

Esercizio: Fattore di forma elastico per un nucleo

Si consideri un nucleo con una distribuzione di carica sferica uniforme, $\rho(\vec{r}) = \rho(r) = 3/4\pi R^3$, per $r \leq R$ e $\rho(\vec{r}) = \rho(r) = 0$ per $r > R$, con $R = 2 fm$. Assumendo che la sensibilità sperimentale al raggio finito del nucleo si possa esprimere come una deviazione del 5 % del fattore di forma elastico dall'unità, si determini, nell'ipotesi di processi d'urto fra elettroni e nucleo, per quale impulso minimo si raggiunge tale sensibilità.

Si esprima il fattore di forma

$$F(q) = \int \rho(\vec{r}) e^{\frac{i\vec{q} \cdot \vec{r}}{\hbar}} d\vec{r}$$

tenendo conto della simmetria della distribuzione di carica e si assuma che $qR \ll \hbar$, per cui il fattore di forma stesso si può ricondurre a un'opportuna approssimazione.

Così facendo che peso avrebbe il successivo termine d'approssimazione trascurato ?

Soluzione

Per la supposta simmetria sferica della distribuzione di carica nel nucleo, ovvero $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$, integrando l'espressione del fattore di forma sugli angoli si ottiene

$$\begin{aligned}
\int \rho(\vec{r}) e^{\frac{i\vec{q} \cdot \vec{r}}{\hbar}} d\vec{r} &= \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \text{sen}\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} e^{\frac{i|\vec{q}|r\cos\vartheta}{\hbar}} \rho(r) d\varphi = \\
&= 2\pi \int_0^\infty \rho(r)r^2 dr \int_{-1}^1 e^{\frac{i|\vec{q}|r\cos\vartheta}{\hbar}} d(\cos\vartheta) = \left(\text{con } y = \frac{i|\vec{q}|r\cos\vartheta}{\hbar} \right) \\
&= 2\pi \int_0^\infty \frac{\hbar \rho(r)}{i|\vec{q}|r} r^2 dr \int_{\frac{-i|\vec{q}|r}{\hbar}}^{\frac{i|\vec{q}|r}{\hbar}} e^y dy \\
&= 4\pi \int_0^\infty \rho(r)r^2 \frac{e^{\frac{i|\vec{q}|r}{\hbar}} - e^{\frac{-i|\vec{q}|r}{\hbar}}}{2i|\vec{q}|r/\hbar} dr \\
&= 4\pi \int_0^\infty \rho(r)r^2 \frac{\text{sen}(|\vec{q}|r/\hbar)}{|\vec{q}|r/\hbar} dr = 4\pi \int_0^\infty \rho(r)r^2 \frac{\text{sen}(qr/\hbar)}{qr/\hbar} dr
\end{aligned}$$

Per l'approssimazione indicata si ha $qr < qR \ll \hbar$ e di conseguenza si può espandere il seno in serie di Taylor fino al secondo termine non nullo

$$\frac{\text{sen}(qr/\hbar)}{qr/\hbar} = \frac{1}{qr/\hbar} \left[qr/\hbar - \frac{(qr/\hbar)^3}{6} + \dots \right] = 1 - \frac{(qr/\hbar)^2}{6} + \dots$$

Sostituendo si ottiene, per il fattore di forma

$$F(q) = 4\pi \int_0^R \frac{3}{4\pi R^3} \frac{\text{sen}(qr/\hbar)}{qr/\hbar} r^2 dr \simeq \frac{3}{R^3} \int_0^R \left[1 - \frac{(qr/\hbar)^2}{6} \right] r^2 dr$$

e integrando

$$F(q) \simeq 1 - \frac{(qR/\hbar)^2}{10}$$

Sostituendo il valore di R , esprimendo c in "fm/s" e ricordando che $\hbar \simeq 6.582 \times 10^{-16}$ eV/s, ovvero $\hbar \simeq 197.5$ (MeV \times fm)/(s \times c) si ha quindi, per il valore minimo dell'impulso che garantisce la sensibilità richiesta alla valutazione del raggio del nucleo

$$0.95 = F(q) \simeq 1 - \frac{(qR/\hbar)^2}{10} \quad \text{da cui,} \quad q \simeq 0.71 \frac{\hbar}{R}$$

ovvero, sostituendo nelle opportune unità di misura, $q \simeq \frac{0.71 \times 197.5}{2} = 70 \frac{\text{MeV}}{c}$

Il terzo termine dell'espansione in serie di Taylor del fattore di forma è $\frac{(qR/\hbar)^4}{280}$, e poiché $qR/\hbar \simeq 0.71$, si ha che esso è circa 55 volte inferiore al precedente.

