

Capitolo 11

Diffusione elastica su nucleoni

Nel presente capitolo e nel successivo si studieranno i processi di diffusione elastica, quasi elastica e (profondamente) anelastica di leptoni su nucleoni, processi che hanno fornito importanti informazioni sulla struttura del protone e del neutrone.

Storicamente il primo studio sperimentale è stato l'urto elastico fra elettroni e nuclei, che ha fortemente contribuito alla misura della distribuzione di carica elettrica dei nuclei.

Sono quindi seguite le misure dell'urto profondamente anelastico di elettroni su nucleoni, che ne hanno rivelato la struttura a partoni.

Sono poi divenuti disponibili anche fasci di muoni e successivamente di neutrini, che con l'incremento delle energie hanno permesso ulteriori e complementari analisi della struttura dei nucleoni.

Le reazioni studiate nei processi anelastici sono del tipo

$$\ell + N \rightarrow \ell' + X \quad (11.1)$$

con ℓ ed ℓ' leptoni carichi o neutri, N un nucleone, e dove X rappresenta il sistema adronico che può essere sperimentalmente osservato oppure no.

Il risultato più importante di questi studi fu che gli urti $\ell + N$ possono essere interpretati come avvenuti fra il leptone incidente e un costituente fermionico puntiforme del nucleone, detto *partone*, poi identificato con un quark o un anti-quark.

Se l'energia del leptone incidente è molto alta si vede anche che si può trascurare l'interazione fra i partoni costituenti uno stesso nucleone, nonostante essi siano confinati in esso.

L'urto anelastico di un leptone carico su un nucleone avviene tramite lo scambio di un fotone virtuale, come schematicamente illustrato in figura [11.1](#)

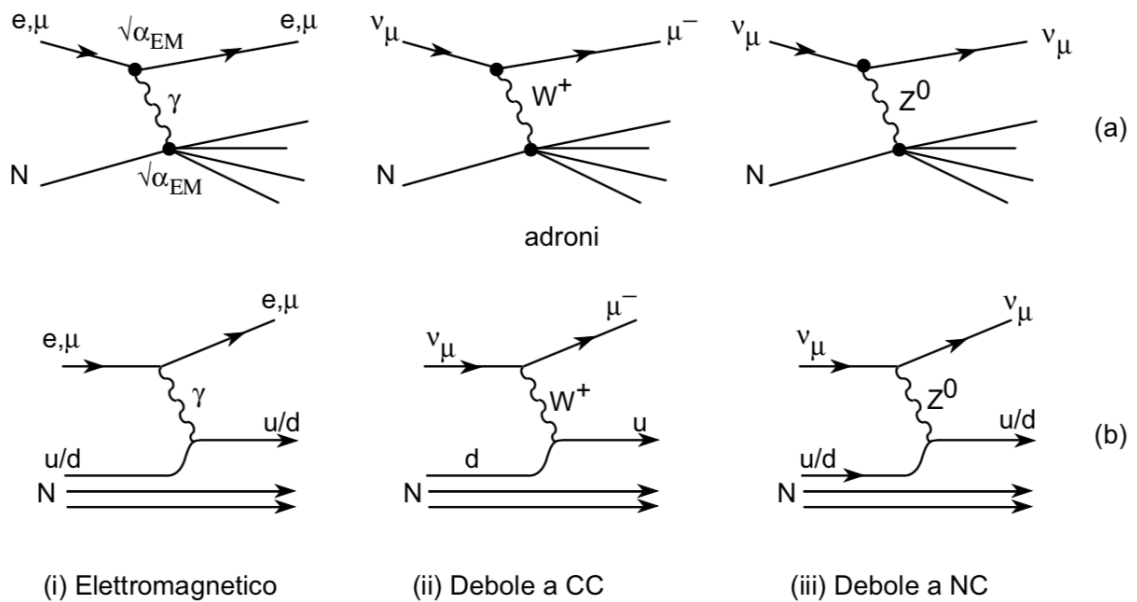


Figura 11.1: Urto anelastico leptone-nucleone: (a) considerando le particelle coinvolte; (b) secondo il più semplice modello a quark componenti. Qui il tempo scorre da sinistra verso destra.

