Esercizio 0 _ (Risolto)

Si ha un preparato costituito da una miscela di due diverse sostanze radioattive completamente indipendenti l'una dall'altra e si misura sperimentalmente la distribuzione dei tempi d'attesa fra la rivelazione di due suoi successivi prodotti di decadimento. Si suppone che la misura sia stata eseguita con un sistema di rivelazione molto efficiente ma non in grado di riconoscere i prodotti di decadimento di una sostanza da quelli dell'altra.
Si delinei nell'ambito di quali ipotesi e come si potrebbe in pratica cercare di risalire ai valori delle vite medie τ_1 e τ_2 e delle abbondanze iniziali $N_1(0)$ e $N_2(0)$ delle due diverse sostanze radioattive che compongono la miscela che costituisce il preparato.

Soluzione:

Detto $N_*(t) = N_1(t) + N_2(t)$ il numero totale di nuclei radioattivi del preparato non ancora decaduti ad un qualunque istante $t > 0$, con

$$N_1(t) = N_1(0)\, e^{-t/\tau_1} \qquad \text{ed} \qquad N_2(t) = N_2(0)\, e^{-t/\tau_2}$$

si ha:

$$N_*(0) = N_1(0) + N_2(0) \qquad \text{ed} \qquad N_*(t) = N_1(0)\, e^{-t/\tau_1} + N_2(0)\, e^{-t/\tau_2}$$

Si considerino tre casi estremi:

$$\tau_1 \ll \tau_2 \quad ; \quad \tau_1 \simeq \tau_2 \simeq \tau \quad ; \quad \tau_1 \gg \tau_2$$

Si indichi con $N_*^{(sp)}(t_i)$ il numero di eventi raccolti nell'$i-$mo canale dell'istogramma sperimentale, compreso tra gli istanti t_i e $t_i + \Delta t$.

- Si cominci con l'analizzare il secondo caso: $\tau_1 \simeq \tau_2 \simeq \tau$ e si consideri il logaritmo naturale di $N_*(t)$

$$\begin{aligned}
\ln N_*(t) &= \ln\left[N_1(0)\,e^{-t/\tau_1} + N_2(0)\,e^{-t/\tau_2}\right] \\
&\simeq \ln\left[N_1(0)\,e^{-t/\tau} + N_2(0)\,e^{-t/\tau}\right] \\
&= \ln\{e^{t/\tau}\left[N_1(0) + N_2(0)\right]\} \\
&= -\frac{t}{\tau} + \ln\left[N_1(0) + N_2(0)\right]
\end{aligned}$$

che mostra una dipendenza quasi lineare di $\ln N_*(t)$ da t.
Ponendo in scala semilogaritmica $N_*^{(sp)}(t_i)$ si nota che il suo profilo dovrebbe poter essere approssimato da un andamento rettilineo con pendenza $-1/\tau$ e intercetta sull'asse delle ordinate pari a $\ln\left[N_1(0) + N_2(0)\right]$.
Effettuando quindi un "fit a retta" si riescono a stimare $\tau \simeq \tau - 1 \simeq \tau_2$ e la somma $\left[N_1(0) + N_2(0)\right]$ delle abbondanze iniziali, ma non le singole abbondanze $N_1(0)$ e $N_2(0)$.

- Si supponga ora che sia $\tau_2 \gg \tau_1$.

In tal caso ci si aspetta che per tempi $t \gg \tau_1$ la legge di decadimento sia dominata dai prodotti di decadimento della sostanza 2, come si vede anche in figura ...