Diffusione elastica su nucleoni & fattori di forma dei nucleoni

Primo studio sperimentale estensivo \rightarrow *urti elastici* $e + \text{nuclei} \rightarrow$ misura distribuzione di carica elettrica dei nuclei.

Poi urti *profondamente anelastici* $e + \text{nucleoni}$, che ne hanno rivelato la struttura a **partoni**.

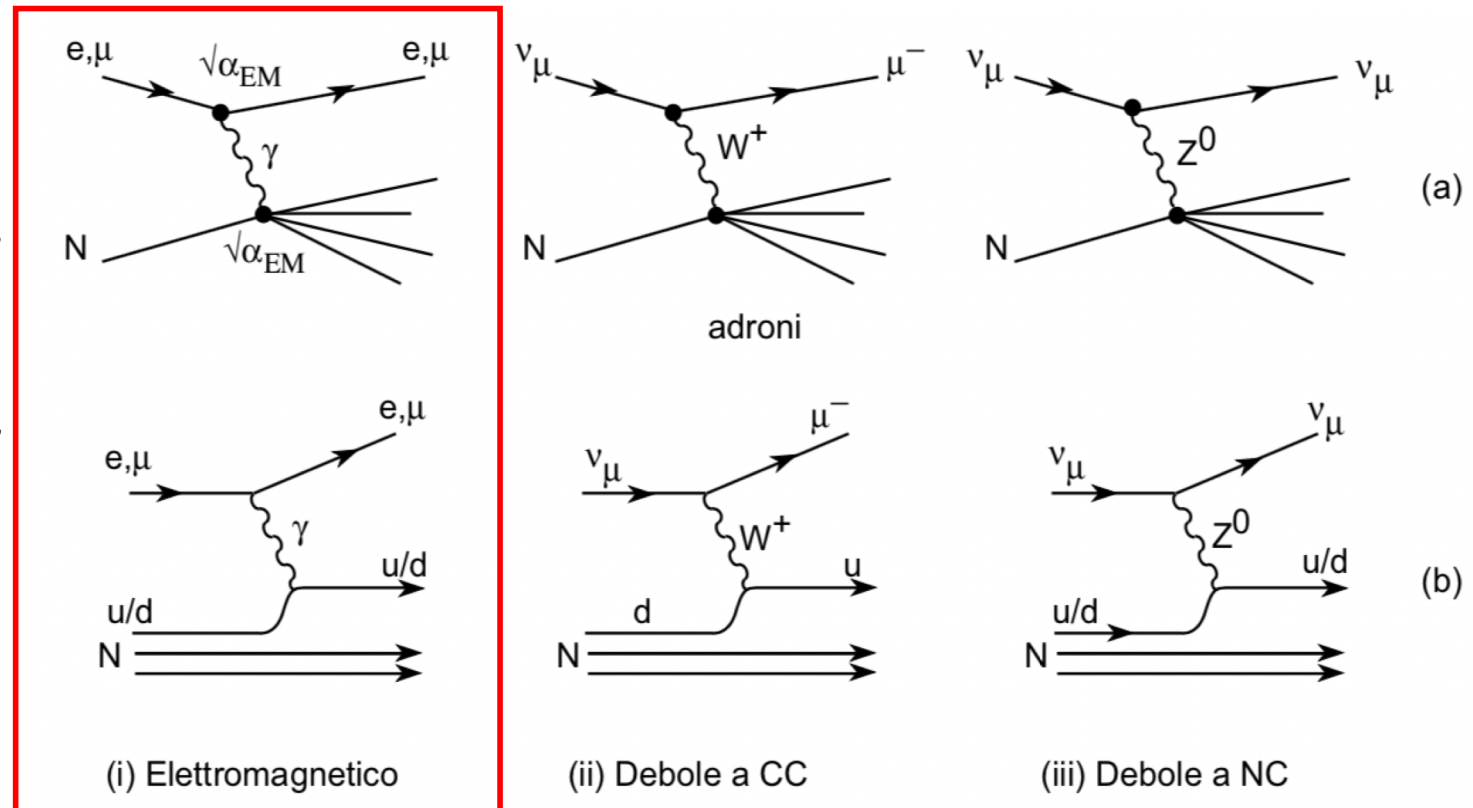
Con fasci di μ e successivamente di ν , sempre più energetici, si è ulteriormente studiata la struttura dei nucleoni.

