^* \sigma_i \psi_n d\tau \quad (5.43)$$

dove σ_i è l' i -ma componente di un operatore relativistico di spin, per cui

$$|\mathcal{M}|^2 = \sum_{i=1}^3 |\mathcal{M}_i|^2 \quad (5.44)$$

Si può mostrare come la scelta di \mathcal{M} determini delle regole di selezione per i decadimenti β (paragrafo ??).

¹⁵Con questa assunzione Fermi ipotizzò sostanzialmente che non vi fosse necessità di particella mediatrice per questo processo, essendo puntuale, e come si vedrà più avanti parlando delle interazioni deboli, questa assunzione è una approssimazione valida purchè le energie in gioco non siano troppo alte.

L'espressione per la probabilità d'emissione include anche un fattore "costante" g^2 che rappresenta l'intensità dell'accoppiamento che dà luogo all'emissione e gioca il ruolo di una costante universale per la quale si trova sperimentalmente

$$10^{-48} \text{ g m}^3\text{s}^{-2} \lesssim g \lesssim 10^{-49} \text{ g m}^3\text{s}^{-2} \quad (5.45)$$

Tenendo quindi conto di tutto quanto detto e usando la Regola d'Oro n.2 si ha, per la probabilità d'emissione

$$\frac{2\pi}{\hbar} (|\psi_e(O)| |\psi_\nu(O)| |\mathcal{M}| g)^2 \frac{dn}{dE} \quad (5.46)$$

con dn/dE la densità energetica degli stati finali e O che come detto, indica il "punto in cui avviene" il decadimento, assunto come il centro di massa del nucleo genitore.

Le funzioni d'onda ψ sono normalizzate sul volume V in modo che

$$\int_V \psi^* \psi \, d\tau = 1 \quad , \quad \text{per cui:} \quad N = \frac{1}{\sqrt{V}} \quad (5.47)$$

e

$$\psi_e = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}_e \cdot \vec{r}/\hbar} \quad , \quad \psi_\nu = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}_\nu \cdot \vec{r}/\hbar} \quad (5.48)$$

Ha senso dire che il nucleo è posizionato in $\vec{r} = 0$ solo se ψ cambia poco sulle dimensioni del nucleo stesso.

Per valori dell'impulso p tipici dei decadimenti β , il "passo" con cui si hanno sensibili variazioni di ψ è dato da $\lambda = \hbar/p \simeq 10^{-13}$ m, quindi grande se confrontato con le dimensioni nucleari, dell'ordine di 10^{-14} m, cui sono estesi gli integrali che compaiono nell'elemento di matrice. Ha quindi abbastanza senso considerare il nucleo in buona approssimazione "puntiforme" in $\vec{r} = 0$. In tal caso le [5.48](#) si riducono a

$$\psi_e(O) = \frac{1}{\sqrt{V}} \quad , \quad \psi_\nu(O) = \frac{1}{\sqrt{V}} \quad (5.49)$$

Si consideri ora la densità degli stati finali. Il numero dn' di stati d'onda piana con valore dell'impulso compreso fra p e $p + dp$, considerando la particella dovunque in V è [16](#)

$$\frac{dn'}{dp} \, dp = \frac{V \, p^2 \, dp}{2\pi^2 \hbar^3} \quad (5.50)$$

quindi si ha, per dn

$$dn = \frac{p_e^2 \, dp_e}{2\pi^2 \hbar^3} \frac{p_\nu^2 \, dp_\nu}{2\pi^2 \hbar^3} V^2 = \frac{p_e^2 \, p_\nu^2}{4\pi^4 \hbar^6} V^2 \, dp_e \, dp_\nu \quad (5.51)$$

¹⁶Si veda l'Appendice ...

con $dp_e dp_\nu = J dp_e dE$, essendo "J" lo Jacobiano che trascurando l'energia di rinculo del nucleo rispetto alle energie di elettrone e neutrino, e assumendo nulla la massa del neutrino, $m_\nu = 0$, può essere calcolato partendo dalla relazione $E = cp_\nu + E_e$, ottenendo¹⁷ $J = 1/c$. Quindi:

$$\frac{dn}{dE} = \frac{p_e^2 p_\nu^2}{4\pi^4 \hbar^6 c} V^2 dp_e \quad (5.52)$$

In base quindi alla [5.46](#) si ottiene la probabilità d'emissione per unità di tempo $P(p_\nu, p_e) dp_e$ in funzione della sola variabile misurata, cioè l'impulso p_e dell'elettrone

$$P(p_\nu, p_e) dp_e = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{1}{V} |\mathcal{M}| g \right)^2 \frac{p_e^2 p_\nu^2 V^2 dp_e}{4\pi^4 \hbar^6 c} \quad (5.53)$$

Sempre nell'ipotesi $m_\nu = 0$ si ha anche, detta E_{tot} l'energia totale a disposizione nello stato finale del decadimento, che coincide praticamente quasi con l'estremo superiore $E_{e,max}$ della distribuzione in energia degli elettroni emessi: $E_\nu = p_\nu c = E_{tot} - E_e$, da cui: $p_\nu = (E_{tot} - E_e)/c$, che sostituito dá, per la probabilità d'emissione

$$P(p_e) dp_e = \frac{g^2 |\mathcal{M}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} (E_{tot} - E_e)^2 p_e^2 dp_e \quad (5.54)$$

Esprimendo infine $p_{e,max}$ dalla $E_{e,max} = \sqrt{m^2 c^4 + p_{e,max}^2 c^2} \simeq E_{tot}$, si ha:

$$P(p_e) dp_e = \frac{g^2 |\mathcal{M}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \left(\sqrt{m^2 c^4 + p_{e,max}^2 c^2} - \sqrt{m^2 c^4 + p_e^2 c^2} \right)^2 p_e^2 dp_e \quad (5.55)$$

che rappresenta sostanzialmente la distribuzione dello spazio delle fasi nel decadimento a tre corpi in cui la massa del nucleo residuo è molto maggiore di quella dell'elettrone, la cui massa è a sua volta molto maggiore di quella del neutrino.

Per trovare ora la vita media τ_β bisogna integrare su tutti i possibili valori di p_e

$$\lambda_\beta = \frac{1}{\tau_\beta} = \frac{g^2 |\mathcal{M}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \int_0^{p_{e,max}} \left(\sqrt{m^2 c^4 + p_{e,max}^2 c^2} - \sqrt{m^2 c^4 + p_e^2 c^2} \right)^2 p_e^2 dp_e \quad (5.56)$$

Dalla misura della vita media τ_β si può quindi ottenere il valore del prodotto fra la costante d'accoppiamento e l'elemento di matrice $g |\mathcal{M}|$.

Per risolvere l'integrale conviene ridefinire gli impulsi in unità di mc , rendendo così esplicita la dipendenza dalla massa dell'elettrone e ottenendo le due

$$^{17} J = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_e}{\partial p_e} & \frac{\partial p_e}{\partial E} \\ \frac{\partial p_\nu}{\partial p_e} & \frac{\partial p_\nu}{\partial E} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial p_e}{\partial E} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{c}$$

quantità $\eta = p_e/(mc)$ ed $\eta_0 = p_{e,max}/(mc)$, tramite le quali si riesprime l'integrale della [5.56](#), chiamandolo $F(\eta_0)$:

$$\frac{1}{\tau_\beta} = \frac{g^2 |\mathcal{M}|^2 m^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} F(\eta_0) \quad (5.57a)$$

$$F(\eta_0) = \int_0^{\eta_0} \left(\sqrt{1 + \eta_0^2} - \sqrt{1 + \eta^2} \right)^2 \eta^2 d\eta \quad (5.57b)$$

Integrando la [5.57b](#) si ottiene

$$\begin{aligned} F(\eta_0) &= -\frac{1}{4}\eta_0 - \frac{1}{12}\eta_0^3 + \frac{1}{30}\eta_0^5 + \frac{1}{4}\sqrt{1 + \eta_0^2} \ln \left(\eta_0 + \sqrt{1 + \eta_0^2} \right) \\ &= -\frac{1}{4}\eta_0 - \frac{1}{12}\eta_0^3 + \frac{1}{30}\eta_0^5 + \frac{1}{4}\sqrt{1 + \eta_0^2} \operatorname{senh}^{-1}\eta_0 \end{aligned} \quad (5.58)$$

Sviluppando il logaritmo e ottenendo termini con potenze di η_0 che cancellano quelli delle potenze inferiori a η_0^7 nell'espressione per $F(\eta_0)$, si individuano quindi per $F(\eta_0)$ le seguenti forme limite :

$$\eta_0 \gg 1 : F(\eta_0) \longrightarrow \frac{1}{30} \eta_0^5 \quad (5.59a)$$

$$\eta_0 \ll 1 : F(\eta_0) \longrightarrow \frac{2}{105} \eta_0^7 \quad (5.59b)$$

Nella prima, relativa ai decadimenti β in cui $E_{tot} \approx E_{e,max}$ è abbastanza maggiore di $m_e c^2$, la vita media dipende dunque dalla quinta potenza di E_{tot} , in accordo con le osservazioni di Sargent.

Le approssimazioni fatte finora sono un pó drastiche, sia per quanto concerne l'elemento di matrice che per le funzioni d'onda dell'elettrone o positrone emessi. Considerare queste ultime delle semplici onde piane porta infatti a trascurare l'interazione coulombiana fra l'elettrone o il positrone e il nucleo. Per tenerne conto si introduce, nell'espressione integranda per ottenere λ_β , un fattore $f(\pm Z, \eta_0)$ dipendente dal nucleo e dall'energia dell'elettrone. La funzione integrata risultante dipende anch'essa da Z e si scrive $F(\pm Z, \eta_0)$, che per piccoli valori di Z si riduce alla $F(\pm Z, \eta_0) \approx F(\eta_0)$ introdotta sopra. Si ha quindi per λ_β

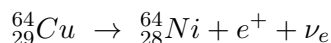
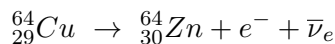
$$\lambda_\beta = \frac{1}{\tau_\beta} = \frac{g^2 m^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} |\mathcal{M}|^2 F(\pm Z, \eta_0) \quad (5.60)$$

Nei decadimenti β con $E_{tot} \gg m_e c^2$, l'impulso dell'elettrone emesso è mediamente grande e si trova $F(\pm Z, \eta_0) \approx 1$.

$F(\pm Z, \eta_0)$ è significativamente diversa dall'unità soltanto per valori grandi di Z e piccoli delle energie.

Dalla [5.60](#), ricordando la [5.55](#), si può ottenere la forma dello spettro d'emissione β , come mostrato da Fermi.

In figura [5.18](#) sono mostrate le diverse forme delle distribuzioni d'impulso di e^- ed e^+ nei decadimenti β del rame.



Si noti come, nell'ipotesi fatta che la massa del neutrino sia nulla ($\nu=0$),

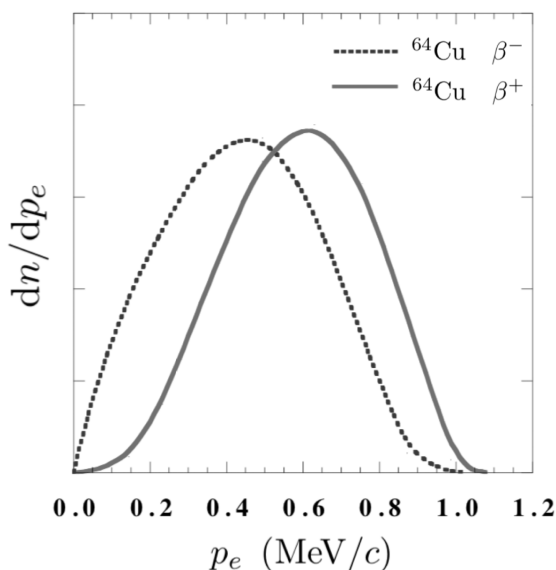


Figura 5.18: Distribuzioni in impulso di e^- ed e^+ emessi nei decadimenti β del ${}^{64}_{29}\text{Cu}$.

l'andamento della distribuzione verso l'estremo superiore dei valori di p_e sia quello di un avvicinamento dolce al valore nullo, che Fermi ha mostrato essere parabolico. Se viceversa la massa del neutrino non fosse nulla si può provare che tale avvicinamento sarebbe con derivata decrescente tendente a $-\infty$, tanto più marcato quanto maggiore fosse la massa del neutrino. I dati sperimentali sono compatibili con $m_\nu = 0$ o comunque con una m_ν inferiore a quanto rilevabile dai dati stessi.

Ciò rende chiaramente difficoltoso individuare sperimentalmente con precisione l'estremo superiore $p_{e,max}$ dei valori di p_e , ovvero il punto in cui la distribuzione incontra l'asse delle ascisse, e quindi anche $E_{e,max}$.

Un modo più accurato per determinare $E_{e,max}$ consiste nell'utilizzare i grafici di Kurie. Essi si ottengono dalla [5.54](#) considerando l'intensità $I(p_e)$ dell'emissione di elettroni con impulso p_e , che è una quantità misurabile,

$$I(p_e) = (E_{e,max} - E)^2 p_e^2 C(Z, p_e) \quad (5.61)$$

dove $C(Z, p_e)$ include tutte le costanti e anche la dipendenza dalla carica Z del nucleo. Si ha quindi

$$\sqrt{\frac{I(p_e)}{p_e^2 C(Z, p_e)}} = (E_{e,max} - E) \quad (5.62)$$

Graficando il radicale della [5.62](#) verso l'energia E si dovrebbe ottenere una retta di cui ottenere agevolmente l'intercetta sull'asse orizzontale delle energie. Anche in questo caso una massa non nulla del neutrino darebbe luogo a un'andamento del grafico di Kurie che intercetterebbe l'asse delle ascisse con pendenza infinita, come mostrato in figura [5.19](#)

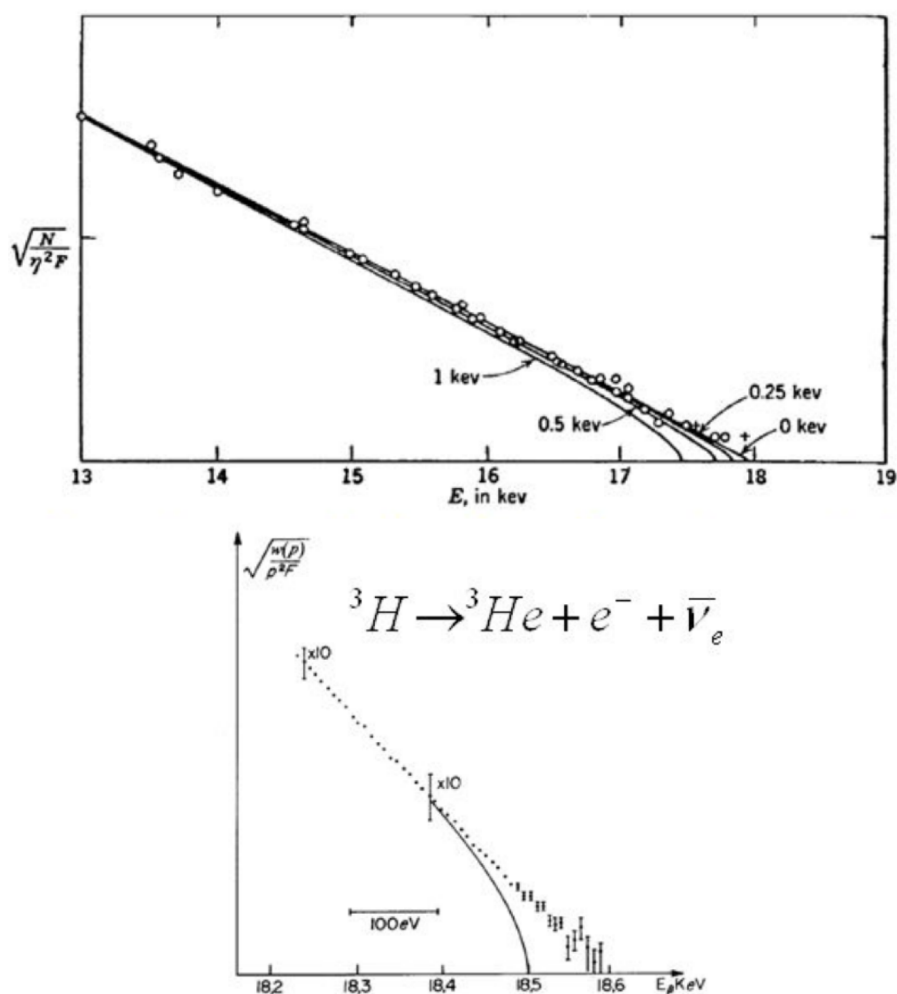


Figura 5.19: Kurie-plot del decadimento β^- del tritio: ${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}_e$ del tritio. Assieme ai dati sperimentali, anche gli andamenti attesi in funzione di diverse ipotesi sulla massa dell'antineutrino dell'elettrone.