11.1 Fattori di forma dei nucleoni

La diffusione elastica di elettroni da nuclei leggeri, quali idrogeno e deuterio, fornisce informazioni sui mattoni costitutivi dei nuclei, cioè il protone e il neutrone, e nelle discussioni sugli esperimenti coinvolti bisogna tener sempre conto di alcune importanti osservazioni qui di seguito trattate.

- Rinculo - Come si avrà modo di vedere a breve i nucleoni hanno un raggio dell'ordine di 0.8 fm, per cui lo studio della loro eventuale struttura richiede di mettere in gioco energie comprese fra alcune centinaia di MeV sino ad alcuni GeV, ovvero dello stesso ordine di grandezza dell'equivalente energetico delle masse dei nucleoni stessi. In questo caso il rinculo dei bersagli non può essere trascurato e bisogna anche modificare di conseguenza la densità dello spazio delle fasi. Questo si attua introducendo nella sezione d'urto di Mott espressa dalla [7.111](#) il fattore E'/E , dove si ricordi che E è l'energia dell'elettrone nello stato iniziale ed E' quella dell'elettrone diffuso

$$\sigma(\vartheta) = \sigma(\vartheta)_{Mott} |F(\vec{q})|^2 \frac{E'}{E} \quad (11.2)$$

In questo caso non si può più considerare trascurabile l'energia persa dall'elettrone a causa del rinculo e non si può di conseguenza descrivere

il fenomeno considerando soltanto il tri-impulso trasferito, ma bisogna utilizzare il quadrato del quadri-impulso Lorentz-invariante trasferito

$$\begin{aligned}
 q^2 &= (p - p')^2 = 2m_e^2 c^2 - 2 \left(\frac{EE'}{c^2} - |\vec{p}| |\vec{p}'| \cos\vartheta \right) \approx \\
 &\approx \frac{-4EE'}{c^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2}
 \end{aligned}
 \tag{11.3}$$

Per evitare di lavorare con quantità negative si introduce

$$Q^2 = -q^2 \tag{11.4}$$

e di conseguenza, nella sezione d'urto di Mott, bisognerà sostituire \vec{q}^2 con q^2 o con Q^2 .

- Momento magnetico - Un'analisi completa del fenomeno richiede di tener conto anche dell'interazione fra la corrente associata all'elettrone incidente e il momento magnetico del nucleone. Quest'ultimo, essendo il nucleone un fermione di spin 1/2, e detta M la sua massa, è dato da

$$\mu = \frac{1}{2} g \frac{e\hbar}{2M} \tag{11.5}$$

Nel caso di una particella puntiforme, priva di struttura interna, dall'equazione di Dirac si ottiene che il fattore g vale 2.

L'interazione magnetica è associata a un'inversione dello spin del nucleone. La diffusione a 0° non è consistente con la contemporanea conservazione di momento angolare ed elicità, di conseguenza è preferita la diffusione a 180° .

Tenendo conto anche dell'interazione magnetica l'espressione della sezione d'urto si arricchisce di un ulteriore fattore contenente il termine $\operatorname{sen}^2(\vartheta/2) = \cos^2(\vartheta/2) \cdot \operatorname{tg}^2(\vartheta/2)$ Si ottiene 1, per la sezione d'urto elastica di elettroni su particelle cariche puntiformi di Dirac

$$\sigma_{\substack{\text{punt.} \\ \text{spin } 1/2}} = \sigma_{Mott} \left(1 + 2\tau \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \tag{11.6}$$

con

$$\tau = \frac{Q^2}{4M^2 c^2} \tag{11.7}$$

La presenza del fattore 2τ può essere abbastanza ben capita considerando che l'elemento della matrice d'interazione deve essere proporzionale al momento magnetico del nucleone bersaglio, e quindi ad $1/M$, e al campo magnetico prodotto in prossimità del nucleone stesso durante la fase dell'urto che integrato sul tempo, risulta proporzionale

¹Si veda ad esempio l'Appendice B di: "The structure of the nucleon", A.W. Thomas W.Weise, Wiley-VCH, 2001.

alla deflessione subita dall'elettrone, dunque all'impulso trasferito Q . Queste quantità compaiono dunque elevate al quadrato nell'espressione della sezione d'urto.