Le reazioni studiate nei processi anelastici sono del tipo $\ell + N \rightarrow \ell' + X$, con ℓ ed ℓ' leptoni carichi o neutri, N un nucleone, e X che rappresenta il sistema adronico sperimentalmente osservabile.

Risultato fondamentale fu che gli urti $\ell + N$ si possono interpretare come fra il leptone e un costituente fermionico puntiforme del nucleone, detto **partone** (Feynman), poi identificato con un **quark** o un **anti-quark**.

Se l'energia del leptone incidente è molto alta si può trascurare l'interazione fra i partoni di uno stesso nucleone, anche se confinati in esso.

L'urto anelastico di un leptone carico su un nucleone è mediato dallo scambio di un fotone virtuale.



La diffusione elastica di e da nuclei leggeri, da' informazioni sui mattoni costitutivi dei nuclei, p ed n .

Rinculo _ I nucleoni hanno un raggio dell'ordine di 0.8 fm \rightarrow lo studio della loro struttura richiede energie fra alcune centinaia di MeV sino ad alcuni GeV (dello stesso o.d.g. dell'equivalente energetico delle loro masse). Non si può quindi trascurare il rinculo e bisogna modificare di conseguenza la densità dello spazio delle fasi. Si fa introducendo nella sez. d'urto di Mott il fattore E'/E , con E energia di e nello stato iniziale ed E' quella dell' e diffuso

$$\sigma(\vartheta) = \sigma(\vartheta)_{Mott} |F(\vec{q})|^2 \frac{E'}{E}$$

non potendo trascurare l'energia persa da e per il rinculo, il fenomeno si descrive utilizzando il (4-impulso)² Lorentz-inv. trasferito, e per non dover lavorare con quantità negative si introduce: $Q^2 = -q^2$

$$q^2 = (p - p')^2 = 2m_e^2 c^2 - 2 \left(\frac{EE'}{c^2} - |\vec{p}| |\vec{p}'| \cos\vartheta \right) \approx \approx \frac{-4EE'}{c^2} \text{sen}^2 \frac{\vartheta}{2}$$

Momento magnetico _ Per un'analisi completa si considera anche l'interazione fra corrente associata all' e incidente e mom. magnetico del nucleone: $\mu = \frac{1}{2} g \frac{e\hbar}{2M}$. L'interazione magnetica è associata a inversione dello spin del nucleone. La diffusione a 0° non è consistente con la contemporanea conservazione di mom. Ang. ed elicità, quindi è preferita la

diffusione a 180° .

Si ottiene (non lo calcoliamo), per la sezione d'urto elastica di elettroni su particelle cariche puntiformi di Dirac:

$$\sigma_{\text{punt. spin } 1/2} = \sigma_{Mott} \left(1 + 2\tau \text{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \quad \text{con} \quad \tau = \frac{Q^2}{4M^2 c^2}$$

Momento magnetico anomalo g dovrebbe valere 2 per *particelle cariche di Dirac*, senza struttura interna, 0 per particelle neutre.