Se quindi si effettua un fit sui valori di $\ln\left[N_*^{(sp)}(t_i)\right]$ per valori di $t \gg \tau_1$, ovvero per $t \geq t'$ con $t' \gg \tau_1$, si dovrebbe ottenere una legge

$$N_2^{(fit)}(t) = N_2^{(fit)}(0)\ e^{-t/\tau_2^{(fit)}}$$

in grado di riprodurre la corretta legge di decadimento $N_2(0)\, e^{-t/\tau_2}$ tanto meglio quanto più vale $t' \gg \tau_1$, ovviamente sempre che per $t \geq t'$ ci siano a disposizione abbastanza valori sperimentali sui quali fare un fit affidabile.
In quest'ipotesi si può dunque sottrarre a $N_*^{(sp)}(t_i)$ per ogni valore di t_i, quanto dato da $N_2^{(fit)}(t_i)$, e quanto resta, $N_1^*(t_i)$, dovrebbe essere compatibile con la distribuzione dovuta ai decadimenti della sola sostanza 1:

$$\left[N_*^{(sp)}(t_i) - N_2^{(fit)}(t_i)\right] \propto N_1^*(t_i) \approx N_1(t_i)$$

Effettuando quindi un fit sui valori rappresentati da $N_1^*(t_i)$ si ottengono stime anche per $N_1(0)$ e per τ_1.
- Il caso $\tau_2 \ll \tau_1$ è chiaramente simmetrico a quello ora discusso.

Si osservi anche che un ulteriore fattore che influenza quanto bene la procedura indicata permetta di risalire a stime di $N_1(0),\ N_2(0),\ \tau_1,\ \tau_2$ è il rapporto N_1/N_2, peraltro non conoscibile a priori.