Il termine magnetico nella [11.6](#) risulta quindi grande per grandi valori del quadri-impulso trasferito Q e per grandi angoli ϑ di diffusione. Questo contributo determina dunque una minor rapidità nella riduzione del valore della sezione d'urto al crescere degli angoli ϑ rispetto a quanto prevede la sola interazione elettrica e ne risulta una distribuzione più isotropa dei prodotti diffusi.

- Momento magnetico anomalo - Il fattore g presente nella [11.5](#) dovrebbe valere esattamente 2 per particelle cariche di Dirac, prive di struttura interna, e 0 nel caso in cui le stesse siano prive di carica. Le misure dei momenti magnetici di elettroni e muoni sono effettivamente compatibili con questa previsione [2](#). I nucleoni non sono però particelle puntiformi, essendo costituiti da "quark" e ciò è evidente anche dal valore assunto dal loro fattore g , che ne riflette la sotto-struttura. I valori misurati per protoni e neutroni sono

$$\begin{aligned}\mu_p &= \frac{g_p}{2} \mu_N = +2.793 \cdot \mu_N \\ \mu_n &= \frac{g_n}{2} \mu_N = -1.913 \cdot \mu_N\end{aligned}\tag{11.8}$$

con μ_N il *magnetone nucleare*:

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2M_p} = 3.1525 \times 10^{-14} \text{ MeV T}^{-1}\tag{11.9}$$

Le distribuzioni di carica e correnti possono essere descritte da opportuni fattori di forma, analogamente a come fatto anche per i nuclei. Nel caso dei nucleoni sono necessari due fattori di forma, uno per descrivere le caratteristiche elettriche e uno per descrivere quelle magnetiche. La sezione d'urto per la diffusione di un elettrone da parte di un nucleone è in questo caso descritta dalla formula di *Rosenbluth* [3](#)

$$\sigma_R = \sigma_{Mott} \left[\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2(Q^2) \text{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} \right]\tag{11.10}$$

$G_E(Q^2)$ e $G_M(Q^2)$ sono i fattori di forma *elettrico* e *magnetico*, funzioni di Q^2 . La misura della loro dipendenza da Q^2 fornisce informazioni sulla distribuzione radiale della carica e della magnetizzazione nel nucleone e la situazione limite per cui $Q^2 \rightarrow 0$ è di particolare

²Si riscontrano piccole deviazioni teoricamente ben capite, dovute a processi quanto elettro-dinamici di ordine superiore.

³M.N. Rosenbluth, Phys. Rev. 79 (1950) 615.

importanza. In tal caso G_E coincide con la carica elettrica del nucleone bersaglio, normalizzata alla carica elementare e , e G_M coincide con il momento magnetico μ del nucleone bersaglio, normalizzato al magnetone nucleare. I valori limite sono

$$\begin{aligned} G_E^p(Q^2 = 0) &= 1 & G_E^n(Q^2 = 0) &= 0 \\ G_M^p(Q^2 = 0) &= 2.793 & G_M^n(Q^2 = 0) &= -1.913 \end{aligned} \quad (11.11)$$

Per poter determinare indipendentemente $G_E(Q)^2$ e $G_M(Q)^2$ le sezioni d'urto devono essere misurate a valori prefissati di Q^2 per diversi angoli di diffusione ϑ , quindi a diverse energie E di fascio. Le sezioni d'urto così ottenute vanno quindi divise per le sezioni d'urto di Mott. Graficando i risultati in funzione di $\text{tg}^2(\vartheta/2)$ si ha che i valori ottenuti, in accordo con la formula di Rosenbluth, si distribuiscono secondo un andamento rettilineo, come mostrato in figura 11.2, dalla cui pendenza si deduce $G_M(Q)^2$ e la cui intercetta sull'asse delle ordinate vale $(G_E^2 + \tau G_M^2) / (1 + \tau)$ che per $\vartheta = 0$ fornisce G_E^2 . Effettuando quest'analisi per diversi valori di Q^2 si ottiene quindi la dipendenza da esso dei fattori di forma.