Capitolo 7

Processi d'urto

Gli esperimenti che coinvolgono processi d'urto sono strumenti fondamentali d'indagine nella fisica nucleare e delle particelle.

In un tipico esperimento d'urto si individuano un oggetto da studiare che funge solitamente da *bersaglio* e dei *proiettili*, sotto forma di fascio incidente. L'individuazione di proiettile e bersaglio non è però sempre univoca, a volte appartengono entrambi a fasci collidenti l'uno contro l'altro e in certi casi si creano fasci di *bersagli* che vengono accelerati contro *proiettili*.

Prendendo come esempio una reazione (2 corpi) in (2 corpi) essa viene genericamente indicata con

$$a + b \longrightarrow c + d \quad (7.1)$$

dove convenzionalmente a e b rappresentano rispettivamente proiettile e bersaglio, mentre c e d vengono detti prodotti di reazione; quanto precede la freccia viene anche indicato come *canale d'ingresso* della reazione, e quanto la segue viene di conseguenza indicato come *canale d'uscita* della reazione. Nel caso di una reazione anelastica il numero dei prodotti di reazione può essere maggiore di due.

Opportuni sistemi di rivelazione permettono di misurare la quantità dei prodotti di reazione, le loro energie, impulsi, masse, spin, e quindi gli angoli relativi delle direzioni d'emissione rispetto a quella del fascio incidente.

Oggi si è in grado di produrre un'ampia varietà di fasci di particelle¹ e ioni, con energie cinetiche variabili da un minimo di circa 10^{-3} eV per neutroni freddi, sino a 2.6×10^{12} eV/N per ioni Pb, e 6.5×10^{12} eV per protoni, entrambi accelerati presso l'anello LHC al CERN.

Si possono anche produrre e utilizzare fasci secondari di particelle o ioni frutto dell'interazione primaria, eventualmente ad alte energie, di altre particelle o ioni; questi fasci secondari possono essere costituiti da particelle a breve vita media quali muoni μ , mesoni π o K, iperoni ($\Sigma^\pm, \Xi^-, \Omega^-$), o da nuclei radioattivi.

¹Si veda il Cap. [2](#) sugli acceleratori.

I bersagli utilizzati possono essere sotto forma solida, liquida, gassosa o come detto, costituire a loro volta fasci di particelle accelerate, come negli anelli ad accumulazione.

Conviene distinguere i processi d'urto in processi elastici e processi anelastici. Un tipico processo elastico, per il quale i prodotti di reazione coincidono con

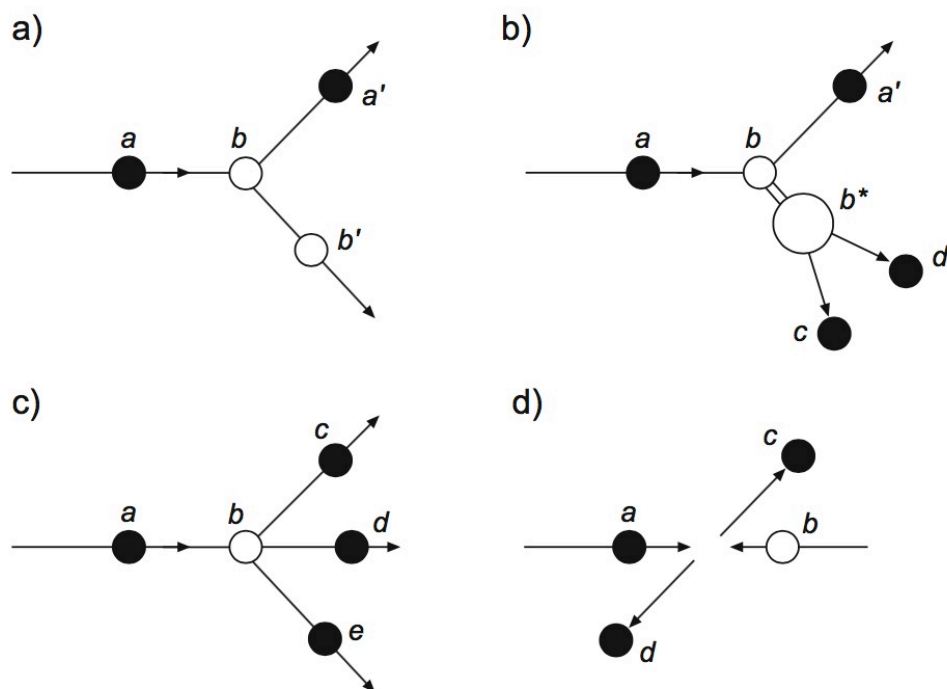


Figura 7.1: Schematizzazione dei processi d'urto: a) diffusione elastica; b) diffusione anelastica con produzione di uno stato eccitato che poi decade in due particelle; c) produzione anelastica di nuove particelle; d) reazioni tra fasci collidenti.

i due soggetti inizialmente coinvolti nell'urto, è indicato con

$$a + b \longrightarrow a' + b' \quad (7.2)$$

In questo caso sia proiettile che bersaglio restano nel proprio stato fondamentale anche dopo l'urto, col bersaglio che assorbe semplicemente l'impulso di rinculo modificando di conseguenza la propria energia cinetica; l'energia cinetica totale naturalmente si conserva, data la supposta elasticità dell'urto. Gli apici segnalano quindi la sola diversità che caratterizza i soggetti del canale d'ingresso da quelli del canale d'uscita, ovvero i parametri cinematici (impulso ed energia cinetica). Gli angoli d'emissione e le energie cinetiche delle due particelle nel canale d'uscita di una reazione elastica sono univocamente correlati.

Similmente a quanto si ha in ottica, il legame fra intensità di particelle diffuse, energia del fascio incidente e angoli di diffusione, fornisce informazioni sulla distribuzione spaziale del bersaglio.

Quanto più piccola è la dimensione dell'estensione spaziale del bersaglio, tanto maggiori sono le energie cinetiche richieste alle particelle del fascio incidente, per ottenerne una buona risoluzione spaziale. Se infatti $\lambda = \lambda/2\pi$ è la lunghezza d'onda di de Broglie di una particella con impulso p , si ha

$$\lambda = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar c}{\sqrt{2mc^2 E_k + E_k^2}} \approx \begin{cases} \frac{\hbar}{\sqrt{2mE_k}} & \text{per } E_k \ll mc^2 \\ \frac{\hbar c}{E_k} \approx \frac{\hbar c}{E} & \text{per } E_k \gg mc^2 \end{cases} \quad (7.3)$$

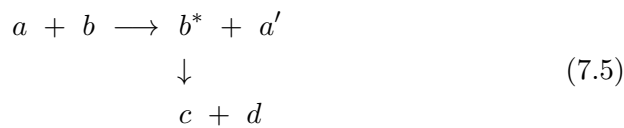
Per ottenere una ragionevole risoluzione spaziale di strutture fisiche con dimensioni lineari Δx servono lunghezze d'onda dello stesso ordine di grandezza: $\lambda \approx \Delta x$. Tenendo conto del principio di indeterminazione si ha, per gli impulsi corrispondenti delle particelle dei fasci incidenti

$$p \gtrsim \frac{\hbar}{\Delta x}, \quad pc \gtrsim \frac{\hbar c}{\Delta x} \approx \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{\Delta x} \quad (7.4)$$

Si deduce da ciò che per risolvere spazialmente le tipiche dimensioni nucleari, che sono di alcune unità di fm, servono fasci di particelle con impulsi di alcune decine di MeV/c.

I singoli nucleoni, come si vedrà, hanno dimensioni lineari dell'ordine di 0.8 fm, e per risolverli spazialmente servono quindi fasci di particelle con impulsi maggiori a 100 MeV/c. Volendo invece risolvere spazialmente i quark, costituenti dei nucleoni, servono fasci di particelle con impulsi di molti GeV/c. In figura [7.2](#) è illustrata la corrispondenza fra energia cinetica, impulso e lunghezza d'onda di de Broglie per alcune particelle: γ , e , μ , p , α .

In un processo anelastico



una parte dell'energia cinetica trasferita dal proiettile a al bersaglio b eccita quest'ultimo portandolo allo stato b^* , come schematizzato al punto b) della figura [7.1](#).

Successivamente lo stato eccitato tornerà allo stato fondamentale emettendo particelle leggere quali fotoni γ o pioni π , e/o decadendo in due o più frammenti e/o particelle.

Talvolta le misure sperimentali su reazioni nucleari non permettono di rivelare tutti i prodotti di reazione e spesso si rivela soltanto il prodotto a' ; in tal caso la misura eseguita si dice *inclusiva*. Quando invece si rivelano tutti i prodotti di reazione si parla di misura *esclusiva*. Il verificarsi di reazioni

7.1 Sezioni d'urto: introduzione operativa

La misura dei tassi di reazione in esperimenti d'urto, detti anche di diffusione o di scattering, così come gli spettri energetici e le distribuzioni angolari dei prodotti di reazione, forniscono informazioni sulle caratteristiche dinamiche delle interazioni fra proiettili e bersagli, quindi sulla forma del potenziale d'interazione e sull'intensità della forza d'accoppiamento.

Si introduce ora uno strumento concettuale utile nella descrizione delle interazioni fra particelle, o fra nuclei, o fra particelle e nuclei: la *sezione d'urto*. Si immaginerà di descrivere una situazione idealizzata, senza peraltro che ciò costituisca un limite alla generalità di quanto verrà dedotto.

Si pensi di preparare un esperimento in cui si invia un fascio collimato di proiettili a (particelle o nuclei), monocinetici di velocità \vec{v}_a contro un bersaglio costituito da oggetti b tutti fra loro uguali e distribuiti in posizioni fisse entro il volume del bersaglio. Si suppone che sia i proiettili che gli i "bersagli" b siano "puntiformi", e ci si riferirà ad essi semplicemente come "particelle", specificando se proiettile o bersaglio.

Si discute il problema immaginando che il bersaglio sia a riposo nel sistema di riferimento del laboratorio (SL).

Si suppone altresì che la "densità istantanea" n_a di particelle proiettile nel fascio incidente sia costante nel tempo e in ogni parte del fascio stesso, e che sia costante anche la densità n_b nel bersaglio delle particelle b che lo costituiscono. Quindi le particelle di fascio e bersaglio sono omogeneamente distribuite in essi.

Si dirà che una particella a del fascio ha interagito con una particella b del bersaglio, indicando formalmente il processo con " $a+b$ ", se lo stato dinamico della particella proiettile a , dopo che questa ha inciso sul bersaglio, è diverso da quanto non fosse prima dell'interazione. Per semplificare il ragionamento sempre senza inficiarne la generalità, si può immaginare che la massa di ogni particella bersaglio b sia molto grande, al limite infinita, così da poterne trascurare il rinculo successivo all'interazione su essa delle particelle a del fascio incidente.

Si suppone anche che ogni particella del fascio possa interagire al più con una sola particella bersaglio.

Ci si pone quindi il problema di determinare, conoscendo il numero dN_a/dt di particelle proiettile che incidono sul bersaglio nell'unità di tempo, il numero dN/dt di quelle che attraversando il bersaglio interagiscono con esso, ovvero con una delle particelle che lo costituiscono.

dN/dt è detto anche "tasso di interazioni" o "tasso di reazioni" e indicando con dN'_a/dt il numero di particelle del fascio che emergono ogni secondo dal bersaglio senza aver interagito con esso si ha

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN_a}{dt} - \frac{dN'_a}{dt} = \frac{d}{dt} (N_a - N'_a) \quad (7.6)$$

Si supponga ancora che il bersaglio si presenti macroscopicamente come una lastra di spessore costante Δz e che tutte le particelle del fascio incidano ortogonalmente su una faccia planare della lastra bersaglio, provenendo lungo traiettorie parallele che individuano un volume di forma sostanzialmente cilindrica di cui A rappresenta l'area della sezione retta, di forma non necessariamente circolare.

In queste ipotesi il numero dN_a/dt di particelle proiettile incidenti nell'unità di tempo, ovvero il flusso Φ_a di particelle incidenti, sarà dato da

$$\frac{dN_a}{dt} = \Phi_a = n_a v_a A \quad (7.7)$$

Quanto detto delinea una geometria dell'urto illustrata in figura 7.3, in cui l'asse di simmetria, indicato con z , è parallelo ed equiverso alla velocità \vec{v}_a di ogni particella incidente, ed è quindi ortogonale alla faccia planare che il bersaglio macroscopico offre al fascio stesso.

Per proseguire bisogna tener conto di cosa significhi l'interagire fra una

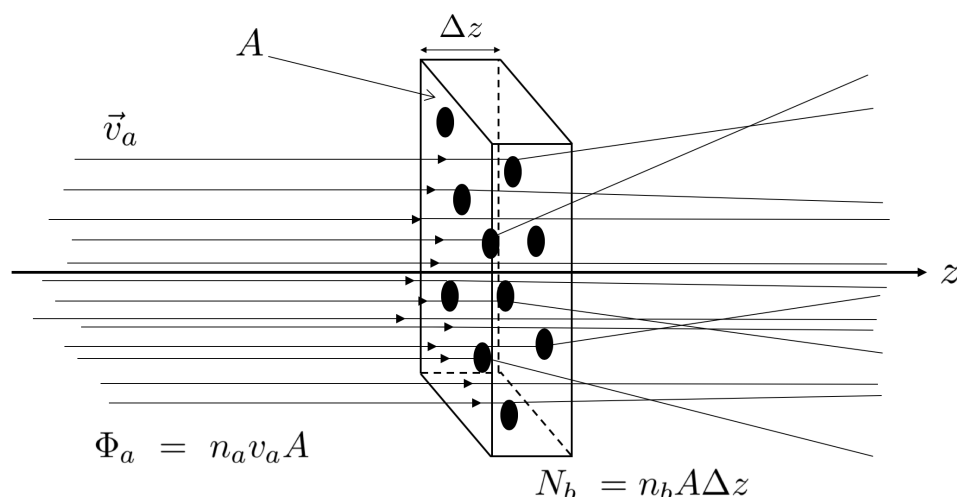


Figura 7.3: Sezione d'urto geometrica di reazione.

particella del fascio e una del bersaglio e di conseguenza di come lo si possa descrivere, introducendo qualcosa che rappresenti la "probabilità d'interazione".