Le misure dei mom. magnetici di e e μ sono compatibili con la previsione. Ma i nucleoni non puntiformi, sono costituiti da "quark" \rightarrow evidente dal valore del loro fattore g . I valori misurati per p ed n sono

$$\mu_p = \frac{g_p}{2} \mu_N = +2.793 \cdot \mu_N \quad \text{e} \quad \mu_n = \frac{g_n}{2} \mu_N = -1.913 \cdot \mu_N \quad \text{con} \quad \mu_N = \frac{e\hbar}{2M_p} = 3.1525 \times 10^{-14} \text{ MeV T}^{-1}$$

Distrib. di carica e correnti descritte da opportuni fattori di forma. Per i nucleoni servono **due** fattori di forma, uno per le caratteristiche elettriche e uno per quelle magnetiche. La sez. d'urto per diffusione

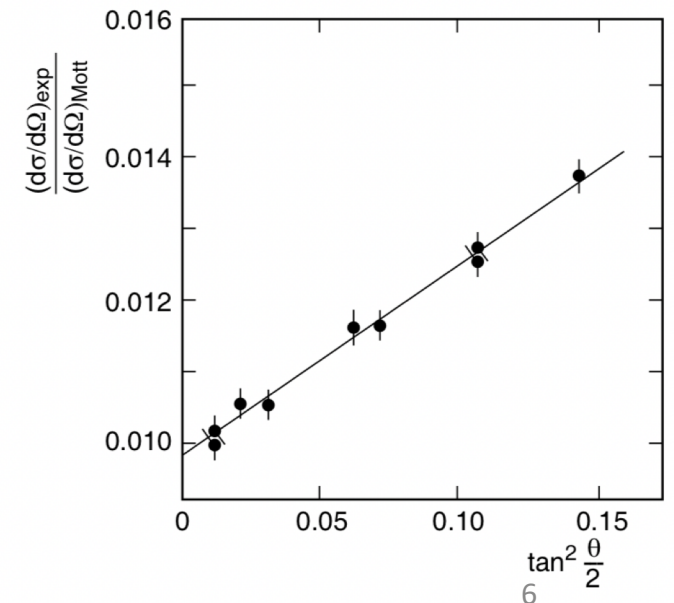
di un e su un nucleone è descritta dalla formula di **Rosenbluth**

$$\sigma_R = \sigma_{Mott} \left[\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2(Q^2) \text{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} \right]$$

con $G_E(Q^2)$ e $G_M(Q^2)$ **fattori di forma elettrico e magnetico**. La misura della loro dipendenza da Q da' info. su distribuzione radiale di carica e magnetizzazione nel nucleone. Caso limite $Q^2 \rightarrow 0$ è importante: $G_E \propto$ carica elettrica del nucleone bersaglio, normalizzata ad e , $G_M \propto$ momento magnetico μ del nucleone bersaglio, normalizzato a μ_N .

Determinare indipendentemente $G_E(Q)^2$ e $G_M(Q)^2$ richiede di misurare le sez. d'urto a valori prefissati di Q^2 per diversi angoli ϑ , poi a diverse energie di fascio. Le sez. d'urto ottenute vanno poi divise per quelle di Mott. calcolate. Graficando i risultati in funz. di $\text{tg}^2(\vartheta/2)$ i valori ottenuti, in accordo con Rosenbluth, si distribuiscono con un andamento rettilineo, dalla cui pendenza si deduce $G_M(Q)^2$ e la cui intercetta sull'asse delle ordinate vale $(G_E^2 + \tau G_M^2) / (1 + \tau)$ che per $\vartheta = 0$ da' G_E .

L'analisi per diversi valori di Q^2 da' la dipendenza da esso dei fattori di forma.



I dati sperimentali mostrano che fattore di forma elettrico di p e quelli magnetici di p ed n dipendono in modo simile da Q^2 , calando, al suo crescere, **con fattore di forma \approx dipolare.**

Il n , elettricamente neutro, ha un fattore di forma elettrico molto piccolo.