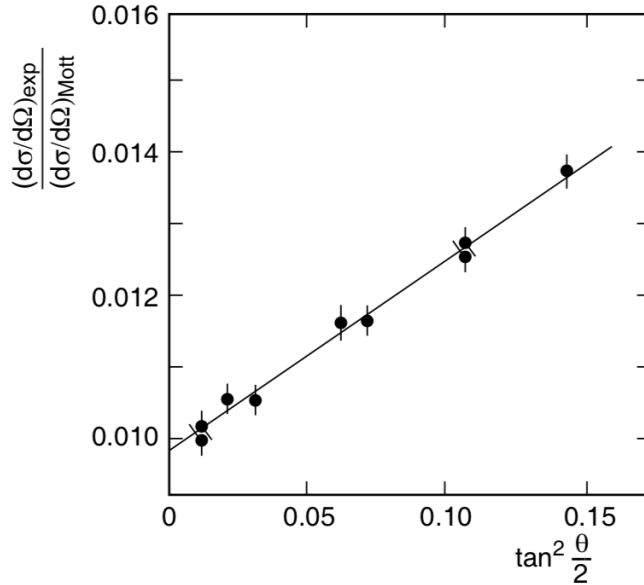


Figura 11.2: Rapporto fra la sezione d'urto misurata e quella di Mott calcolata, in funzione di $\text{tg}^2\vartheta/2$ per un valore del quadrato del quadri-impulso trasferito pari a $Q^2 = 2.5 \text{ GeV}^2/c^2$.

I dati sperimentali mostrano che il fattore di forma elettrico del protone e i fattori di forma magnetici del protone e del neutrone dipendono in

modo simile da Q^2 , calando, al suo crescere, in modo ben descritto da un'approssimazione con fattore di forma dipolare, come si vede in figura [11.3](#) ricordando anche quanto riportato in figura [7.21](#)

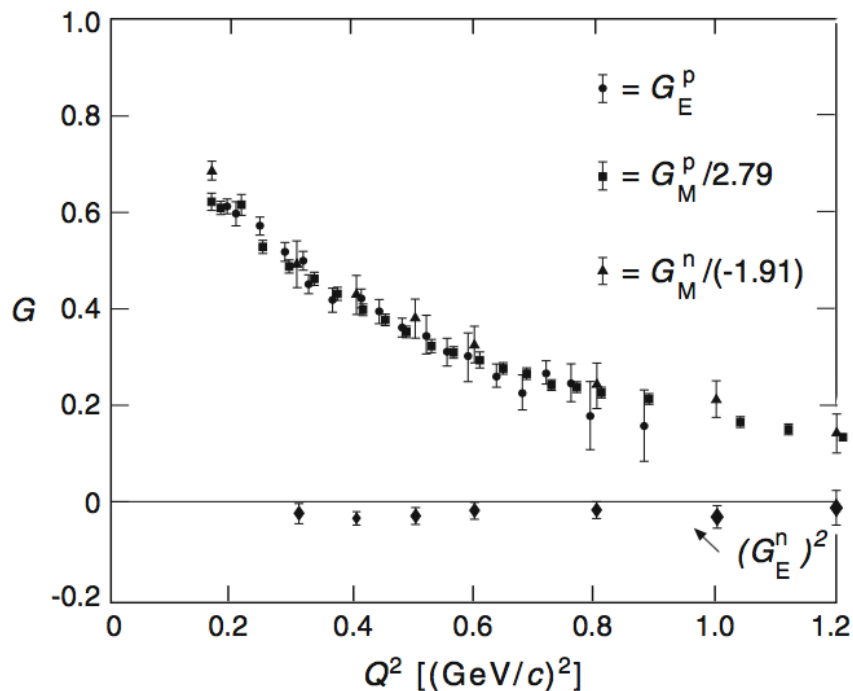


Figura 11.3: Fattori di forma elettrici e magnetici di protone e neutrone in funzione di Q^2 . Dati scalati dei fattori indicati per favorirne la sovrapposizione visiva onde evidenziare l'andamento "dipolare".

$$G_E^p(Q^2) \approx \frac{\mu_N G_M^p(Q^2)}{\mu_p} \approx \frac{\mu_N G_M^n(Q^2)}{\mu_n} \approx G^{dip}(Q^2) \quad (11.12)$$

$$\text{con, } G^{dip}(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{0.71 (GeV/c)^2}\right)^{-2}$$

Il neutrone, elettricamente neutro, ha un fattore di forma elettrico molto piccolo.