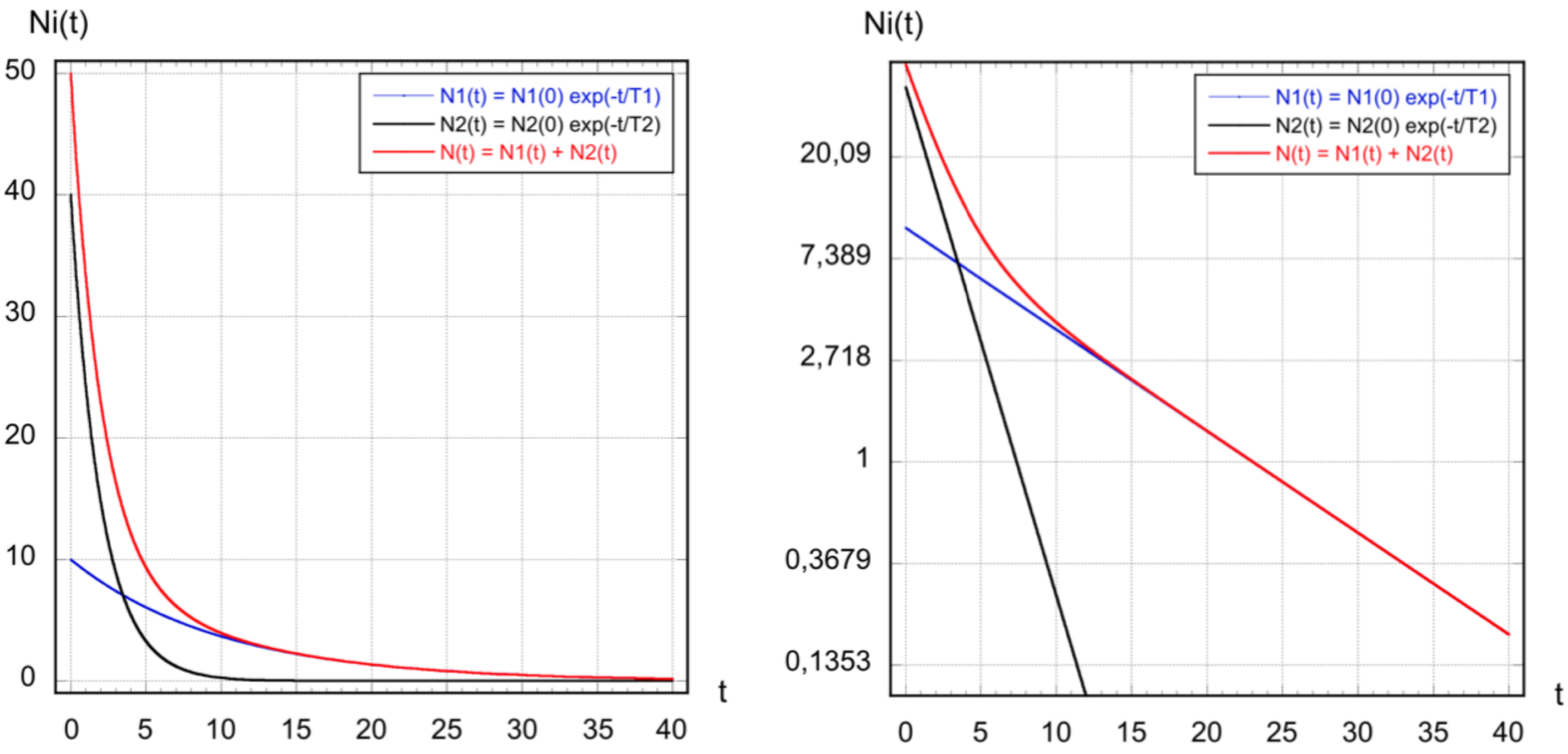

Figura 27.1: A sinistra, in scala linare, gli andamenti di $N_1(t)$, $N_2(t)$ e la loro somma, nell'ipotesi che $N_1(0) = 10$, $N_2(0) = 40$, $\tau_1 = 10$ e $\tau_2 = 10$; a destra lo stesso in scala semi-logaritmica.

Esercizio 1 _

Il ^{210}Po ha un tempo di dimezzamento per decadimento α pari a $T_{1/2}$ = 138 giorni. Sapendo che l'energia cinetica della particella α prodotta in ogni suo decadimento è pari a $E_{k,\alpha}$ = 5.3 MeV, e che il nucleo figlio risultante è praticamente sempre prodotto nel suo stato fondamentale, si deduca la quantità di calore generata da 5 mg di ^{210}Po in un tempo pari alla sua vita media.

Si esprimano le masse in gioco come il prodotto fra il numero di nucleoni costituenti ogni struttura considerata ed il valore dell'unità di massa atomica $m_U \simeq 931.49$ MeV/c^2. Si ricordi che 1 J ≃ 6.242 x 10^{18} eV.

Soluzione:

Il decadimento considerato è: ${}^{210}_{84}\mathrm{Po} \xrightarrow{\alpha} {}^{206}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$, e si conosce l'energia cinetica della particella α emessa: $E_{k,\alpha} = 5.3$ MeV.
Per la descrizione del moto della particella α e del nucleo di rinculo si può in questo caso ricorrere all'approssimazione non relativistica e in base alla conservazione dell'impulso l'energia cinetica del nucleo prodotto nel decadimento è quindi esprimibile come

$$E_{k,nuc} \simeq E_{k,\alpha} \frac{m_\alpha}{M_{nuc}}$$

Conseguentemente, l'energia complessiva liberata in un decadimento radioattivo del tipo considerato è data da

$$E_\alpha \equiv E_{k,\alpha} + E_{k,nuc} \simeq E_{k,\alpha}\left(1 + \frac{m_\alpha}{M_{nuc}}\right) \simeq 5.3 \cdot \frac{210}{206}\ \mathrm{MeV} \simeq 5.4\ \mathrm{MeV}$$