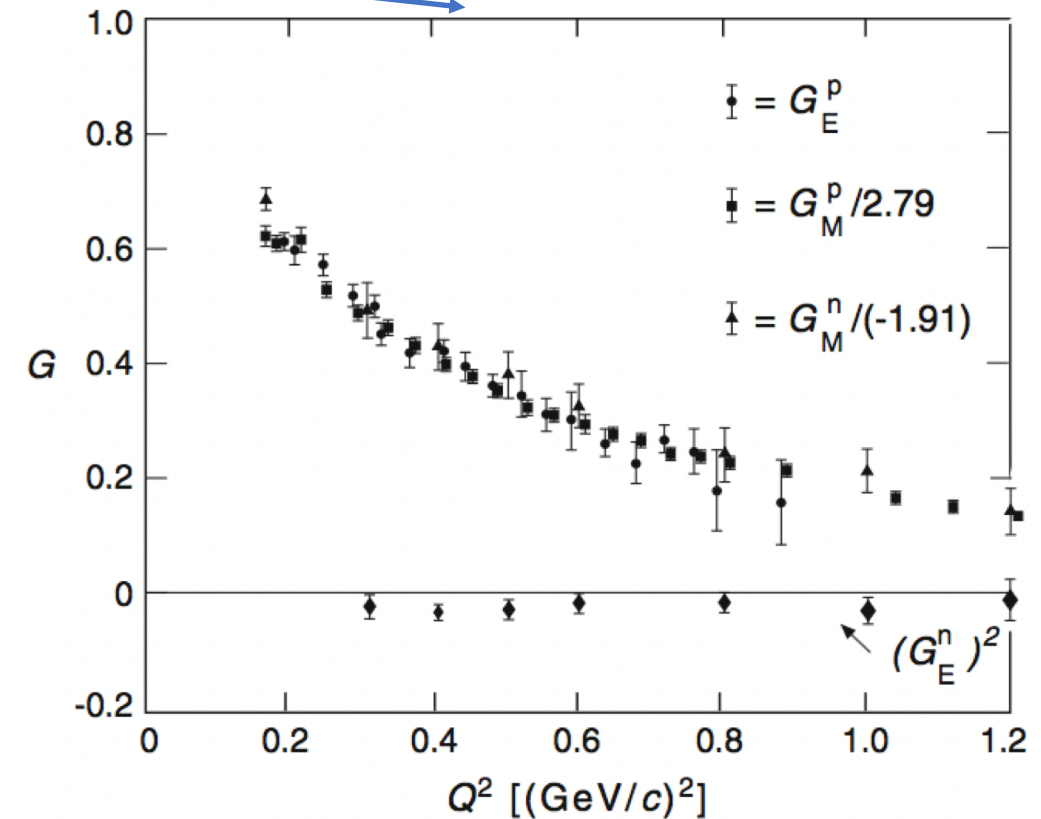
Si deducono le distrib. di carica e magnetizzazione nel nucleone dalla dipendenza dei fattori di forma da Q^2 , come fatto anche per i nuclei, ma l'interpretazione dei fattori di forma quali trasf. di Fourier di distribuzioni statiche di cariche o correnti ha senso soltanto per piccoli valori di Q^2 stesso, poiché solo in tal caso 3-impulso e 4-impulso trasferiti \approx coincidono.

Il fattore di forma dipolare corrisponde a una distrib. di carica che decresce esponenzialmente $\rho(r) = \rho(0)e^{-ar}$ con, $a = 4.27 \text{ fm}^{-1}$ per cui i nucleoni non sembrano ne' particelle puntiformi ne' distribuzioni omogenee di carica ma piuttosto **sistemi diffusi.**

Dipende anche dalle energie alle quali si sta esplorando !

Raggio quadratico medio della distrib. di carica nel p e della magnetizzazione nel p e nel n hanno valori simili che si deducono dalla pendenza dell'andamento di $G_{E,M}(Q^2 = 0)$:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle_{dip}} \simeq 0.81 \text{ fm}$$



Fattore di forma elettrico del neutrone

No bersagli di n liberi. La misura dei due fattori di forma elastici ha richiesto tecniche più complesse che per il p . Informazioni su $G_M^n(Q)^2$ e $G_E^n(Q)^2$ ottenute da diffusione elastica di e su **deuterio**. Bisogna correggere i dati misurati per effetti delle forze nucleari agenti fra p e n . La non completa correzione di questi effetti causa i valori negativi di $(G_E^n)^2$ mostrati in fig. alla pagina precedente. [$G_E^n \neq$ immaginario]

Approccio ingegnoso per determinare il raggio di n liberi: n di bassa energia provenienti da un reattore sono fatti diffondere su e legati in *shell* atomiche di nuclei pesanti, studiando poi le distribuzioni degli e emessi.