Si possono ottenere le distribuzioni di carica e di magnetizzazione all'interno del nucleone sfruttando la dipendenza dei fattori di forma da Q^2 , così come fatto anche per i nuclei, tuttavia l'interpretazione dei fattori di forma quali trasformate di Fourier di distribuzioni statiche di cariche o correnti ha senso soltanto per piccoli valori di Q^2 stesso, poichè solo in quel caso il tri-impulso e il quadri-impulso trasferiti approssimativamente coincidono. Il fattore di forma dipolare osservato e riportato nell'espressione [11.12](#), corrisponde a una distribuzione di

carica che decresce esponenzialmente

$$\rho(r) = \rho(0)e^{-ar} \quad \text{con,} \quad a = 4.27 \text{ fm}^{-1} \quad (11.13)$$

I nucleoni, da questo punto di vista, non appaiono nè come particelle puntiformi nè come distribuzioni omogenee di carica ma piuttosto come *sistemi diffusi*. Il raggio quadratico medio della distribuzione di carica nel protone e della magnetizzazione nel protone e nel neutrone hanno valori simili e possono essere dedotti dalla pendenza dell'andamento di $G_{E,M}(Q^2 = 0)$. Dal fattore di forma dipolare si ottiene

$$\langle r^2 \rangle_{dip} = -6\hbar^2 \left. \frac{dG^{dip}(Q^2)}{dQ^2} \right|_{Q^2=0} = \frac{12}{a^2} \simeq 0.66 \text{ fm}^2 \quad (11.14)$$

$$\text{da cui, } \sqrt{\langle r^2 \rangle_{dip}} \simeq 0.81 \text{ fm}$$

Misure precise dei fattori di forma che tengono conto di piccole deviazioni dalla parametrizzazione dipolare per piccoli valori di Q^2 danno, per il raggio di carica del protone

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle_p} \simeq 0.879 \text{ fm} \quad (11.15)$$

L'estensione delle misure a più alte energie, fino ad oltre i circa 30 GeV/c² per Q^2 , mostra alcune deviazioni dall'unità per il rapporto $\mu_N G_M^p(Q^2) / \mu_p G^{dip}(Q^2)$, come mostrato in figura [11.4](#)

- Fattore di forma elettrico del neutrone - Non disponendo di bersagli di neutroni liberi, le misure per ottenere i due fattori di forma elastici corrispondenti hanno richiesto tecniche più complesse di quanto è stato necessario per il protone. La gran parte delle informazioni su $G_M^n(Q^2)$ e $G_E^n(Q^2)$ sono state ottenute dalla diffusione elastica di elettroni su deuterio; in questo caso è ovviamente necessario correggere i dati misurati per gli effetti delle forze nucleari agenti fra protone e neutrone. La non completa correzione per questi effetti è responsabile dei valori negativi di $(G_E^n)^2$ mostrati in figura [11.3](#).

Un approccio ingegnoso ed elegante, messo a punto per determinare il raggio di neutroni liberi, consiste nell'utilizzare neutroni di bassa energia provenienti da un reattore e farli diffondere su elettroni legati in shell atomiche di nuclei pesanti, studiando poi le distribuzioni degli elettroni emessi. Ciò corrisponde sostanzialmente a una diffusione elettrone-neutrone a basso valore di Q^2 .

Dalle indagini sperimentali il neutrone appare elettricamente neutro soltanto se osservato dall'*esterno*, in quanto al suo *interno* contiene costituenti elettricamente carichi (quarks) che posseggono anche momenti magnetici.

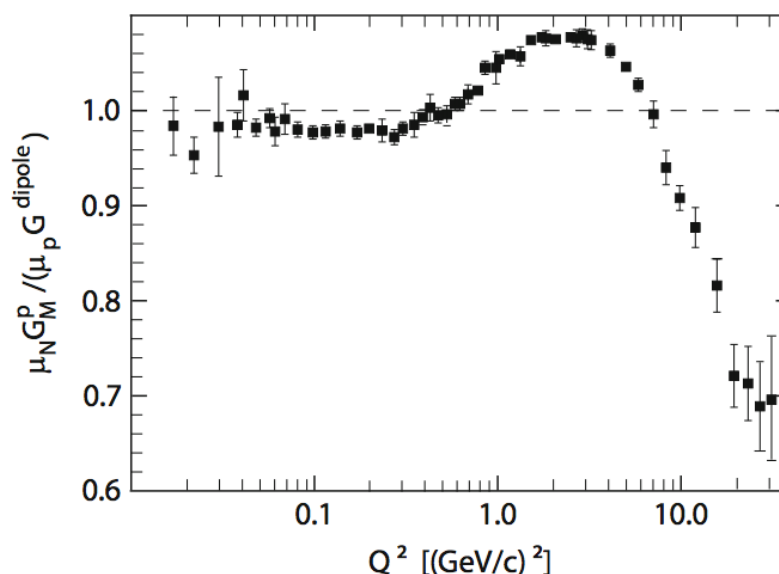


Figura 11.4: Rapporto tra il fattore di forma magnetico normalizzato e il fattore di forma dipolare per il protone in funzione di Q^2 .