Il numero medio $n_d(\tau)$ di decadimenti che si verificano in un intervallo di tempo pari alla vita media $\tau = \left(T_{1/2}/ln2\right) \simeq 199$ giorni, del nucleo ${}^{210}_{84}\mathrm{Po}$ è dato da

$$n_d\left(\tau\right) \; = \; N_0 - N\left(\tau\right) \; = \; N_0\left(1 - e^{-\lambda\tau}\right) \; = \; N_0\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

dove N_0 è il numero di nuclei radioattivi presenti all'istante iniziale ($t = 0$), con $N(t)$ il numero di nuclei radioattivi presenti al generico istante t e $\lambda = 1/\tau$ la costante di decadimento del nucleo ${}^{210}_{84}\mathrm{Po}$.
N_0 è a sua volta dato da

$$N_0 \; = \; N_A \, \frac{m_{\mathrm{Po}}}{A_{\mathrm{Po}}}$$

con N_A il numero di Avogadro, $m_{\mathrm{Po}} = 5$ mg la massa di ${}^{210}_{84}\mathrm{Po}$ isotopicamente puro inizialmente presente e $A_{\mathrm{Po}} \simeq 210$ g mol^{-1} è il peso atomico

dell'isotopo radioattivo considerato.
La quantità di calore $Q(\tau)$ prodotta nell'intervallo temporale compreso fra $t = 0$ e $t = \tau$ è quindi data da

$$
\begin{aligned}
Q(\tau) &= n_d(\tau)\, E_\alpha = N_0 \left(1 - \frac{1}{e}\right) E_\alpha = N_A \frac{m_{\mathrm{Po}}}{A_{\mathrm{Po}}} \left(1 - \frac{1}{e}\right) E_\alpha \simeq \\
&\simeq 6.022 \times 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}\ \frac{5 \times 10^{-3}\ \mathrm{g}}{210\ \mathrm{g\ mol}^{-1}} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \times 5.4\ \mathrm{MeV} \simeq \\
&\simeq 4.9 \times 10^{19}\ \mathrm{MeV} \simeq \\
&\simeq 7.9 \times 10^{6}\ \mathrm{J}
\end{aligned}
$$

Supponendo che tutta l'energia cinetica dei prodotti di reazione si degradi in definitiva in energia termica

Esercizio 2 _

Un fascio di muoni percorre un anello di raggio r = 14 m, sottoposto a un campo magnetico uniforme di intensità B = 0.5 T, orientato ortogonalmente al piano dell'anello.

Si calcolino l'impulso dei muoni, il loro periodo di rivoluzione e la frazione di essi che decade nell'arco di tempo di un periodo.

A quanto si riduce l'intensità iniziale I_0 del fascio di muoni dopo 100 giri nell'anello?

(Si ricordi che la massa m_μ di un muone è pari a 105 MeV/c^2, e che la sua vita media τ_μ vale 2.2×10^{-6} s)

Soluzione esercizio 2

- Impulso _

Impostando l'uguaglianza tra forza centripeta e forza di Lorentz sul muone, e ricordando l'equivalenza Joule%eV, si ottiene $p = 2.1$ GeV/c.

1 J = 6.24 x 10^(18) eV

- Periodo di rivoluzione _

Osservando che un muone da 2.1 GeV/c è praticamente relativistico e che quindi la sua velocità è praticamente pari a c, si trova il periodo banalmente come $T = \dfrac{2\pi r}{c}$ per cui $T = 2.9 \times 10^{-7}$ s.

Si può anche partire da $p = m_\mu \gamma v$, ricordando che $\gamma = 1/\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$, per ottenere $v = \sqrt{\dfrac{p^2/m_\mu^2}{1 - p^2/m_\mu^2 c^2}}$, da cui $v/c \simeq 0.99875\ c$.

- Frazione di μ che decadono nell'arco di un periodo T -

Il numero $N(t)$ di muoni presenti al tempo t è dato dalla legge $N(t) = N_0 e^{-t/\tau_\mu}$.

Detta $f(T)$ la frazione di muoni che decade in un periodo T si ha:

$$f(T) = [N(t) - N(t + \mathrm{T})]/N(t) = (1 - e^{-T/\tau}).$$

Ma la vita media da considerarsi è quella τ_μ^* *dilatata* del fattore γ dei muoni di impulso p, cioè $\gamma = \sqrt{1 + p^2/m_\mu^2 c^2}$. Per muoni da 2.1 GeV/$c$ si ha $\gamma \simeq 14.82$ e quindi $\tau_\mu^* \simeq 3.26 \times 10^{-5}$ s.