Corrisponde sostanzialmente a una diffusione $e - n$ a basso Q .

Da indagini sperimentali n appare elettricamente neutro solo se osservato dall'*esterno*, al suo *interno* contiene costituenti carichi (*quarks*) che posseggono anche momenti magnetici.

Interpretare in termini di trasformata di Fourier come se fosse una distribuzione statica di carica richiede una certa cautela, come osservato anche per il protone, e se comunque la si effettua, il risultato che se ne trae in termini di densità radiale di carica $\rho^n(r)$ fornisce valori per essa positivi fino a raggi r pari a circa $0.5 \div 0.6$ fm, e negativi per distanze radiali maggiori che si estendono fino a circa 2.5 fm.

Calcoli effettuati sulla base di vari modelli forniscono risultati compatibili con questi.

Diffusione quasi elastica

Fissata l'energia E degli e incidenti e l'angolo di diffusione da reazioni elastiche, gli e diffusi hanno un'energia ben definita:

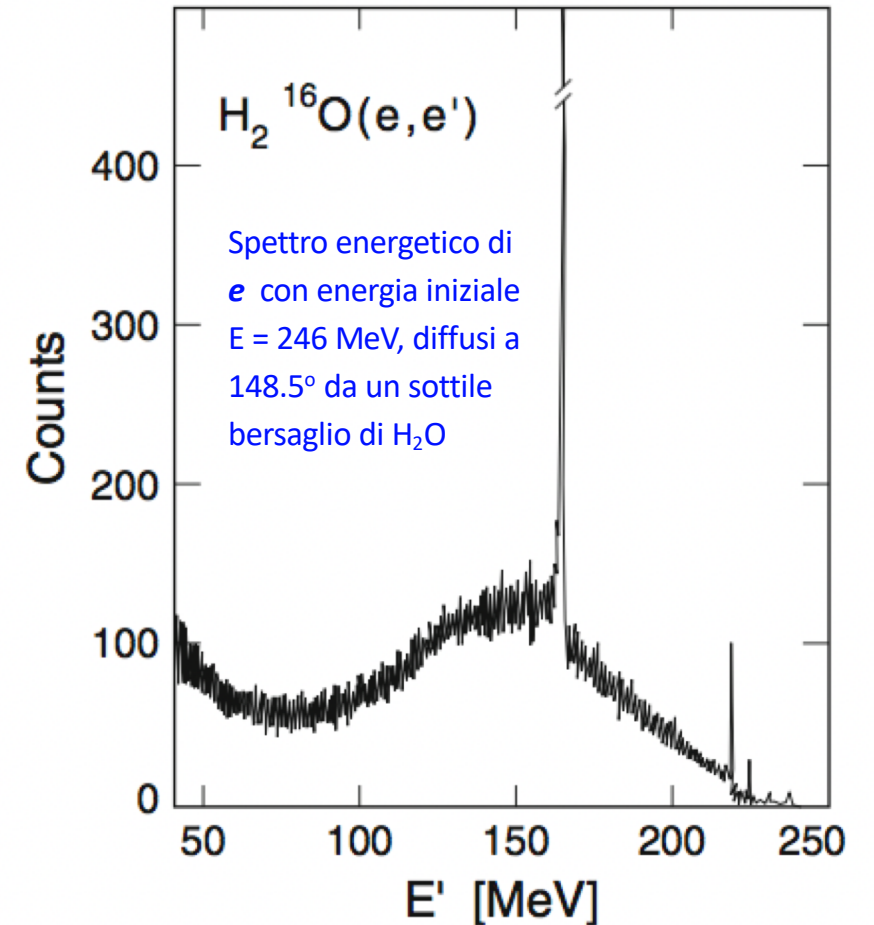
$$E' \simeq \frac{E}{1 + \frac{E}{Mc^2} (1 - \cos\vartheta)} \quad (\text{vedi dispense})$$

Ripetendo misura agli stessi energia incidente e angolo, ma con un bersaglio di nuclei più pesanti (più nucleoni legati), lo spettro energetico per gli e diffusi è più complicato.