Si è detto che si considera effetto dell'interazione il cambiamento delle proprietà dinamiche per una particella incidente, questo cambiamento determina quindi una diffusione della particella incidente rispetto alla sua traiettoria iniziale di avvicinamento. Supponendo che l'interazione avvenga al più con una delle particelle bersaglio, queste verranno anche dette "centri diffusori". Il numero N_b di centri diffusori omogeneamente distribuiti nella parte di volume $V = A \times \Delta z$ del bersaglio intersecata dal fascio, e con cui ogni

particella incidente può potenzialmente interagire, è dato da

$$N_b = n_b A \Delta z \quad (7.8)$$

Si schematizza l'interazione fra una particella del fascio e un centro diffusore come qualcosa di temporalmente "istantaneo" che si produce sulla particella proiettile nell'istante in cui questa, transitando presso il centro diffusore, si trova in corrispondenza della coordinata z individuata dall'intersezione fra l'asse z e il piano orogonale ad esso e passante per il centro diffusore interessato.

Si associa quindi al centro diffusore un'area circolare σ_b , centrata su di esso e individuata nel piano indicato. Si dirà quindi che la particella incidente, transitando presso il centro diffusore ha interagito con esso se la sua traiettoria di avvicinamento interseca σ_b . Ovviamente ciò avviene con tanta maggior probabilità quanto maggiore è il valore di σ_b .

La quantità σ_b così introdotta viene detta *sezione d'urto geometrica* per l'interazione fra la particella proiettile a e quella bersaglio b e la sua entità è chiaramente funzione anche del tipo di interazione che si considera.

Si torni quindi al problema originale, ovvero determinare il numero dN/dt di particelle incidenti che attraversando il bersaglio nell'unità di tempo interagiscono con esso.

Tale numero dipende ovviamente dal numero dN_a/dt di particelle incidenti sul bersaglio nell'unità di tempo, ed è indipendente da quale probabilità ognuna di esse ha di attraversare un'area σ_b associata a uno dei centri diffusori del bersaglio. Dato che si è indicata con A l'area della sezione retta del fascio incidente e quindi della porzione di bersaglio interessata, la probabilità dell'interazione fra una particella proiettile e un centro diffusore sarà il rapporto fra la somma delle aree σ_b associate a tutti i centri diffusori omogeneamente distribuiti nella parte di volume bersaglio intersecata dal fascio, e A stesso, naturalmente nell'ipotesi che non vi siano sezioni d'urto di centri diffusori che ne oscurano anche solo parzialmente delle altre, lungo la direzione dell'asse z , quindi

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN_a}{dt} \frac{\sigma_b N_b}{A} = \frac{dN_a}{dt} \sigma_b n_b \Delta z \quad (7.9)$$

che esplicitando dN_a/dt diventa

$$\frac{dN}{dt} = n_a v_a N_b \sigma_b = n_a v_a n_b \Delta z A \sigma_b \quad (7.10)$$

da cui si ottiene, per la sezione d'urto geometrica σ_b

$$\sigma_b = \frac{dN}{dt} \frac{1}{n_a v_a n_b \Delta z A} = \frac{dN}{dt} \frac{1}{\Phi_a n_b \Delta z} = \frac{dN}{dt} \frac{1}{\Phi_a \delta_s} \quad (7.11)$$

dove $\delta_s = n_b \Delta z$ è detta densità areale dei centri diffusori b e ha le dimensioni dell'inverso di un'area.

Ricordando che la probabilità che qualcosa abbia luogo si esprime anche come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili si ha, in base alla [7.9](#) e individuando con dN i casi favorevoli di diffusione dovuta a interazione fra particelle incidenti e bersaglio in un certo intervallo dt di tempo, e con dN_a i casi possibili nello stesso intervallo di tempo

$$\sigma_b = \frac{dN}{dN_a} \frac{1}{n_b \Delta z} = \frac{dN}{dN_a} \frac{1}{\delta_s} \quad (7.12)$$

La dimensione fisica della sezione d'urto è dunque quella di un'area, tipicamente indipendente dalla geometria del modo in cui è eseguita la misura. Sperimentalmente, per garantire quanto più possibile il rispetto della condizione che non vi siano sezioni d'urto associate a centri diffusori nell'ombra di quelle associate ad altri centri diffusori dello stesso bersaglio, e per evitare urti multipli delle particelle incidenti con diversi centri diffusori, si cerca di realizzare bersagli il più sottili possibile.

Negli esperimenti di fisica nucleare e sub-nucleare i valori misurati delle sezioni d'urto sono dell'ordine di 10^{-28} m^2 , ovvero 1 barn, o di suoi sottomultipli.

Quanto delineato per la sezione d'urto geometrica di reazione intesa come area associata alle particelle bersaglio, efficace a determinare l'interazione, anche se molto schematico rappresenta però una buona approssimazione dell'effettiva sezione d'urto di reazione. Come esempio valga il caso dell'urto fra protoni ad alte energie, dove l'estensione spaziale delle particelle è confrontabile con l'estensione del loro raggio d'interazione (forte)²

Si trova che la probabilità che due particelle o nuclei interagiscano dipende in realtà da svariati e anche molto complessi fattori, il più delle volte fra loro indipendenti, che non traspaiono chiaramente dal semplice approccio geometrico visto.

Spesso si osserva una forte dipendenza dall'energia in gioco, come ad esempio nel caso della cattura di neutroni termici da parte dell'uranio, processo per il quale la sezione d'urto varia di alcuni ordini di grandezza in un ristretto intervallo di valori d'energia.

Anche il tipo di interazione ha un ruolo importante: se ad esempio si considera il tasso d'interazione di particelle sostanzialmente puntiformi quali sono i *neutrini*, che interagiscono solo *debolmente* con il resto della materia³, lo si trova estremamente minore rispetto a quello degli *elettroni*, a loro volta assumibili a particelle puntiformi che però sentono anche l'interazione elettromagnetica.

²Si vedano ad esempio i risultati riportati in

³L'ordine di grandezza delle tipiche sezioni d'urto per l'interazione fra neutrini e materia è di 10^{-48} m^2 , ovvero 10^{-20} barn.

Sezione d'urto d'interazione

La sezione d'urto d'interazione efficace non dipende principalmente dalla geometria del processo d'urto coinvolto, ma piuttosto dalla forma, dall'intensità e dal raggio d'azione del potenziale d'interazione in gioco.

Essa può essere determinata dalla misura del tasso di reazione se sono noti il flusso delle particelle incidenti e la densità areale dei centri di diffusione, come espresso dalla [7.11](#)

In modo analogo a quanto fatto con la sezione d'urto geometrica si definisce una *sezione d'urto totale* di reazione σ_{Tot} come

$$\sigma_{Tot} = \frac{\text{numero di eventi di diffusione per unità di tempo}}{\text{part. inc. per unità di tempo} \times \text{centri diffusori per unità d'area}} \quad (7.13)$$

Proseguendo con l'analogia si possono anche introdurre una sezione d'urto σ_{el} per le reazioni *elastiche* e una σ_{anel} per quelle *anelastiche*, fra loro legate dalla relazione

$$\sigma_{Tot} = \sigma_{el} + \sigma_{anel} \quad (7.14)$$

Lunghezza di attenuazione

Si consideri ora il problema che sorge quando si ha la necessità di valutare l'intensità residua di un fascio incidente su un bersaglio spesso. Si supponga di avere un fascio di intensità iniziale I_0 incidente su un bersaglio spesso di densità $\rho \text{ kg} \times \text{m}^{-3}$. Sia z la lunghezza del percorso compiuto dalle particelle del fascio penetrate nel bersaglio e si voglia determinare l'intensità residua $I(z)$ del fascio in funzione di z . Si consideri un generico spessore infinitesimo di bersaglio compreso fra z e $z + dz$ e sia dR_i il numero totale di interazioni per unità di tempo fra particelle del fascio e centri diffusori del bersaglio nello spessore dz . La corrispondente variazione dell'intensità del fascio sarà dunque $dI(z) = -dR_i$.

Detta come in precedenza A l'area della sezione del bersaglio ortogonale alla direzione z , il flusso di particelle incidenti del fascio attraverso essa è dato da

$$\varphi_b(z) = \frac{I(z)}{A}$$

Ricordando il significato di sezione d'urto totale σ_{Tot} si ha quindi

$$dI(z) = -dR_i = -\sigma_{Tot} \varphi_b(z) dN_b = -\sigma_{Tot} \frac{I(z)}{A} n_b A dz$$

da cui

$$\frac{dI(z)}{I(z)} = -n_b \sigma_{Tot} dz$$

e infine

$$I(z) = I_0 e^{-n_b z \sigma_{Tot}} \quad (7.15)$$

Si definisce quindi la cosiddetta "lunghezza di attenuazione" L_{att} come la distanza percorsa dal fascio nel bersaglio, dopo la quale l'intensità del fascio stesso si è ridotta di un fattore $1/e$,

$$L_{att} = \frac{1}{n_b \sigma_{Tot}} \quad (7.16)$$

Luminosità

Un'altra grandezza utile è la "luminosità" \mathcal{L} , definita come il numero di urti potenziali nell'unità di tempo fra le particelle di un fascio incidente e i centri diffusori di un bersaglio, ovvero la quantità $\Phi_a \delta_s$. Dalla [7.11](#) si ha

$$\mathcal{L} = \Phi_a \delta_s = \frac{1}{\sigma_b} \frac{dN}{dt} \quad (7.17)$$

per cui la luminosità ha le dimensioni dell'inverso di un'area per l'inverso di un tempo: $[\mathcal{L}] = [m]^{-2} [s]^{-1}$.

Nel caso si tratti non di un fascio collidente contro un bersaglio fisso ma dell'interazione di due fasci, costituiti da successivi pacchetti di particelle⁴ equispaziati e portati a collidere l'uno contro l'altro in un anello di accumulazione la cui circonferenza sia lunga C , si definisce la luminosità secondo il seguente ragionamento: si supponga vi siano k pacchetti di particelle, circolanti ognuno con velocità di modulo v , e si indichino rispettivamente con N_a ed N_b i numeri di particelle presenti nei pacchetti circolanti in un verso e nel verso opposto. Opportuni campi magnetici li portano a collidere in un particolare punto della traiettoria circolare un numero pari a $(k v)/C$ volte al secondo. La luminosità risulta quindi essere

$$\mathcal{L} = \frac{(N_a N_b k v)/C}{A} \quad (7.18)$$

dove A rappresenta l'area della sezione retta del volume d'intersezione dei fasci in corrispondenza della zona in cui avviene l'urto.

Naturalmente la luminosità aumenta al migliorare della focalizzazione dei fasci entro un'area A che in questo caso appunto diminuisce in corrispondenza della zona d'interazione.

Si definisce anche la *luminosità integrata* come

$$\mathcal{L}_{int} = \int \mathcal{L} dt \quad (7.19)$$

Il numero $N(\Delta t)$ di interazioni osservabili in un certo intervallo di tempo Δt coincide quindi col prodotto fra la luminosità integrata nell'arco di tempo Δt e la relativa sezione d'urto totale σ_{Tot}

$$N(\Delta t) = \mathcal{L}_{int} \cdot \sigma_{Tot} \quad (7.20)$$

⁴Si veda il Cap. [2](#) sugli acceleratori.

Sperimentalmente si osserva in pratica sempre soltanto una frazione dei prodotti di tutte le interazioni che hanno luogo fra particelle incidenti e bersagli, e ciò per svariati motivi, spesso anche legati a difficoltà tecniche nel riuscire ad osservare contemporaneamente i prodotti di reazione emessi in ogni possibile direzione, o ad esempio per motivi di indisponibilità finanziaria a poter disporre strumenti di rivelazione adeguati in modo tale da coprire contemporaneamente tutte le possibili direzioni d'emissione dei prodotti di reazione. La luminosità è nondimeno un parametro qualificante fondamentale delle macchine acceleratrici.

Sezione d'urto differenziale

Spesso è importante poter distinguere i prodotti di reazione in funzione della loro direzione d'emissione e questo richiede di tassellare l'intero angolo solido di possibile emissione ($\Omega = 4\pi$) in sottoinsiemi $\Delta\Omega$ di cui si conosca l'orientazione dell'asse.

Facendo come esempio riferimento allo schema in figura 7.4, dove si ipotizza un fascio incidente su un bersaglio fisso rispetto al laboratorio, si chiami $\Delta\Omega \simeq A_D/r^2$ l'angolo solido sotteso da un rivelatore di area attiva A_D , posto a distanza r dal punto d'interazione, con $r \gg \sqrt{A_D}$. Il tasso di

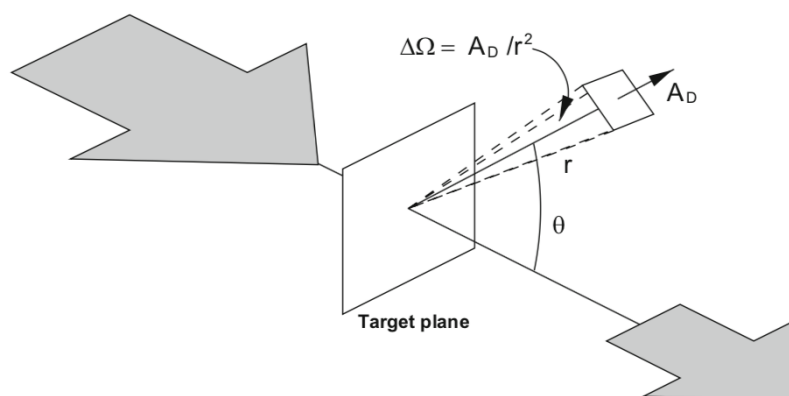


Figura 7.4: Sezione d'urto differenziale: solo le particelle diffuse entro l'angolo solido $\Delta\Omega$ sono poi raccolte dal rivelatore di area attiva A_D

reazioni visibili da questo rivelatore è allora proporzionale a quella che viene chiamata *sezione d'urto differenziale*

$$\frac{d\sigma(E, \vartheta, \varphi)}{d\Omega} \quad \text{con, in coord. polari sferiche} \quad d\Omega = \sin\vartheta \, d\vartheta d\varphi \quad (7.21)$$

in cui si è qui evidenziata anche la dipendenza dall'energia in gioco nel canale d'ingresso della reazione stessa

$$\frac{dN(E, \vartheta, \varphi, \Delta\Omega)}{dt} = \mathcal{L} \frac{d\sigma(E, \vartheta, \varphi)}{d\Omega} \Delta\Omega \quad (7.22)$$

Nel caso in cui il rivelatore utilizzato sia in grado di misurare anche l'energia E' delle particelle diffuse allora si può definire e misurare anche quella che viene chiamata *sezione d'urto doppiamente differenziale*, indicata con: $d^2\sigma(E, E', \vartheta, \varphi)/d\Omega dE'$.

La sezione d'urto totale σ_{Tot} si calcola quindi integrando la sezione d'urto doppiamente differenziale sull'intero angolo solido e su tutto lo spettro delle energie di diffusione

$$\sigma_{Tot}(E) = \int_0^{E'_{max}} \int_{4\pi} \frac{d^2\sigma(E, E', \vartheta, \varphi)}{d\Omega dE'} d\Omega dE' \quad (7.23)$$

La conoscenza della sezione d'urto differenziale di un processo che conduce un sistema dallo stato iniziale i allo stato finale f , permette di calcolare la probabilità di transizione nell'unità di tempo $dP_{i \rightarrow f}/dt$ associata ad ogni particella bersaglio

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dP_{i \rightarrow f}}{dt} \frac{V}{v_a} \quad (7.24)$$

essendo, $V = A \times \Delta z$ il volume efficace del bersaglio e v_a il modulo della velocità di ogni particella incidente.