Se ne deduce quindi: $f(T) \simeq 0.0088$ ovvero lo 0.88%.

Si vuole infatti sapere cosa rileva lo sperimentatore, solidale col laboratorio e non col muone !

Detta ora I_0 l'intensità iniziale ($t = 0$) del fascio di muoni, dopo un giro nell'anello essa si sarà ridotta a

$$I_0^{(1)} = I_0[1 - f(t)] = I_0(1 - 0.0088)$$

Dopo n giri nell'anello l'intensità residua è quindi

$$I_0^{(n)} = I_0[1 - f(t)]^n$$

che per $n = 100$ da': $I_0 \simeq 0.431 \times I_0$

Esercizio 3 _

La reazione d + ^{3}H → n + ^{4}He, con un Q_valore Q = 17.6 MeV, è utilizzata spesso per produrre fasci etichettati di neutroni di energia definita, tramite la rivelazione della particella carica (^{4}He) associata.

Si consideri un fascio di deutoni incidenti con un'intensità i = 2 μA e un'energia E_d = 2.5 MeV su un bersaglio fisso di tritio di densità δ = 0.2 mg/cm^2 .

Sapendo che a quest'energia la sezione d'urto differenziale σ(30°) della reazione vale 13 mb/sr all'angolo azimutale ϑ = 30°, si calcoli l'intensità Φ_n del flusso di neutroni che attraversa un rivelatore di 1 cm^2 posto alla distanza di 1 m dal bersaglio, all'angolo ϑ = 30° rispetto al fascio incidente.

Soluzione esercizio 3

Essendo $q_e \simeq 1.6022 \times 10^{-19}$ C la carica elettrica di un singolo deutone, l'intensità di fasio di 2 μA corrisponde ad un numero dn_d/dt di deutoni incidenti al secondo pari a

$$\frac{dn_d}{dt} \simeq \frac{2\ \mu\text{A}}{1.6022 \times 10^{-19}\text{C}} = \frac{2 \times 10^{-6}\text{C/s}}{1.6022 \times 10^{-19}\text{C}} = 1.2483 \times 10^{13}\ \text{d/s}$$

La massa atomica del tritio è pari a $\text{M}(t) = 3.01605$ u, quindi una mole di tritio, che contiene un numero di Avogadro $N_A = 6.0221 \times 10^{23}$ di nuclei di tritio, ha una massa di 3.01605 g.

Ne consegue che la densità del bersaglio di tritio espressa in (nuclei di tritio)/cm^2 è

$$\delta_t = \frac{2 \times 10^{-4} \times 6.0221 \times 10^{23}}{3.01605} = 3.9934 \times 10^{19} \ \mathrm{t/cm^2}$$

L'angolo solido $\Delta\Omega$ sotteso dal rivelatore si ottiene moltiplicando 4π per il rapporto fra l'area del rivelatore e quella della superficie sferica di raggio $r = 1$ m

$$\Delta\Omega = 4\pi \times \frac{1}{4\pi \times 10^4} = 10^{-4} \ \mathrm{sr}$$

Data la piccole entità di $\Delta\Omega$ si possono supporre trascurabili le variazioni in esso del valore assegnato per la sezione d'urto differenziale, che quindi si assume costante su tutto $\Delta\Omega$. Per l'intensità Φ_n del flusso cercato di neutroni si ha quindi

$$\Phi_n = \frac{\mathrm{d}n_d}{\mathrm{d}t} \times \Delta\Omega \times \delta_t \times \sigma_{30^o} =$$

$$= 1.2484 \times 10^{13} \times 10^{-4} \times 3.9934 \times 10^{19} \times 1.3 \times 10^{-26} = 648 \ \mathrm{s^{-1}}$$