Un'interpretazione in termini di trasformata di Fourier di una distribuzione statica di carica richiede una certa cautela, come già osservato anche per il protone, e se comunque la si effettua, il risultato che se ne trae in termini di densità radiale di carica $\rho^n(r)$ fornisce valori per essa positivi fino a raggi r pari a circa $0.5 \div 0.6$ fm, e negativi per r maggiori che si estendono fino a circa 2.5 fm. Calcoli effettuati sulla base di vari modelli forniscono risultati compatibili con questi.

11.2 Diffusione quasi-elastica

Fissata l'energia E degli elettroni del fascio incidente e l'angolo di diffusione, gli elettroni diffusi da reazioni elastiche del tipo analizzato nel paragrafo precedente hanno un'energia ben definita, data dalla [7.61](#)

$$E' \simeq \frac{E}{1 + \frac{E}{Mc^2} (1 - \cos\vartheta)} \quad (*) \quad (11.16)$$

Ripetendo la misura nelle stesse condizioni energetiche e allo stesso angolo di diffusione, ma con un bersaglio di nuclei più pesanti, costituiti da più nucleoni legati, lo spettro energetico osservato per gli elettroni diffusi è più complicato. Un esempio è mostrato in figura [11.5](#) con elettroni diffusi da un bersaglio di H_2O , quindi talvolta da un protone quasi libero e talvolta da un nucleo di ossigeno. Lo stretto picco ad $E' \approx 160$ MeV è dovuto alla

(*) Vedi paragrafo 7.3 allegato alla fine di questo fascicolo

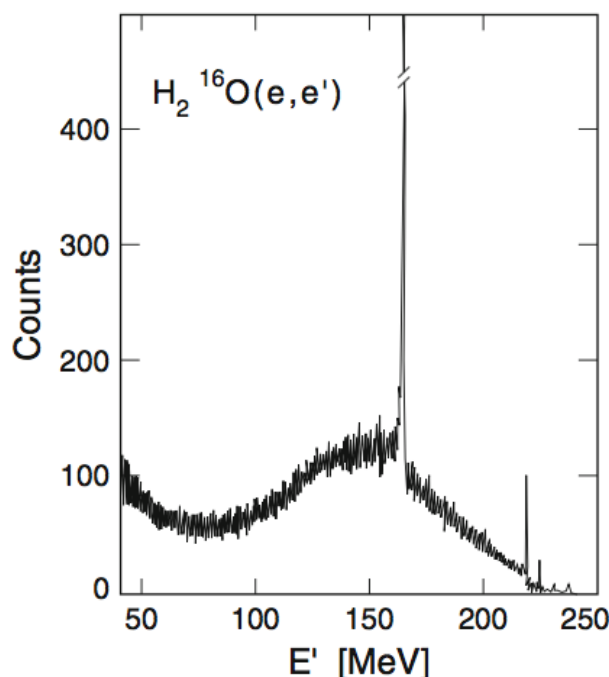


Figura 11.5: Spettro energetico di elettroni con energia iniziale $E = 246$ MeV, diffusi a 148.5° da un sottile bersaglio di H_2O .

diffusione elastica sui protoni quasi liberi dell'idrogeno ed è sovrapposto a una distribuzione larga il cui massimo è in corrispondenza di un'energia inferiore di qualche MeV a quella del picco elastico dovuto all'idrogeno. Questa parte dello spettro può essere identificata con la diffusione degli elettroni da singoli nucleoni di un nucleo di ^{16}O e il processo che la genera è detto *diffusione quasi-elastica*. Gli stretti picchi a più alta energia sono dovuti alla diffusione dal nucleo di ^{16}O come un tutto.