A seconda del problema studiato, lo stato finale f può essere caratterizzato da diverse variabili associate alla particella diffusa. Una quantità tipicamente considerata è l'impulso \vec{p} della particella diffusa nello stato finale. In tal caso la sezione d'urto totale σ_{Tot} del processo si ottiene integrando la sezione d'urto differenziale $d\sigma/d\vec{p}$ su tutti i possibili valori di \vec{p}

$$\sigma_{Tot} = \int_f \frac{d\sigma}{d\vec{p}} d\vec{p} \quad (7.25)$$

La quantità $d\vec{p}$ può poi essere esplicitata in diverse coordinate, a seconda della migliore geometria in cui trattare il problema specifico

$$\begin{aligned} d\vec{p} &\equiv dp'_x dp'_y dp'_z && \text{cartesiane ortogonali} \\ &\equiv p'^2 dp' \sin\vartheta' d\vartheta' d\varphi' && \text{sferiche} \\ &\equiv p'_\perp dp'_\perp dp'_\parallel d\varphi' && \text{cilindriche} \end{aligned} \quad (7.26)$$

dove con i simboli " \parallel ", " \perp " e " φ " si intendono rispettivamente le coordinate assiale, radiale e angolare, come anche trattato nell'Appendice [D.1](#).

Sezione d'urto invariante

Il sistema di riferimento naturale per un processo d'urto è quello del centro di massa delle particelle che interagiscono, e può non coincidere col sistema di riferimento in cui si effettua la misura.

Le caratteristiche di un processo non devono del resto dipendere dal particolare sistema di riferimento scelto per la misura, infatti la sezione d'urto è definita sostanzialmente come una superficie ortogonale alla direzione del moto delle particelle incidenti, ed è quindi un invariante relativistico.

Ricordando le leggi di trasformazione delle variabili dal sistema del laboratorio al sistema del centro di massa, come riportato in Appendice [D.1](#), si può esprimere la sezione d'urto differenziale in funzione di variabili invarianti.

Le componenti dell'impulso si trasformano come indicato dalla [D.23](#) e quindi $d\vec{p}$ non è un invariante, come non lo è $d\vec{p}_{\parallel}$, mentre invece lo sono $d\vec{p}_{\perp}$ e $d\sigma$.

Il rapporto $d\vec{p}_{\parallel}/E$ è invariante, essendo $(E/c) = (p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2 + m^2 c^2)^{1/2}$,

$$\begin{aligned} dp'_{\parallel} &= \gamma (dp_{\parallel} - \beta dE) = \gamma dp_{\parallel} \left(1 - \frac{\beta p_{\parallel}}{E}\right) = \\ &= \frac{\gamma E - \beta \gamma p_{\parallel}}{E} dp_{\parallel} = \frac{E'}{E} dp_{\parallel} \end{aligned} \quad (7.27)$$

Di conseguenza la *sezione d'urto invariante*

$$E \frac{d\sigma}{d\vec{p}} \quad (7.28)$$

è indipendente dal sistema di riferimento scelto per effettuare la misura.

7.4 La sezione d'urto di Rutherford: approccio classico

Si consideri la deflessione di particelle cariche incidenti su un nucleo di carica totale Ze . Si supponga che le sole interazioni fra le particelle del fascio e il nucleo siano di tipo elettromagnetico, senza quindi l'intervento di interazioni forti come era invece stato per l'originale esperimento di Rutherford, Geiger e Mardsen. In quel caso un fascio di particelle α emesse da una sorgente radioattiva veniva fatto incidere su bersagli realizzati con sottili fogli d'oro e dopo le deflessioni subite, le particelle α venivano osservate e contate tramite i lampi di fluorescenza che provocavano su un piccolo schermo di solfuro di zinco accoppiato a un microscopio, come in figura 7.10. Le particelle del fascio potrebbero quindi essere costituite da elettroni o da

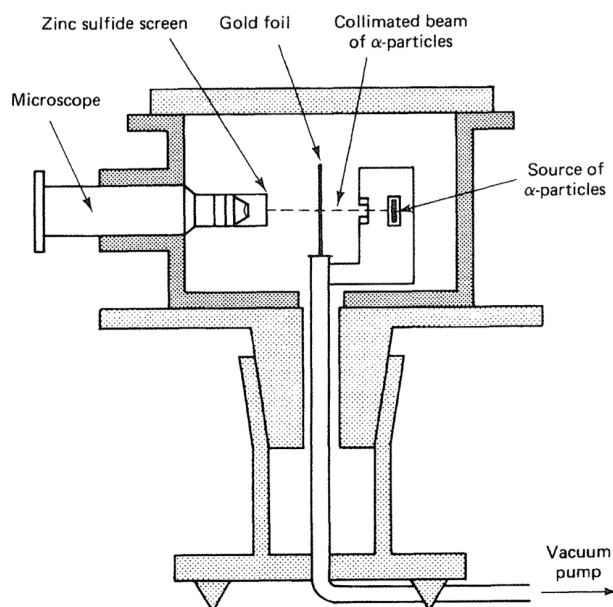


Figura 7.10: Schema dell'apparato utilizzato da H.W. Geiger e E. Mardsen per l'esperimento sulla diffusione delle particelle α da un bersaglio d'oro.

muoni. Supponendo ad esempio di utilizzare elettroni con impulso pari a $p = 200 \text{ MeV}/c$, la lunghezza d'onda di De Broglie ad essi associata $\lambda = \hbar/p$ è di circa 10^{-15} m .

Si affronta dapprima il problema con un approccio classico e si parte dal caso più semplice di un centro diffusore puntiforme di carica Z_2e e massa M , inizialmente a riposo nell'origine O di un sistema di riferimento (x, y, z) solidale con l'osservatore, cioè il sistema del laboratorio (SL), su cui incide un fascio monocinetico di particelle identiche, anch'esse puntiformi, ognuna di carica Z_1e e massa m ($m \ll M$) (per elettroni o muoni si ha ovviamente

$Z_1 = 1$), collimate lungo la direzione dell'asse z , come mostrato in figura 7.11. Il problema ha quindi una simmetria cilindrica in cui z è l'asse di simmetria. Si ipotizzi anche che la condizione $m \ll M$ sia tale da poter trascurare, dopo l'urto, il rinculo di M che quindi permarrà praticamente fermo in SL come se avesse massa ∞ . Nel caso della misura originale di Rutherford il rapporto fra le masse di proiettile e bersaglio è pari a circa 2×10^{-2} .

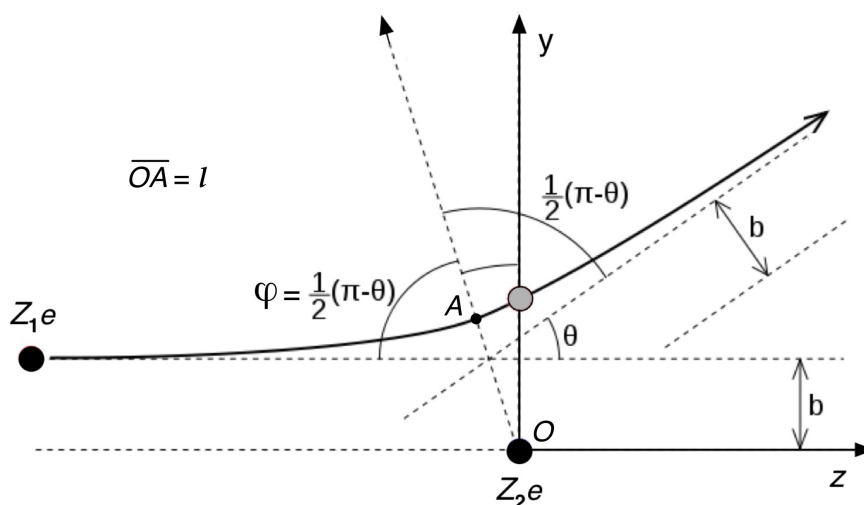


Figura 7.11: Diffusione alla Rutherford.

Sia $V = Z_2 e / (4\pi\epsilon_0 r)$ il potenziale generato dal centro diffusore carico e si consideri la generica particella del fascio incidente che a distanza infinita dal centro diffusore, quindi quando non ne sente ancora l'influenza e si ha $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$, percorre una traiettoria di avvicinamento con velocità di modulo v lungo una retta parallela all'asse z e distante b da esso. La quantità b è detta *parametro d'urto* e consiste nella distanza alla quale la particella incidente sarebbe passata dal centro diffusore in assenza di interazione.

Da un punto di vista classico il problema consiste nel determinare l'angolo ϑ di deflessione sulla traiettoria della particella in funzione di b , ovvero $\vartheta(b)$. Si procede determinando l'inverso, ovvero $b(\vartheta)$.

Il potenziale è di tipo centrale-kepleriano e sia $E_T = E_k + E_P$ l'energia totale a disposizione del sistema particella incidente e centro diffusore, essendo E_k l'energia cinetica ed E_P l'energia potenziale della particella incidente. La traiettoria assunta da questa è dunque una conica coincidente con un'ellisse se $E_T < 0$ e con un'iperbole se $E_T > 0$. Nel presente caso $E_T > 0$ dato che a distanza infinita, prima dell'urto, $V(r) = 0$ e $E_T = E_k = mv^2/2$; la traiettoria è quindi un'iperbole.

Si supponga, senza con ciò perdere in generalità nel risultato finale, che le

forze siano repulsive, ovvero che le cariche di proiettile e bersaglio abbiano segno concorde, per cui il proiettile può ad esempio essere un positrone o un muone positivo.

Applicando le conservazioni di momento angolare ed energia si ha che a distanza ∞ il momento angolare e l'energia valgono rispettivamente, mvb ed $mv^2/2$, mentre nel punto A di massimo avvicinamento valgono $mv_A l$ ed $mv_A^2/2 + Z_1 Z_2 e^2 / (4\pi\epsilon_0 l)$. Quindi

$$b = \frac{lv_A}{v} \quad , \quad v^2 = v_A^2 + \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 ml} \quad (7.62)$$

Si ponga

$$l_0 = \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E_k} \quad (7.63)$$

che fissata $E_k = mv^2/2$, corrisponde al punto di massimo avvicinamento possibile A^* per un urto centrale, per il quale è cioè $b = 0$. In A^* è ovviamente $v_{A^*} = 0$. Si ha dunque

$$v^2 = v_A^2 + v^2 \frac{l_0}{l} \quad (7.64)$$

Nel caso d'urto centrale la particella di carica $Z_1 e$ si avvicina al diffusore lungo l'asse z fino alla distanza minima l_0 corrispondente al punto A^* e poi inverte il moto risultando diffusa a un angolo π . Dalle relazioni precedenti si ha

$$v_A^2 = \frac{b^2}{l^2} v^2 \quad , \quad v_A^2 = v^2 \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) \quad , \quad b^2 = l^2 \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) \quad (7.65)$$

e dalle proprietà geometriche dell'iperbole

$$l = b \cotg \frac{\varphi}{2} \quad (7.66)$$

che sostituito nella terza delle [7.65](#) dà

$$\cotg^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{l_0}{b} \cotg \frac{\varphi}{2} - 1 = 0 \quad (7.67)$$

Moltiplicando la [7.67](#) per $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ e ricordando che

$$\sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \quad , \quad \cos \varphi = \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

si ha

$$l_0 = 2 b \cotg \varphi \quad (7.68)$$

Le relazioni fra gli angoli ϑ e φ desumibili dalla figura [7.11](#) danno

$$\vartheta + 2\varphi = \pi \quad , \quad \text{da cui:} \quad \cotg \varphi = \tg \frac{\vartheta}{2} \quad (7.69)$$

e dalle [7.63](#) e [7.68](#) si ottiene

$$b(\vartheta) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \cotg \frac{\vartheta}{2} \quad (7.70)$$

che è la relazione cercata.

Si indichi con n_0 il numero di particelle del fascio incidente che a distanza praticamente infinita dal centro diffusore attraversano l'unità di superficie del piano (x, y) nell'unità di tempo, ottenendo $dN = 2\pi n_0 b db$ per le particelle che sempre nell'unità di tempo, attraversano l'anello circolare fra b e $b + db$. Supponendo ora che il numero di particelle si conservi, che cioè quelle incidenti siano anche tutte e sole quelle diffuse, e considerando quelle diffuse nell'angolo solido compreso fra ϑ e $\vartheta + d\vartheta$ si ha, differenziando la [7.70](#)

$$|db(\vartheta)| = \left| \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} d \left(\cotg \frac{\vartheta}{2} \right) \right| = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \frac{d\vartheta}{2 \operatorname{sen}^2 \vartheta/2} \quad (7.71)$$

dove si prende il valore assoluto per tener conto del fatto che ϑ diminuisce all'aumentare di b .

Sostituendo ora in dN

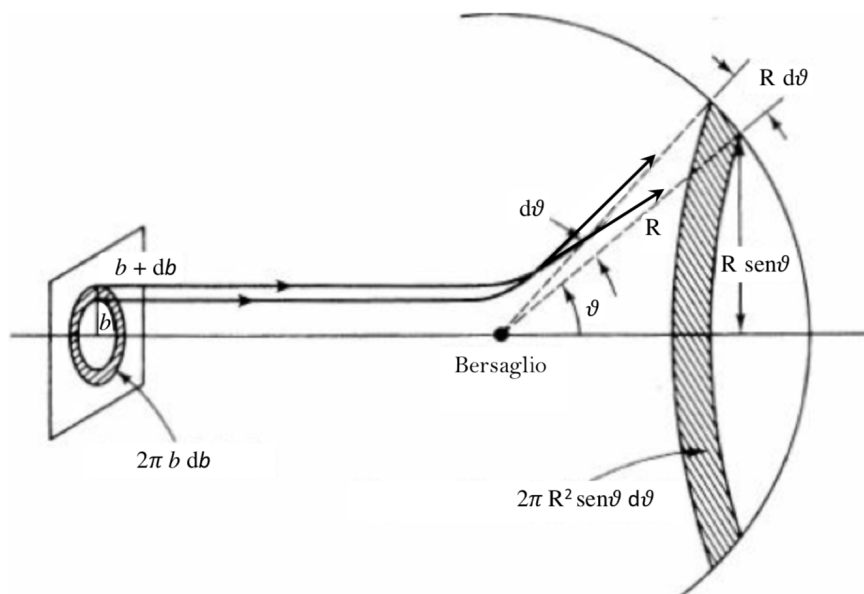


Figura 7.12: Geometria dell'interazione alla Rutherford.

$$dN(\vartheta) = 2\pi n_0 \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{\cotg \vartheta/2}{2 \operatorname{sen}^2 \vartheta/2} d\vartheta \quad (7.72)$$

Essendo $d\Omega(\vartheta) = 2\pi \operatorname{sen}\vartheta d\vartheta$ l'angolo solido nella simmetria cilindrica del problema si ottiene, per la sezione d'urto di diffusione coulombiana o di

Rutherford,

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} &= \frac{1}{n_0} \frac{dN(\vartheta)}{d\Omega(\vartheta)} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{\cotg\vartheta/2}{2 \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}^2\vartheta/2} = \\
&= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{\cos\vartheta/2}{2 \operatorname{sen}^3\vartheta/2 \cdot 2 \operatorname{sen}\vartheta/2 \cos\vartheta/2} = \\
&= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^4\vartheta/2}
\end{aligned} \tag{7.73}$$

Nell'approccio classico fin'ora seguito $d\sigma(\vartheta)/d\Omega$ rappresenta l'area attraversata a grande distanza dal centro diffusore dalle particelle poi diffuse entro l'angolo solido unitario centrato attorno all'angolo polare ϑ .