Un esempio in figura, con elettroni diffusi da un bersaglio di H_2O , quindi talvolta da un p quasi libero e talvolta da un nucleo di ossigeno.

Lo stretto picco ad $E' \simeq 160$ MeV è dovuto a diffusione elastica sui protoni quasi liberi di H_2 ed è sovrapposto a una distribuzione larga il cui massimo in corrispondenza a un'energia inferiore di qualche MeV a quella del picco elastico dovuto ad H_2 . Questa parte dello spettro è dovuta alla diffusione degli e da singoli nucleoni di un nucleo di ^{16}O (*diffusione quasi-elastica*).

Gli stretti picchi a più alta energia sono dovuti alla diffusione dal nucleo di ^{16}O come un tutto.



Lo spostamento a energie inferiori della coordinata del massimo e l'allargamento dello spettro quasi-elastico, danno informazioni sulla struttura interna del nucleo atomico. Per l'approssimazione *impulsiva* (*) adottata l' e interagisce soltanto con un singolo nucleone del nucleo, e che il nucleone sia di conseguenza espulso dal nucleo senza produrre ulteriori interazioni con i restanti nucleoni del nucleo stesso.

Lo spostamento a energie inferiori del massimo della distribuzione, rispetto all'energia della diffusione su nucleoni quasi liberi, è dovuto all'energia necessaria a strappare il nucleone dal nucleo.

Dall'allargamento della distribuzione, rispetto al picco elastico dovuto ai p quasi liberi dell'idrogeno, si deduce che il nucleo **non** è un oggetto "statico" costituito da nucleoni in ben definite posizioni. I nucleoni si comportano piuttosto come particelle "quasi libere" che si muovono un po' in tutte le direzioni, restando nel contempo confinati entro il volume che caratterizza il nucleo stesso.

E' questo loro movimento nel il nucleo che determina le differenze cinematiche rispetto a quanto sarebbe invece prevedibile se ogni nucleone fosse in una posizione stabile e ben definita nel volume del nucleo .

(*) L'approssimazione impulsiva presuppone che la traiettoria percorsa dalla particella diffusa nella regione d'interazione sia sempre rettilinea, secondo due direzioni coincidenti con quella dell'impulso della particella a grande distanza dalla zona d'interazione prima e dopo di questa, e associa il cambio di direzione all'azione "istantanea" della forza d'interazione che introduce una componente ortogonale di impulso.

Dimensioni di pioni e kaoni

La tecnica per determinare il raggio del n è utile anche per il *raggio di carica* di altre particelle, quali pioni π o kaoni \mathbf{K} , entrambi mesoni.

Si fanno interagire mesoni di alta energia con elettroni legati in atomi di idrogeno (non si usano qui atomi pesanti come invece per i neutroni) e il fattore di forma è ottenuto dall'analisi delle distribuzioni angolari degli elettroni emessi.

Pioni e kaoni sono entrambi particelle con spin 0 , quindi non possiedono fattore di forma magnetico, ma soltanto elettrico.

Le pendenze dei fit sui dati dei grafici, valutate in prossimità di $Q^2 = 0$, danno i valori quadratici medi dei rispettivi raggi di carica,

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle_\pi} \simeq 0.67 \pm 0.02 \text{ fm}$$

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle_K} \simeq 0.58 \pm 0.04 \text{ fm}$$

π e \mathbf{K} hanno raggio di carica inferiore a quello del p , e quello del \mathbf{K} risulta inferiore a quello del π .

Dipende dalle diverse strutture interne delle tre particelle:

il p è composto da tre quark, π e \mathbf{K} sono invece entrambi composti da un quark e da un anti-quark. Nel \mathbf{K} uno dei quark componenti è però decisamente più massivo degli altri.

Si trova che le dimensioni di un sistema di quark calano all'aumentare delle masse dei quark costituenti.