Sia lo spostamento a energie inferiori della coordinata del massimo che l'allargamento dello spettro quasi-elastico, sono portatori di informazioni sulla struttura interna del nucleo atomico. L'approssimazione *impulsiva* ⁴ adottata assume che l'elettrone interagisca soltanto con un singolo nucleone del nucleo, e che il nucleone sia di conseguenza espulso dal nucleo senza dar luogo a ulteriori interazioni con i restanti nucleoni del nucleo stesso.

Lo spostamento a energie inferiori del massimo della distribuzione risultante, rispetto all'energia della diffusione su nucleoni quasi liberi, è dovuto all'e-

⁴L'approssimazione impulsiva finora adottata presuppone che la traiettoria percorsa dalla particella diffusa nella regione d'interazione sia sempre rettilinea, secondo due direzioni coincidenti con quella dell'impulso della particella a grande distanza dalla zona d'interazione prima e dopo di questa, e associa il cambio di direzione all'azione "istantanea" della forza d'interazione che introduce una componente ortogonale di impulso.

nergia necessaria a strappare il nucleone dal nucleo.

Dall'allargamento della distribuzione, rispetto al picco elastico dovuto ai protoni quasi liberi dell'idrogeno, si deduce che il nucleo non è un oggetto "statico" costituito da nucleoni in ben definite posizioni. I nucleoni si comportano piuttosto come particelle "quasi libere" che si muovono un po' in tutte le direzioni, restando nel contempo confinati entro il volume che caratterizza il nucleo stesso, ed è questo loro movimento entro il nucleo che determina le differenze cinematiche rispetto a quanto sarebbe invece prevedibile immaginando ogni nucleone in una posizione stabile e ben definita entro il volume del nucleo⁵

Per capire meglio il fenomeno si immagini un nucleone di massa M , legato in un nucleo da un'energia potenziale nucleare efficace di intensità S e in moto entro il nucleo con un impulso \vec{P} tale da non doverlo considerare relativistico. L'energia di legame di tale nucleone nel nucleo è quindi pari ad $S - \vec{P}^2/2M$. Trascurando le interazioni residue con gli altri nucleoni e l'energia cinetica del resto del nucleo si consideri l'urto di un elettrone su questo nucleone.

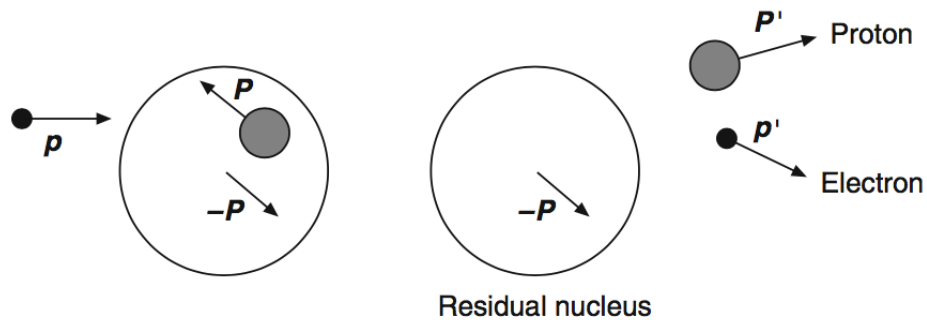


Figura 11.6: Schema dell'urto fra un elettrone e il nucleone di un nucleo.

L'analisi cinematica di questo processo dá:

$$\vec{p} + \vec{P} = \vec{p}' + \vec{P}' \quad \text{conservazione dell'impulso nel sistema e-p}$$

$$\vec{P}' = \vec{q} + \vec{P} \quad \text{conservazione dell'impulso nel sistema } \gamma - p$$

$$E + E_p = E' + E'_p \quad \text{conservazione dell'energia nel sistema e-p}$$

Nelle approssimazioni in cui si ha $E, E' \gg m_e c^2$ e $|\vec{P}|, |\vec{P}'| \ll Mc$, l'energia ν trasferita dall'elettrone al protone è un invariante relativistico