Si noti che $d\sigma(\vartheta)/d\Omega$ è indipendente dai segni delle cariche di proiettile e bersaglio e per piccoli angoli diverge come ϑ^{-4} . Ciò in quanto il potenziale coulombiano mantiene il proprio effetto anche a distanza ∞ e quindi anche particelle incidenti con grandi valori di b ne sentono l'effetto.

Il calcolo della sezione d'urto coulombiana totale, ottenuta integrando la $d\sigma(\vartheta)/d\Omega$ su tutto l'angolo solido dà, nelle ipotesi fin'ora fatte, un valore ∞ che non ha ovviamente senso fisico. Un approccio più realistico consiste nel tener conto che la forma di $V(r)$ non è effettivamente proporzionale ad $1/r$ per ogni distanza dal centro diffusore, infatti all'aumentare di b la reale costituzione dei bersagli fa sì che le particelle incidenti comincino a sentire sempre più efficacemente gli effetti delle altre parti costitutive i bersagli stessi, ovvero elettroni atomici e altre strutture cariche che schermano la carica Z_2e del diffusore.

Si veda ora come, sempre classicamente, si modifica il risultato se si tiene anche conto del fatto che la struttura geometrica del centro diffusore non è puntiforme ma occupa una zona estesa di spazio. Si supponga che tale zona abbia forma sferica di raggio r_0 . Per $b > r_0$ il teorema di Gauss assicura che il campo elettrico prodotto dalla carica Z_2e diffondente è lo stesso che si ha con la carica concentrata nel punto O . Se quindi $l_0 > r_0$, la traiettoria della particella incidente di carica Z_1e si svolge tutta esternamente alla regione in cui è distribuita la carica bersaglio, e di conseguenza la relazione fra b e ϑ resta invariata, da cui l'uguaglianza anche della $d\sigma(\vartheta)/d\Omega$. Se invece $l_0 < r_0$, che implica energie cinetiche che soddisfino la condizione $E_k > E_{k,0} = Z_1 Z_2 e^2 / (4\pi\epsilon_0 r_0)$, si deduce che l'effetto della spazialità della carica diffondente si percepisce soltanto per angoli di diffusione maggiori di un valore limite ϑ_0 definito dalla condizione

$$r_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \cotg \frac{\vartheta_0}{2} \tag{7.74}$$

L'osservazione sperimentale delle deviazioni a grandi angoli nella sezione d'urto differenziale misurata, confrontata con quanto previsto per diffusione da bersagli puntiformi, permette di stimare r_0 . Una valutazione dei risultati non può naturalmente prescindere dal tener conto anche delle dimensioni finite del proiettile.

Si consideri la classica misura di Rutherford, con fasci di particelle α incidenti su un bersaglio di ^{197}Au ; l'energia delle particelle α da decadimento radioattivo utilizzate raggiungeva valori massimi di poco inferiori agli 8 MeV, insufficienti a far sì che anche nelle condizioni geometriche di massimo possibile avvicinamento l_0 al nucleo bersaglio, cioè con parametro d'urto $b = 0$, potesse essere $l_0 \simeq r_0$. Rutherford questo lo aveva intuito e pensava giusta-

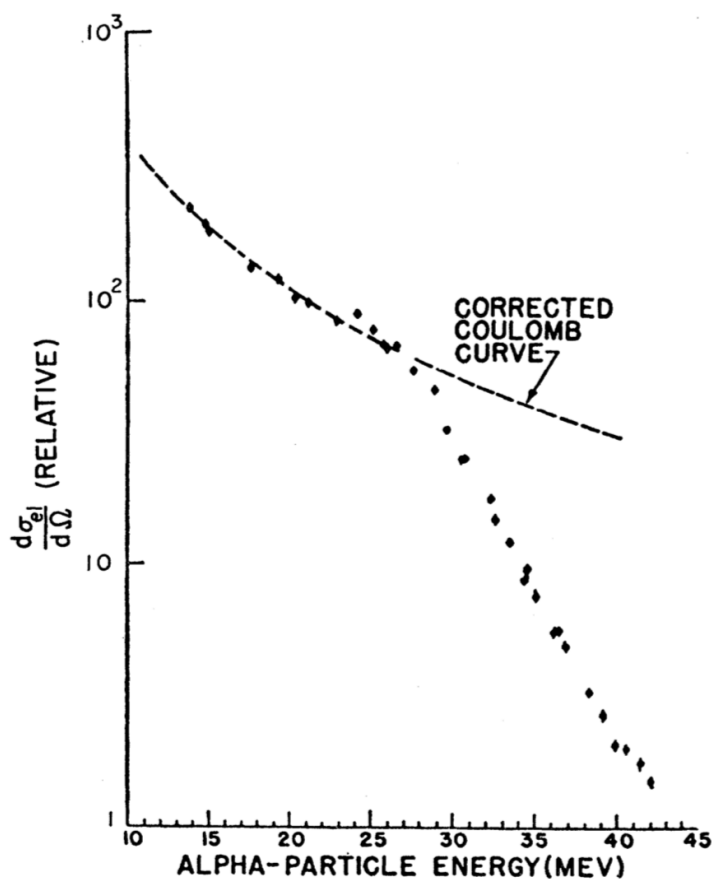


Figura 7.13: $d\sigma(\vartheta)/d\Omega$ della reazione $\alpha + ^{197}\text{Au}$, per $\vartheta = 60^\circ$ a energie crescenti. Oltre 27 MeV i dati si scostano dall'andamento coulombiano. Dalla [7.74](#) si stima r_0 . [Eisberg & Porter, Rev.Mod.Phys. 33 (1961) 190]

mente che l'effetto delle dimensioni nucleari si sarebbe dovuto manifestare, al crescere dell'energia cinetica delle α incidenti, con una deviazione della sezione d'urto da quella ottenuta considerando esclusivamente l'interazione

coulombiana.

Al crescere dell'energia le particelle α avrebbero dovuto infatti spingersi così vicine al nucleo da sentire efficacemente gli effetti dell'interazione nucleare, oltre a quelli puramente coulombiani.

Una verifica sperimentale richiedeva ovviamente di poter disporre di acceleratori in grado di produrre particelle α di energie crescenti fino e oltre a quelle di soglia per l'effetto, come mostrato in figura [7.13](#).

7.4.1 I risultati dell'esperimento di Rutherford

Le misure condotte da Geiger e Marsden sfruttando fasci di particelle α prodotti da sorgenti permisero di verificare inequivocabilmente tre aspetti fondamentali della formula di Rutherford: la dipendenza da Z^2 , quella da $E_{k,\alpha}^{-2}$ e quella da $(\sin\vartheta/2)^{-4}$. I dati da loro ottenuti, graficati nelle figure da [7.14](#) a [7.17](#), mostrano un eccellente accordo con le previsioni della formula. L'aspetto più notevole dell'esperimento di diffusione che condusse

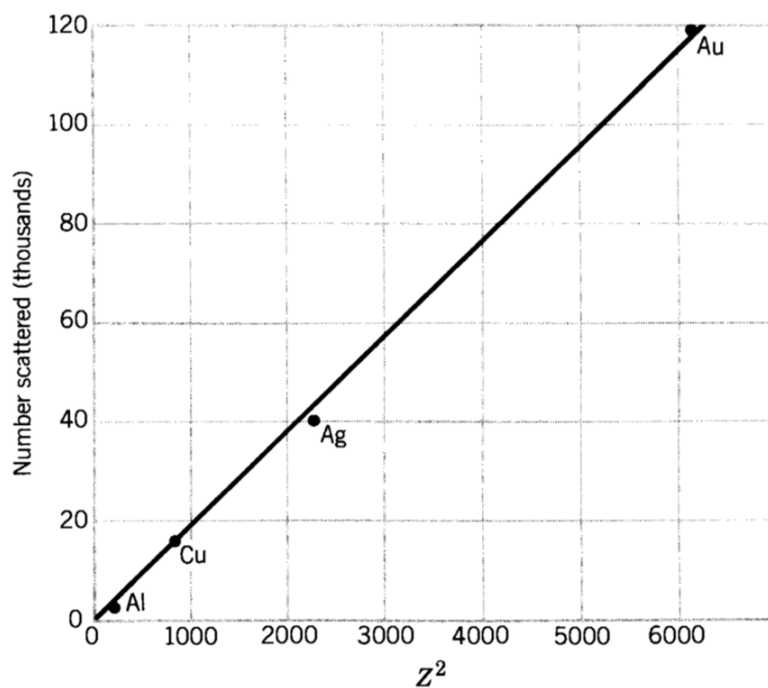


Figura 7.14: Dipendenza del rateo di diffusione dal quadrato del numero atomico Z del bersaglio. L'andamento conferma le previsioni della formula di Rutherford.

Rutherford a sviluppare la sua ipotesi di struttura atomica fu la frazione di particelle α diffuse ad angoli grandi, superiori a 90° . Considerando ad esempio un foglio d'oro dello spessore di 2.0×10^{-6} m su cui incidono α

da 8 MeV, che è circa la massima ottenibile da sorgenti, si ha che tutte le particelle α incidenti con un parametro d'urto $b \leq 14$ e che vengono deviate oltre 90° sono una frazione pari a 7.5×10^{-5} del totale, e si tratta di una quantità cospicua, giustificabile solo con l'ipotesi che vi siano nel bersaglio centri diffusori solidi e compatti. Si guardi ad esempio al caso di diffusione

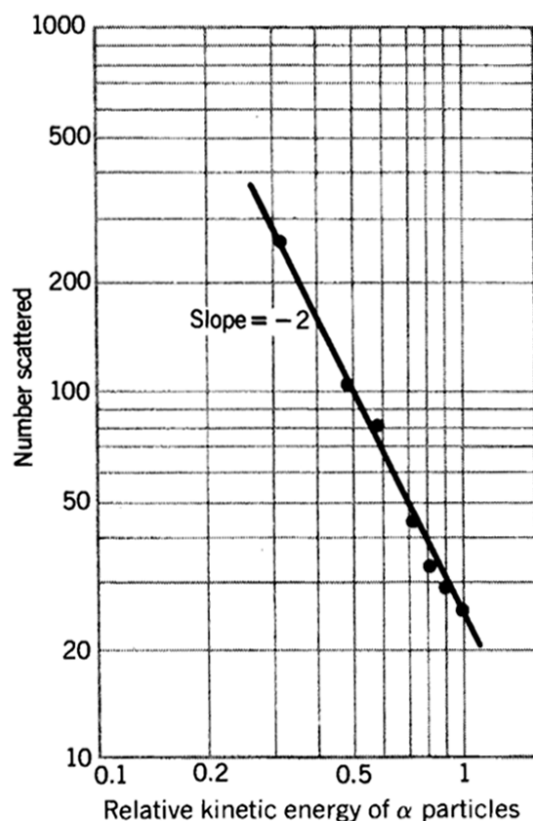


Figura 7.15: Dipendenza del rateo di diffusione dall'energia cinetica per particelle α incidenti su un bersaglio sottile. L'andamento conferma le previsioni della formula di Rutherford.

a piccoli angoli prodotta da un bersaglio quale il foglio d'oro considerato, con circa 12×10^{18} nuclei/cm², che significa una spaziatura media di circa 3×10^{-12} m fra nucleo e nucleo in direzione trasversale rispetto all'asse del fascio. Ciò implica che i 2/3 circa delle particelle α incidenti hanno un parametro d'urto $b \geq 10^{-12}$ m. L'angolo di diffusione associato a questo valore di b è di 1.6° , per cui si può affermare che l'angolo medio di diffusione è dell'ordine di $\vartheta_m \simeq 1^\circ$ o inferiore.

Una diffusione a grande angolo si giustifica quindi o con molte diffusioni di questo tipo, tutte volte coerentemente ad accrescere l'angolo totale, o con una singola diffusione ad angolo grande. Per osservare una diffusione ad un

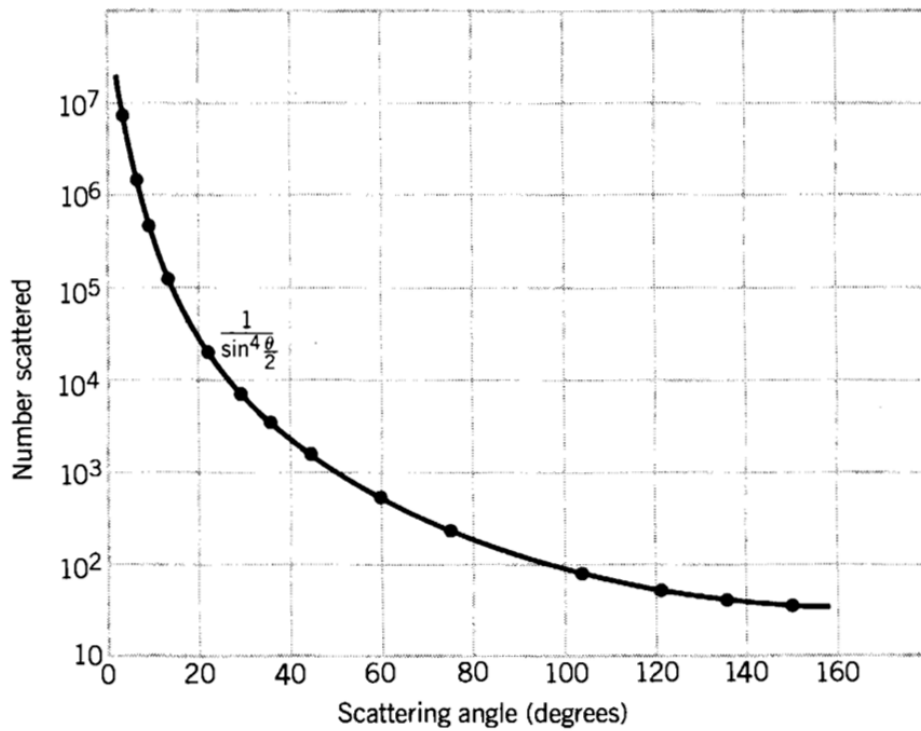


Figura 7.16: Dipendenza da ϑ del rateo di diffusione per un sottile bersaglio d'oro. L'andamento conferma le previsioni della formula di Rutherford.

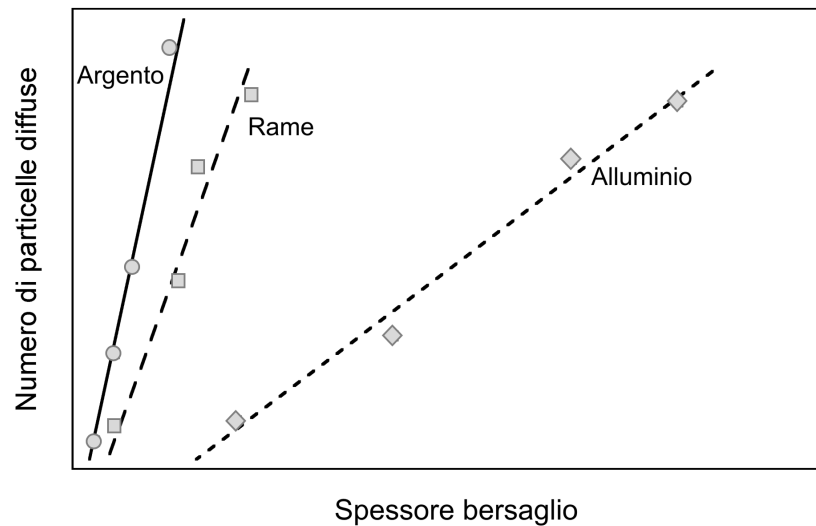


Figura 7.17: Dipendenza dallo spessore del bersaglio del rateo di diffusione. L'andamento lineare suffraga l'ipotesi del modello atomico di Rutherford.

angolo totale $N\vartheta_m$, come frutto di successive diffusioni a piccolo angolo, ne sono quindi necessarie circa N^2 .

Se si osserva il numero di particelle diffuse a un angolo prefissato $\vartheta > 1^\circ$ in corrispondenza a diversi valori dello spessore Δz del foglio di materiale bersaglio, ci si aspetta che la probabilità di osservare particelle diffuse vari proporzionalmente a $\sqrt{\Delta z}$ per effetto delle diffusioni multiple, mentre dovrebbe invece variare proporzionalmente a Δz nel caso di diffusioni singole, e ciò semplicemente in quanto la probabilità di subire singole deviazioni a grande angolo cresce in modo direttamente proporzionale al numero dei possibili bersagli in grado di produrre tali deviazioni, come si vede chiaramente dai dati sperimentali in figura [7.17](#).

7.5 Approccio quantistico al concetto di sezione d'urto

Il tasso di reazioni, fissate l'intensità del fascio incidente e la densità di centri diffusori nel bersaglio, dipende dalle proprietà del potenziale d'interazione e dal numero di stati finali accessibili alla reazione.

Il potenziale d'interazione può venir descritto tramite l'operatore Hamiltoniano \mathcal{H}_{int} . In una reazione il ruolo di questo potenziale è di trasformare la funzione d'onda ψ_i dello stato iniziale del sistema, nella funzione d'onda dello stato finale del sistema, ψ_f .

Il corrispondente *elemento della matrice di transizione*, detto anche *ampiezza di probabilità per la transizione*, è dato da

$$\mathcal{M}_{fi} = \left\langle \psi_f \left| \mathcal{H}_{int} \right| \psi_i \right\rangle = \int \psi_f^* \mathcal{H}_{int} \psi_i \, dV \quad (7.75)$$

dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio, ovvero in pratica a tutto il volume utile di normalizzazione. Concettualmente l'approccio è dunque equivalente a quanto visto per la trattazione dei decadimenti.

Per la determinazione del numero di stati finali disponibili, da cui anche dipende il tasso di reazione, si tenga conto che nello *spazio delle fasi*, lo spazio esadimensionale delle coordinate e degli impulsi, in accordo col principio di indeterminazione, ogni particella occupa un volume pari ad $h^3 = (2\pi\hbar)^3$.

Si consideri una particella diffusa entro un volume V con impulso di modulo compreso nell'intervallo fra p' e $p' + dp'$ ⁶. Ciò corrisponde, nello spazio degli impulsi, ad un guscio sferico con raggio minore p' , spessore dp' e volume pari a $4\pi p'^2 dp'$. Non considerando per ora processi che determinino modifiche dello stato di spin, si ottiene per il numero finale $dn(p')$ di stati disponibili

$$dn(p') = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi p'^2 dp' \quad (7.76)$$

Il volume V su cui normalizzare corrisponde al volume che contiene tutte le particelle incidenti durante il tempo t in cui hanno luogo gli urti, quindi

$$V = v_a t A = \frac{\Phi_a t}{n_a} = \frac{N_a}{n_a} \quad (7.77)$$

essendo A l'area della sezione retta del fascio incidente, v_a il modulo della velocità di ogni particella del fascio, N_a la totalità delle particelle nel fascio, Φ_a ed n_a l'intensità del loro flusso incidente e la loro densità, supposte uniformi, come detto precedentemente.

Ricordando che l'energia totale e l'impulso di una particella sono legate dalla relazione

$$dE' = v' dp' \quad (7.78)$$

⁶L'apice caratterizza qui la particella diffusa. Inoltre in questo paragrafo con p si intende il modulo del vettore impulso \vec{p} , e non il quadri-impulso.

dedotta in Appendice [D](#), si ha per la densità $\rho(E')$ degli stati finali nell'intervallo energetico dE'

$$\rho(E') = \frac{dn(E')}{dE'} = \frac{4\pi p'^2 V}{v' (2\pi\hbar)^3} \quad (7.79)$$

Il collegamento fra tasso di reazione, elemento della matrice di transizione e densità degli stati finali è dato dalla *seconda regola d'oro* di Fermi come per i decadimenti, dove il loro tasso è legato all'elemento della matrice di transizione e alla densità dei possibili stati finali.

Essa esprime qui il tasso di reazione W [7](#) per particella bersaglio (centro di diffusione) e per particella del fascio incidente, quindi la quantità

$$W = \frac{dN(E)/dt}{N_b N_a} \quad (7.80)$$

dove si è esplicitata, per le particelle del fascio che hanno interagito, l'eventuale dipendenza dall'energia E in gioco nel canale d'ingresso della reazione. Sostituendo quindi in base alle [7.10](#) e [7.77](#) si ottiene

$$W = \frac{dN(E)/dt}{N_b N_a} = \frac{\sigma v_a}{V} \quad (7.81)$$

Di conseguenza si ha, per la sezione d'urto

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar v_a} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rho(E') V \quad (7.82)$$

Se si conosce il potenziale d'interazione la [7.82](#) permette quindi di calcolare la sezione d'urto σ . Altrimenti si possono utilizzare i valori misurati della sezione d'urto σ e l'equazione [7.82](#) per calcolare l'elemento di matrice \mathcal{M}_{fi} .

La regola d'oro è anche alla base della spiegazione di processi spettroscopici e come visto di gran parte dei fenomeni di decadimento, e sono queste sue versatilità e applicabilità che hanno spinto Enrico Fermi a definirla *d'oro*! Nei casi in cui si tratta di decadimenti di particelle o nuclei instabili, eccitazioni di risonanze, transizioni fra diversi stati energetici, sia in ambito atomico che nucleare o particellare, la quantità W , le cui dimensioni sono $[t]^{-1}$, corrisponde come si è visto, all'inverso di una *vita media*

$$W = \frac{1}{\tau} \quad (7.83)$$

e la probabilità di transizione per unità di tempo può di conseguenza essere determinata direttamente, dalla misura della vita media τ o indirettamente, dalla *larghezza* in energia $\Delta E = \hbar/\tau$ della riga dello spettro identificativa dello stato.

⁷Il tasso di reazioni è stato introdotto nel paragrafo [7.1](#)

7.6 La sezione d'urto di Rutherford: approccio quantistico

Si affronta ora il calcolo quantistico della sezione d'urto differenziale per l'interazione coulombiana fra una particella incidente puntiforme di carica Z_1e e un bersaglio anche puntiforme di carica Z_2e .

Si supponga, come nell'approccio classico, di non tener conto degli spin delle particelle interagenti e si supponga nuovamente che il bersaglio abbia massa così grande se confrontata, a meno di c^2 , con le energie cinetiche dei proiettili incidenti, da poterne trascurare il rinculo. In tal caso si può utilizzare il tri-impulso e se Z_2e è piccolo, dunque se $Z_2\alpha \simeq Z_2/137 \ll 1$, il che equivale a dire che il potenziale agente non è troppo intenso, ci si trova nelle condizioni di poter applicare l'approssimazione perturbativa di Born. In tal caso l'effetto del potenziale a distanza ∞ è trascurabile e quindi le particelle del fascio incidente, nei loro stati iniziale e finale, sono praticamente considerabili come libere; le funzioni d'onda che le rappresentano sono quindi autofunzioni dell'impulso, cioè onde piane

$$\psi_i(\vec{p}_i, \vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}_i \cdot \vec{r}/\hbar} \quad , \quad \psi_f(\vec{p}_f, \vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}_f \cdot \vec{r}/\hbar} \quad (7.84)$$

Le difficoltà eventualmente connesse alla normalizzazione delle funzioni d'onda possono essere superate considerando un opportuno volume finito V , che sia sufficientemente grande rispetto alla zona direttamente coinvolta nel processo d'urto tanto da poter confondere gli stati di energia discreta presenti in esso con un quasi continuo di stati. Le dimensioni di V devono essere inoltre tali da comprendere anche materia e strutture circostanti il volume strettamente legato al processo d'interazione, così da poter considerare uno schermaggio conseguente efficace della carica Z_2e del bersaglio verso ogni particella incidente/deflessa oltre una certa distanza. Il risultato finale non deve inoltre dipendere da tale volume V .

Preso un fascio di particelle incidenti con densità n_a particelle per unità di volume e scelto come detto sufficientemente grande il volume d'integrazione, si ha per la condizione di normalizzazione

$$\int_V |\psi_i(\vec{p}_i, \vec{r})|^2 dV = n_a V \quad \text{con} \quad V = \frac{N_a}{n_a} \quad (7.85)$$

dove N_a rappresenta la totalità delle particelle a del fascio che hanno inciso sul bersaglio. V è quindi un ben preciso volume di normalizzazione che va opportunamente scelto per ogni singolo fascio incidente; si indichino con $R \propto V^{1/3}$ le dimensioni lineari caratterizzanti tale volume.

In accordo con la relazione [7.81](#) si ha che il tasso W di interazioni è dato dal prodotto della sezione d'urto σ con il modulo v_a della velocità di ogni particella incidente, diviso per il volume V . Applicando quindi la regola

d'oro di Fermi

$$\frac{\sigma v_a}{V} = W = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2 \frac{dn}{dE_f} \quad (7.86)$$

dove E_f rappresenta l'energia totale, cinetica più equivalente in massa, dello stato finale. Poichè si considera un problema d'urto elastico, non avendo supposto alcun assorbimento d'energia da parte del bersaglio (ad esempio rinculo) o trasformazioni massa/energia, ne consegue $dE_f = dE' = dE$.

Dato inoltre che si trascura l'effetto del potenziale per gli stati iniziale e finale a grande distanza dal centro diffusivo, ne consegue che si conservano i moduli degli impulsi, ovvero $|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$. Il solo effetto della diffusione da parte del potenziale coulombiano si risolve quindi in una deflessione di un angolo ϑ fra i due impulsi iniziale e finale della particella incidente. La

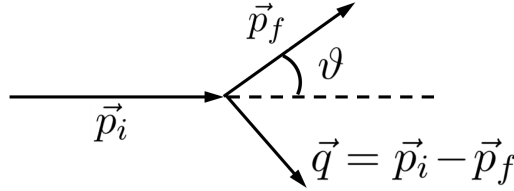


Figura 7.18: Relazione fra \vec{p}_i e \vec{p}_f conseguente al processo di diffusione.

densità nello spazio delle fasi degli stati finali possibili è data da

$$dn(|\vec{p}_f|) = \frac{4\pi |\vec{p}_f|^2 V}{(2\pi\hbar)^3} d|\vec{p}_f| \quad (7.87)$$

e conseguentemente la sezione d'urto per la diffusione di una particella incidente entro l'elemento $d\Omega$ di angolo solido è data da

$$d\sigma \frac{v_a}{V} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2 \frac{|\vec{p}_f|^2 V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d|\vec{p}_f|}{dE_f} d\Omega \quad (7.88)$$

Per energie molto alte delle particelle incidenti si può porre $v_a \simeq c$ e anche $|\vec{p}_f| \simeq E_f/c$, da cui

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 E_f^2}{4\pi^2 c^4 \hbar^4} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2 \quad (7.89)$$

L'Hamiltoniano d'interazione per una particella incidente di carica $Z_1 e$ ha in questo caso la forma $\mathcal{H}_{int} = Z_1 e \cdot \Phi(r)$, con

$$\Phi(r) = \frac{Z_2 e}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (7.90)$$

L'elemento della matrice di transizione è quindi

$$\begin{aligned}\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle &= \mathcal{M}(\vec{p}_f, \vec{p}_i) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int \frac{e^{-i\vec{p}_f \cdot \vec{r}/\hbar} e^{i\vec{p}_i \cdot \vec{r}/\hbar}}{r} d_3x = \\ &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar}}{r} d_3x = \mathcal{M}(\vec{q})\end{aligned}\quad (7.91)$$

dove $\vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f$ è l'impulso trasferito. Si ha: $|\vec{p}_f| = |\vec{p}_i| = |\vec{p}|$, e $(1 - \cos\vartheta) = 2 \sin^2\vartheta/2$, quindi

$$|\vec{q}|^2 = |\vec{p}_i|^2 + |\vec{p}_f|^2 - 2|\vec{p}_i||\vec{p}_f|\cos\vartheta = 2|\vec{p}|^2(1 - \cos\vartheta) = 4|\vec{p}|^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2} \quad (7.92)$$

Si calcola l'integrale nella [7.91](#) passando a coordinate polari⁸ e si ottiene

$$\int \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar}}{r} d_3x = 4\pi \left(\frac{\hbar}{q}\right)^2 \int_0^\infty \text{sen}x \, dx \quad (7.94)$$

L'integrando mostra infinite oscillazioni della medesima ampiezza, quindi l'integrale non converge. Per ottenere qualcosa di sensato bisogna definirlo in modo da tener conto del significato fisico del problema. L'origine della divergenza risiede nel fatto che per il potenziale si è usato l'andamento proporzionale ad r^{-1} fino a distanza ∞ , ma come si è già osservato ciò non ha significato fisico in quanto, indipendentemente dalle dimensioni dell'apparato sperimentale, vi sarà sempre una distanza a partire dalla quale le strutture fisiche presenti schermano il potenziale. Quindi bisogna tenerne conto facendo in qualche modo tendere a zero il potenziale molto più rapidamente di r^{-1} , oltre una opportuna distanza $R \propto V^{1/3}$ che al termine del calcolo verrà fatta tendere ad ∞ .

Si realizza ciò considerando un potenziale di tipo Yukawa, ovvero della forma $\Phi(r) = e^{-\lambda r}/r$, dove $\lambda \sim 1/R$ rappresenta una quantità piccola che si farà alla fine tendere a 0. Si ha così

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda x} \text{sen}x \, dx &= \frac{1}{2i} \int_0^\infty [e^{(i-\lambda)x} - e^{-(i+\lambda)x}] \, dx = \\ &= -\frac{1}{2i} \left(\frac{1}{i-\lambda} + \frac{1}{i+\lambda} \right) = \frac{1}{1+\lambda^2} \quad \text{con,} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{1+\lambda^2} = 1\end{aligned}\quad (7.95)$$

⁸Si prende come angolo polare α quello fra \vec{q} ed \vec{r} e:

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar}}{r} d_3x &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \text{sen}\alpha \, d\alpha \int_0^\infty r^2 \frac{e^{iqr \cos\alpha}}{r} dr = \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\alpha) \int_0^\infty r^2 \frac{e^{iqr \cos\alpha}}{r} dr = 2\pi \int_0^\infty r \frac{\hbar}{iqr} (e^{iqr/\hbar} - e^{-iqr/\hbar}) dr = \\ &= 4\pi \left(\frac{\hbar}{q}\right)^2 \int_0^\infty \text{sen}x \, dx \quad \text{posto,} \quad x = qr/\hbar.\end{aligned}\quad (7.93)$$

Si ottiene dunque, per l'elemento della matrice di transizione

$$\mathcal{M}(\vec{q}) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} 4\pi \left(\frac{\hbar}{|\vec{q}|} \right)^2 = \frac{Z_1 Z_2 e^2 \hbar^2}{\epsilon_0 V |\vec{q}|^2} \quad (7.96)$$

da cui infine la sezione d'urto

$$\begin{aligned} \sigma(\vartheta) &= \frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{V^2 E'^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} |\mathcal{M}(\vec{q})|^2 = \frac{E_f^2}{(2\pi)^2 c^4} \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{\epsilon_0^2 |\vec{q}|^4} \\ &= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4E_f^2}{p^4 c^4} \frac{1}{\text{sen}^4 \vartheta/2} \end{aligned} \quad (7.97)$$

Se si considera ora il limite relativistico di questo risultato, ovvero si assume $E_f \simeq pc$, si ha

$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} \simeq \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_f} \right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4 \vartheta/2} \quad (7.98)$$

Se invece ci si pone nel limite non relativistico, per cui $E_k = p^2/(2m)$ ed $E_f \approx mc^2$, allora il termine $4E_f^2/(pc)^4$ si approssima con $1/E_k^2$, per cui la sezione d'urto diventa

$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} \simeq \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4 \vartheta/2} \quad (7.99)$$

con lo stesso risultato ottenuto nell'approccio classico, e ciò non dipende dall'aver utilizzato l'approssimazione di Born, in quanto si può dimostrare che il risultato vale per tutti gli ordini perturbativi. A corroborare la coincidenza fra risultato classico e quantistico c'è anche il fatto che la [7.97](#) non contiene alcun termine "quantistico", ovvero \hbar .

Fattore di forma

Si veda ora la trattazione quantistica nel caso in cui si consideri la carica diffondente $Z_2 e$ non puntiforme ma distribuita con simmetria sferica. Il potenziale, conglobando in esso anche la carica $Z_1 e$ della particella incidente, è esprimibile come

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' \quad (7.100)$$

con $\int \rho(\vec{r}') d\vec{r}' = 1$, ricordando che $|\vec{r} - \vec{r}'|$ è invariante per traslazione, e dove l'integrale si intende esteso a tutto il volume V' contenente le cariche

bersaglio.

La matrice di transizione diventa in questo caso, ponendo $\vec{D} = \vec{r} - \vec{r}'$,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\vec{q}) &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} d\vec{r} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' \\ &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{D}/\hbar}}{D} d\vec{D} \int \rho(\vec{r}') e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'/\hbar} d\vec{r}'\end{aligned}\quad (7.101)$$

Essa è quindi espressa come prodotto di tre fattori: il secondo corrisponde al primo dei due integrali e come visto, vale $4\pi(\hbar/|\vec{q}|)^2$; il terzo, indicato con $F(\vec{q})$, coincide con la *trasformata di Fourier* della distribuzione della densità di carica elettrica

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}') e^{\frac{i\vec{q}\cdot\vec{r}'}{\hbar}} d\vec{r}' \quad (7.102)$$

$F(\vec{q})$ è detto *fattore di forma* della distribuzione di carica elettrica.

La normalizzazione della distribuzione di carica dá

$$F(0) = \int \rho(\vec{r}') d\vec{r}' = 1 \quad (7.103)$$

La sezione d'urto di diffusione coulombiana per una carica estesa si scrive dunque come

$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{4E_f^2}{(pc)^4} \frac{1}{\text{sen}^4 \frac{\vartheta}{2}} |F(\vec{q})|^2 \quad (7.104)$$

Il risultato trovato vale però ora solo in approssimazione di Born e non si mantiene se si includono gli ordini perturbativi più elevati.

Differentemente dal caso classico, in cui le sezioni d'urto da carica puntiforme e da carica estesa coincidevano per ogni angolo $\vartheta < \vartheta_0$, nel caso quantistico esse coincidono soltanto per $\vartheta = 0$, ovvero $|\vec{q}| = 0$ ⁹.

⁹Il motivo è nella natura quantistica del fenomeno. Clasicamente si possono definire contemporaneamente l'impulso \vec{p} e il parametro d'urto b . Quantisticamente fissare $v = v_z$ equivale all'aver anche fissato $v_x = v_y = 0$. Non si possono quindi più definire le componenti delle coordinate nel piano (x, y) , ovvero il parametro d'urto b che altro non è se non un vettore su tale piano. Fissata quindi la velocità \vec{v} , sono ammessi tutti i valori del parametro d'urto, quindi anche quelli per cui è $b < l_0$, corrispondenti a $\vartheta > \vartheta_0$.

7.8 La sezione d'urto di Mott

Si può verificare che tener conto anche dello spin porta, per la sezione d'urto da diffusione coulombiana, a un risultato, detto *sezione d'urto di Mott* che trascurando il rinculo del nucleo bersaglio, per l'interazione elettrone-nucleo si scrive

$$\frac{d\sigma_{Mott}(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{Ruth}(\vartheta)}{d\Omega} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right) \quad (7.109)$$

Al crescere della velocità del proiettile la sezione d'urto di Mott cala dunque più rapidamente di quella di Rutherford, con l'angolo ϑ di diffusione. Nei casi fortemente relativistici, in cui $\beta = v/c \rightarrow 1$, si ha

$$\frac{d\sigma_{Mott}(\vartheta)}{d\Omega} \simeq \frac{d\sigma_{Ruth}(\vartheta)}{d\Omega} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \quad (7.110)$$

La sezione d'urto $d\sigma_{Coul}(\vartheta)/d\Omega$ di diffusione coulombiana per una carica estesa va quindi scritta come

$$\frac{d\sigma_{Coul}(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{Mott}(\vartheta)}{d\Omega} |F(\vec{q})|^2 \quad (7.111)$$

La necessità del fattore aggiuntivo che la sezione d'urto di Mott introduce rispetto a quella di Rutherford può essere capita se si considera il caso limite della diffusione a π radianti. Nel caso in cui si abbiano particelle relativistiche, per le quali $\beta \rightarrow 1$, dall'equazione di Dirac si deduce che la proiezione del loro spin \vec{s} lungo la direzione del moto, rappresentata dal versore $\vec{p}/|\vec{p}|$, è una quantità che si conserva. In pratica come quantità che si conserva si introduce

$$H = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{s}| |\vec{p}|} \quad (7.112)$$

detta *elicità*. L'elicità vale +1 per particelle con spin orientato nel verso del moto e vale -1 per particelle con spin orientato in verso opposto al moto.

In figura 7.19 è mostrata una possibile configurazione di diffusione all'indietro, anche se non esattamente a π radianti, dove si è scelto come asse z di quantizzazione quello parallelo all'impulso \vec{p} dell'elettrone incidente.

Per la conservazione dell'elicità, la proiezione dello spin \vec{s} sull'asse z dovrebbe cambiare segno con l'urto, ma ciò è impossibile con un bersaglio di spin nullo, a causa della conservazione del momento angolare totale. Il momento angolare orbitale \vec{L} è infatti perpendicolare alla direzione z del moto e non può quindi determinare alcun cambiamento nella componente lungo z del momento angolare. Ciò significa che per particelle relativistiche la diffusione a π radianti dovrebbe essere totalmente soppressa.

Se invece il bersaglio possiede un valore non nullo di spin allora la proiezione dello spin dell'elettrone può essere modificata durante la diffusione a π radianti, in quanto la conservazione del momento angolare può trovare compensazione nel concomitante cambiamento della direzione dello spin del

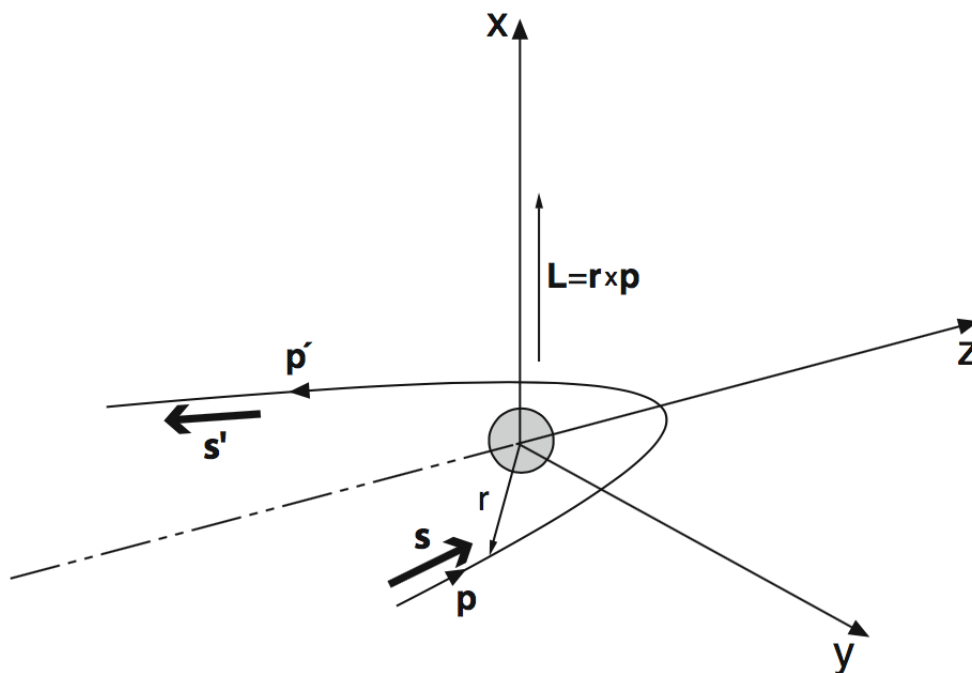


Figura 7.19: Diffusione a π radianti.

bersaglio. In questo caso la diffusione a π radianti è possibile.

Nel seguito, senza con ciò togliere generalità agli argomenti trattati, a meno di specificare diversamente si considereranno soltanto fattori di forma a simmetria sferica, relativi dunque a sistemi che non presentano direzioni preferenziali nello spazio. In tal caso i fattori di forma dipendono esclusivamente dall'impulso trasferito \vec{q} e per sottolinearlo si scriverà il fattore di forma come $F(\vec{q}^2)$.

7.9 Misure dei fattori di forma (elettrici)

La misura delle sezioni d'urto al variare di $|\vec{q}|$, che equivale a cambiare l'angolo ϑ o l'energia delle particelle incidenti, e quindi $|\vec{p}|$, permette di ricavare i valori dei fattori di forma per gli stessi valori di $|\vec{q}|$.

Interpolando i dati si può ricavare $F(\vec{q}^2)$ come funzione continua, e invertendola dedurre la distribuzione di carica. Invertire la trasformata di Fourier richiede però di conoscere $F(\vec{q}^2)$ per ogni valore di $|\vec{q}|$, da 0 ad ∞ .

L'energia massima sperimentalmente a disposizione è però finita e corrisponde all'energia cinetica E_k nel canale d'ingresso. I valori di $|\vec{q}|$ per cui si può misurare $F(\vec{q}^2)$ sono quindi limitati, per $\vartheta = \pi$, dalla condizione

$$|\vec{q}| \leq 2|\vec{p}| = 2\left(\frac{E_k^2}{c^2} + 2mE_k\right)^{1/2} \quad (7.113)$$

L'inversione della trasformata di Fourier richiede quindi un'estrapolazione sull'andamento di $F(\vec{q}^2)$ oltre l'intervallo in cui può essere fisicamente misurata. Si può ottenere un risultato per la distribuzione spaziale di carica per valori di r maggiori di $R \sim 2\pi\hbar/|\vec{q}|_{max}$, mentre i risultati per valori di $r < R$ dipendono dall'ipotesi fatta per estrapolare $F(\vec{q}^2)$ nel caso $|\vec{q}| \rightarrow \infty$.

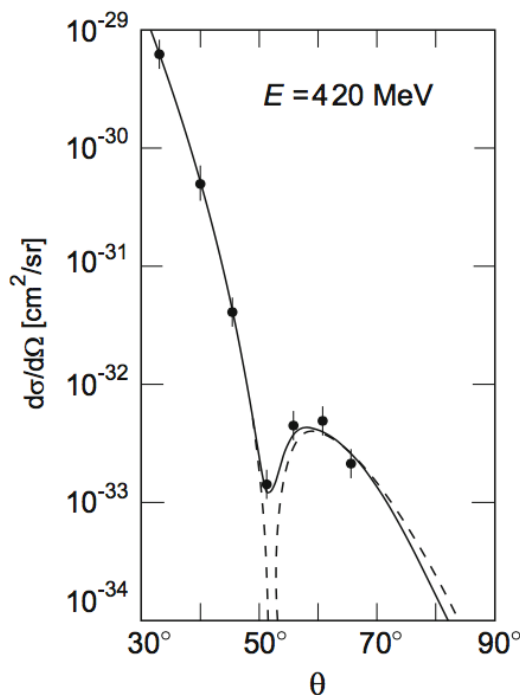


Figura 7.20: Sezione d'urto differenziale elastica dell'interazione di elettroni da 420 MeV su ^{12}C [R. Hofstadter - Ann.Rev.Nucl.Sci. 7 (1957) 231].

Le informazioni sul fattore di forma, quindi nello spazio degli impulsi, so-

no invece desumibili direttamente dai risultati sperimentali. R. Hofstadter condusse, a partire dal 1953, un'intensa campagna di misure di diffusione di elettroni su nuclei e nucleoni che gli valse il Nobel per la Fisica nel 1961. In figura [7.20](#) una delle prime misure di sezione d'urto differenziale elastica effettuata con elettroni da 420 MeV incidenti su un bersaglio di ^{12}C ; la linea tratteggiata è il risultato del calcolo effettuato immaginando onde piane incidenti su una distribuzione sferica e omogenea di carica con superficie diffusa, in approssimazione di Born, mentre invece la linea continua è il risultato di un fit sui dati sperimentali basato su un approccio in *phase-shift analysis*¹⁰. Si notino la sensibile diminuzione del valore della sezione d'urto al crescere di ϑ , proporzionale al termine $1/|\vec{q}|^4$ e l'andamento diffrattivo, con un minimo posizionato a $\vartheta \approx 51^\circ$, associato al fattore di forma. Nella tabella che segue sono riportati i fattori di forma calcolati per alcune specifiche forme analitiche della distribuzione di carica e in figura [7.21](#) ne sono illustrati gli andamenti.

Distrib. carica	$f(r)$	$F(\vec{q}^2)$	
Puntif.	$\delta(r)/4\pi$	1	Cost.
Espon.	$(a^3/8\pi) \cdot e^{-(ar)}$	$(1 + \vec{q}^2/a^2\hbar^2)^{-2}$	Dipol.
Gauss.	$(a^2/2\pi)^{3/2} \cdot e^{-(a^2r^2/2)}$	$e^{-(\vec{q}^2/2a^2\hbar^2)}$	Gauss.
Sfera omog.	$\begin{cases} 3/4\pi R^3 & \text{per } r \leq R \\ 0 & \text{per } r > R \end{cases}$	$\begin{cases} 3\alpha^{-3}(\text{sen}\alpha - \alpha\text{cos}\alpha) \\ \text{con } \alpha = \vec{q} R/\hbar \end{cases}$	Oscill.

In figura [7.22](#) sono mostrate la sezione d'urto differenziale per diffusione di elettroni da 757 MeV sull'isotopo ^{40}Ca , moltiplicata per un fattore 10, e quella sull'isotopo ^{48}Ca , divisa per un fattore 10. Ricordando il legame che in ottica c'è fra le dimensioni di un oggetto diffrangente, la lunghezza d'onda della luce diffratta e la posizione dei minimi di diffrazione, se si immagina che la distribuzione di carica d'un nucleo come un oggetto diffrangente si ha che dalla posizione dei minimi nell'andamento in funzione di ϑ della sezione d'urto, si possono dedurre informazioni sull'estensione spaziale dell'oggetto diffrangente.

Si ha infatti, detti λ la lunghezza d'onda di de Broglie associata alla particella incidente ed R il "raggio" della distribuzione di carica del nucleo

$$\frac{\lambda}{R} \approx \text{sen}\vartheta_{min} \quad (7.114)$$

¹⁰Si veda il capitolo ... su reazioni nucleari

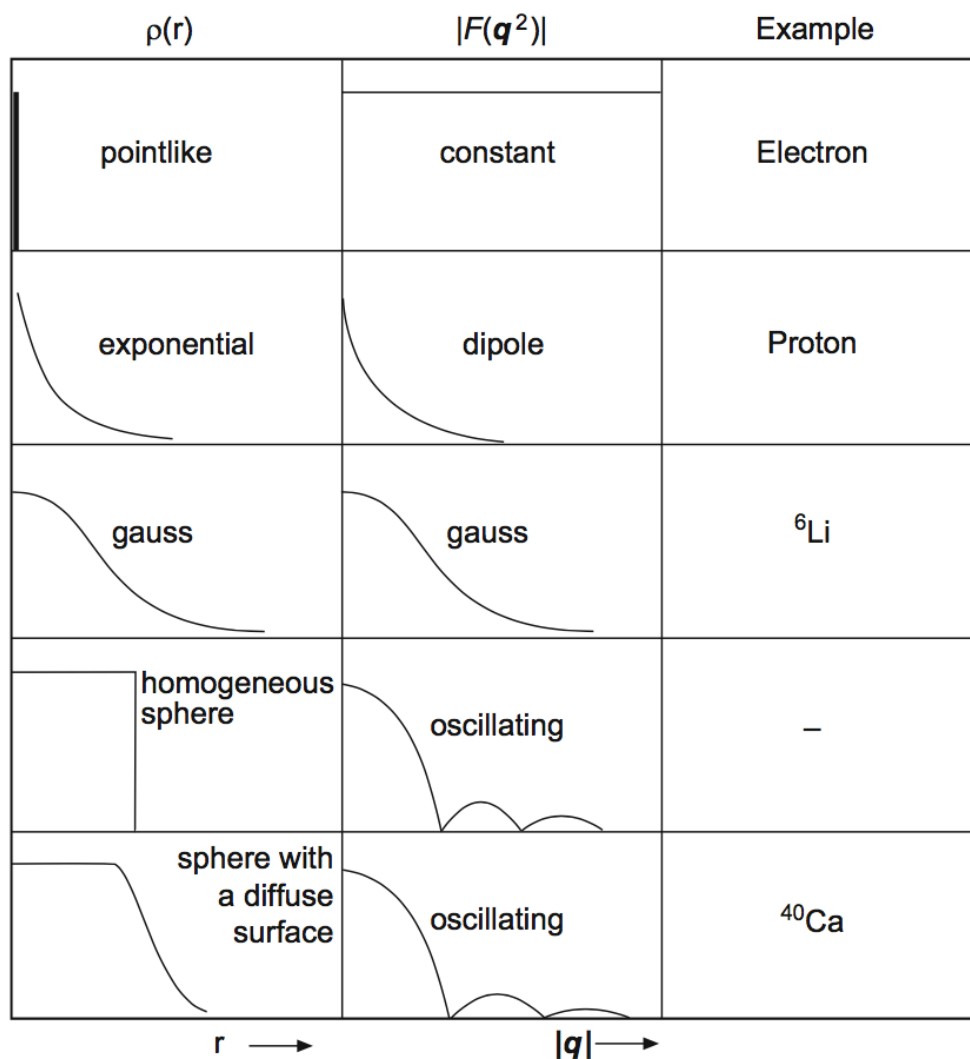


Figura 7.21: Alcuni fattori di forma per specifiche distribuzioni di carica. La diffusione da oggetti con la superficie più nettamente definita produce, come per la diffrazione della luce da una fenditura, un ben definito andamento di massimi e minimi diffrattivi per il fattore di forma.

e ricordando che $\lambda = 2\pi\hbar/|\vec{q}|$

$$R \approx \frac{2\pi\hbar}{|\vec{q}| \sin\vartheta_{min}} \quad (7.115)$$

I risultati delle esperienze di diffusione di elettroni con energie di alcune centinaia di MeV mostrano che in prima approssimazione la densità dei protoni nei nuclei si mantiene la stessa, indipendentemente dal variare di A , ed è sempre in prima approssimazione costante in ogni nucleo. Se ne deduce che

non ci sono zone *vuote* nei nuclei, come invece avviene per gli atomi, almeno alla scala dimensionale d'indagine di elettroni di queste energie che risolvono dimensioni dell'ordine di 10^{-15} m.

Inoltre il raggio quadratico medio della distribuzione di carica dei nuclei risulta crescere con A come $R = R_0 A^{1/3}$, con $R_0 \simeq 1.2$ fm, concordemente a quanto trovato con altri metodi. Interessanti risultati vengono anche da

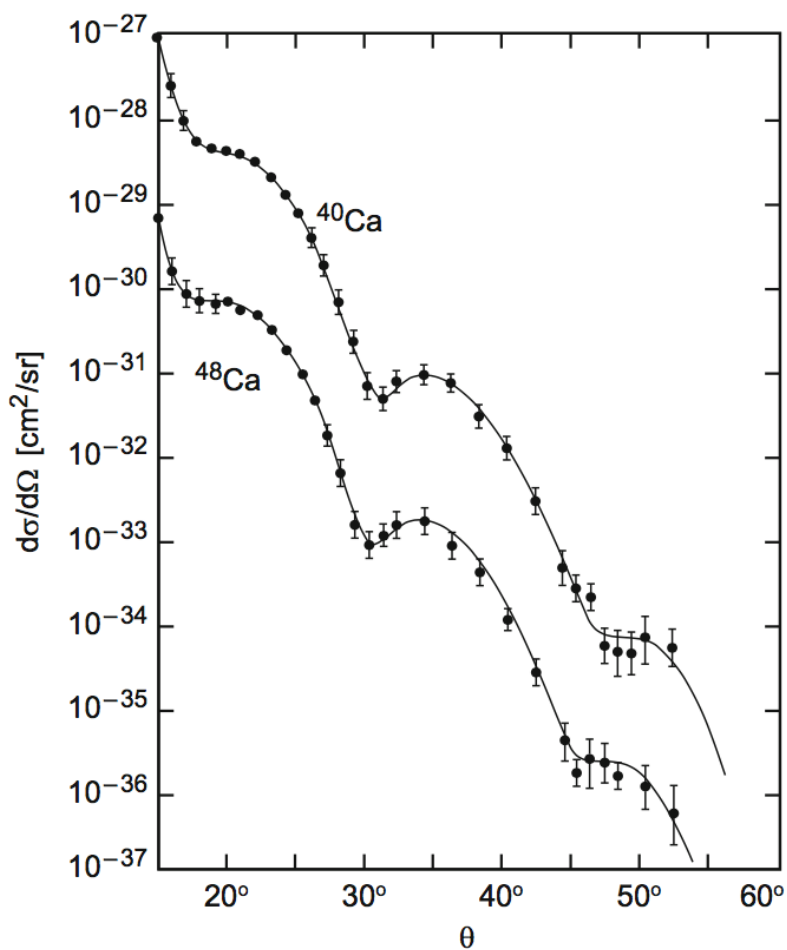


Figura 7.22: Sezioni d'urto differenziali per diffusione di elettroni da 757 MeV su ^{40}Ca , moltiplicata per 10, e su ^{48}Ca divisa per 10 [J.B. Bellicard et al. - Phys.Rev.Lett. 19 (1967) 527].

misure di sezioni d'urto differenziali per la diffusione elastica di altre particelle su nuclei, come ad esempio quelle di π^+ di circa 270 MeV/c su ^{12}C e ^{40}Ca , riportate in figura [7.23](#). Si osservi che in questa reazione il proiettile è sensibile anche all'interazione nucleare con tutti i nucleoni del nucleo, e non soltanto a quella elettrica con i protoni. Le posizioni angolari dei primi minimi della sezione d'urto differenziale sono anche in questo caso in accor-

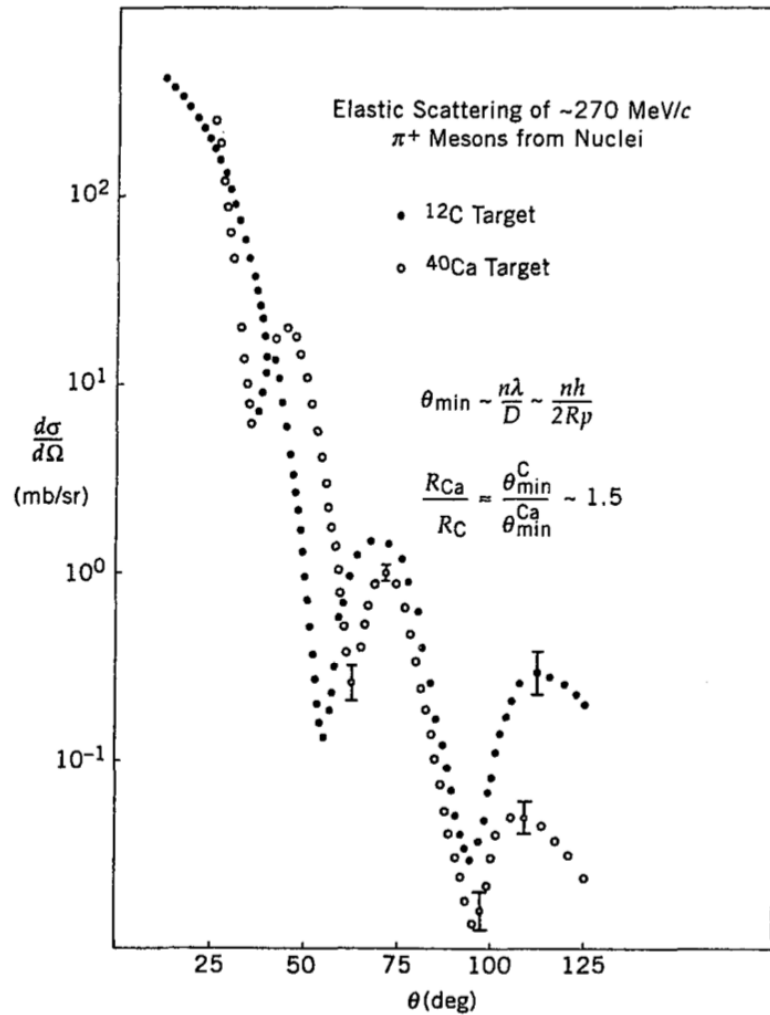


Figura 7.23: Sezione d'urto differenziale per π^+ da ~ 270 MeV/c, su ^{12}C e ^{40}Ca [C.H.Q. Ingram, Meson-Nuclear Phys. 1979, AIP Conf. proc. 54].

do con i valori dei raggi nucleari attesi in base alla relazione $R = R_0 A^{1/3}$, e anche i rapporti tra i valori angolari dei minimi per i due diversi bersagli scalano come i raggi dei due nuclei. Per i nuclei medio pesanti con $A \gtrsim 20$, la densità di carica che permette i migliori fit su molti dati sperimentali ha, come mostrato in figura 7.24, un andamento compatibile con la forma di Woods-Saxon¹¹, in figura 7.25

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-R)/a}} \quad (7.116)$$

¹¹R.D. Woods, D.S. Saxon, "Diffuse surface optical model for nucleon-nuclei scattering" - Phys.Rev. 95(1954) 577.

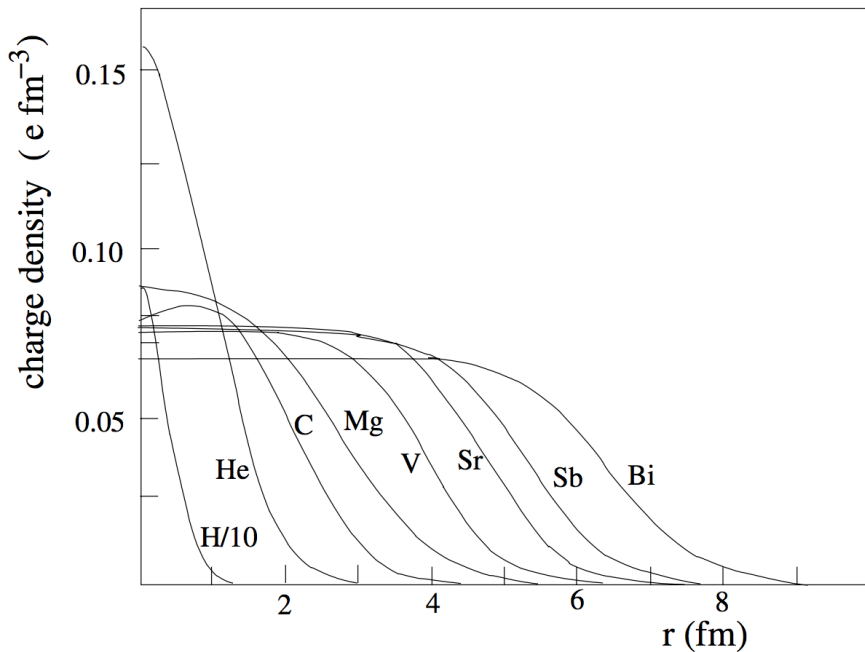


Figura 7.24: Distribuzione radiale di carica, misurata per alcuni nuclei.

dove a è un parametro che tiene conto dello *spessore* della superficie nucleare, e $\rho_0 \simeq 0.17$ nucleoni/ fm^3 è una costante di normalizzazione che rappresenta la densità nucleonica media in un nucleo. La distribuzione di

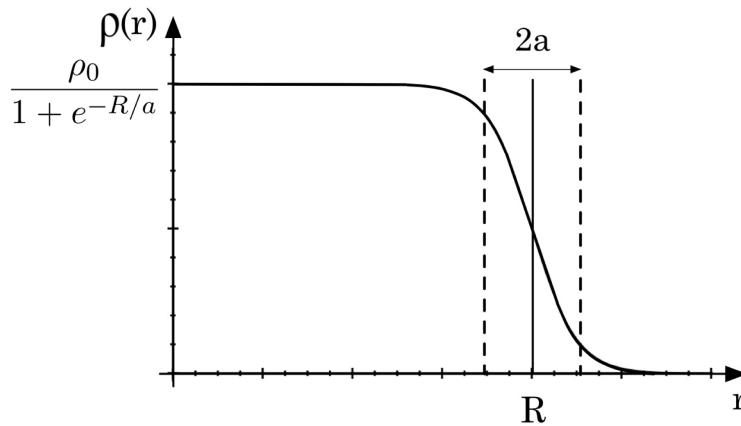


Figura 7.25: Distribuzione di Wood-Saxon.

Wood-Saxon permette di descrivere abbastanza bene le proprietà medie dei nuclei e concerne la distribuzione di carica dei nuclei nel loro stato fondamentale.

I nuclei eccitati possono modificare significativamente e rapidamente nel

tempo la propria forma, dove "rapidamente" va inteso su una scala temporale dell'ordine dei 10^{-23} s.

All'inizio di questo capitolo si è cominciato col parlare di reazioni nucleari, ovvero interazioni fra proiettili e bersagli che possono portare alla modifica di molti parametri dello stato finale di almeno uno dei due o di entrambi, ma finora si sono praticamente considerate soltanto modifiche dei parametri cinematici di proiettile e bersaglio dovute all'azione dell'interazione coulombiana.

Molti risultati indicano oltretutto che la materia in un nucleo sia distribuita in modo simile, sia che si tratti di componenti carichi (protoni), o di componenti neutri (neutroni).

Un'indagine più diretta e completa degli effetti della presenza dell'interazione nucleare ha richiesto di effettuare esperimenti con proiettili sia carichi che neutri e in condizioni cinematiche che mettano in evidenza il ruolo dell'interazione nucleare.

Per capire come ciò sia stato affrontato, sia dal punto di vista sperimentale che interpretativo, e i principali risultati ottenuti, si vedranno ora alcuni richiami di quell'ampio e ancora vivace capitolo delle "reazioni nucleari".