⁵Quest'osservazione è alla base delle ipotesi che portano al modello a gas di Fermi per un nucleo. Si veda in proposito anche il paragrafo 23

dato da

$$\begin{aligned}\nu &= E - E' = E'_p - E_p = \left(Mc^2 + \frac{\vec{P}'^2}{2M} \right) - \left(Mc^2 + \frac{\vec{P}^2}{2M} - S \right) \\ &= \frac{(\vec{P} + \vec{q})^2}{2M} - \frac{\vec{P}^2}{2M} + S = \frac{\vec{q}^2}{2M} + S + \frac{2|\vec{q}||\vec{P}|\cos\alpha}{2M}\end{aligned}\quad (11.17)$$

con α l'angolo compreso tra \vec{q} e \vec{P} . Assumendo che il moto del nucleone nel nucleo sia isotropo, ovvero con distribuzione delle velocità a simmetria sferica, si deduce che la distribuzione dei valori di ν deve essere simmetrica e centrata attorno al valore medio

$$\nu_0 = \frac{\vec{q}^2}{2M} + S \quad (11.18)$$

e con larghezza σ_ν data da

$$\sigma_\nu = \sqrt{\langle (\nu - \nu_0)^2 \rangle} = \frac{|\vec{q}|}{M} \sqrt{\langle \vec{P}^2 \cos^2 \alpha \rangle} = \frac{|\vec{q}|}{M} \sqrt{\frac{1}{3} \langle \vec{P}^2 \rangle} \quad (11.19)$$

In un prossimo capitolo si vedrà entro quali approssimazioni un nucleo possa essere descritto come un *gas di Fermi* in cui i nucleoni sono considerati quasi liberi. L'*impulso di Fermi* P_F risulta connesso all'impulso quadratico medio dalla relazione

$$P_F^2 = \frac{5}{3} \langle \vec{P}^2 \rangle \quad (11.20)$$

L'analisi dei risultati della diffusione quasi-elastica su svariati nuclei permette di determinare l'effettivo potenziale medio S e l'impulso di Fermi dei nucleoni. La dipendenza dal numero di massa A di S e di P_F sono state oggetto di studio nei primi anni '70 del ventesimo secolo e i risultati di una prima analisi sistematica, riportati in tabella, possono essere riassunti come segue:

- il potenziale nucleare medio efficace S cresce costantemente con la massa A dei nuclei, andando da circa 17 MeV per il Li sino a circa 44 MeV per il Pb;
- tranne che per i nuclei più leggeri, l'impulso di Fermi è pressochè indipendente dalla massa A dei nuclei e vale

$$P_F \approx 250 \text{ MeV}/c \quad (11.21)$$

Impulsi di Fermi P_F e valori del potenziale medio efficace S per alcuni nuclei. Le incertezze sono dell'ordine di 5 MeV/ c per P_F e di 3 MeV per S .

Nucleo	${}^6\text{Li}$	${}^{12}\text{C}$	${}^{24}\text{Mg}$	${}^{40}\text{Ca}$	${}^{59}\text{Ni}$	${}^{89}\text{Y}$	${}^{119}\text{Sn}$	${}^{181}\text{Ta}$	${}^{208}\text{Pb}$
P_F (MeV/ c)	169	221	235	249	260	254	260	265	265
S (MeV)	17	25	32	33	36	39	42	42	44

11.3 Dimensioni di pioni e Kaoni

Il metodo accennato per la determinazione del raggio del neutrone tramite l'interazione su elettroni legati in shell atomiche, può essere utilizzato anche per determinare il raggio di carica di altre particelle, quali pioni π o kaoni K , che come si vedrà sono entrambi mesoni. In tal caso si fanno interagire mesoni di alta energia con elettroni legati in atomi di idrogeno (non si usano qui atomi pesanti come invece per i neutroni) e il fattore di forma è ottenuto dall'analisi delle distribuzioni angolari degli elettroni emessi.

Pioni e kaoni sono entrambi particelle con spin 0 e quindi non possiedono fattore di forma magnetico, ma soltanto elettrico.

La dipendenza da Q^2 di questi fattori di forma, mostrata nelle immagini di figura [11.7](#) è descritta da un andamento del tipo

$$F(Q^2) = G_E(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{a^2\hbar^2}\right)^{-1} \quad (11.22)$$

$$\text{con,} \quad a^2 = \frac{6}{\langle r^2 \rangle}$$

che rappresenta un termine monopolare.

Le pendenze dei fit sui dati dei grafici in figura [11.7](#) valutate in prossimità di $Q^2 = 0$, forniscono i valori quadratici medi dei rispettivi raggi di carica, ottenendo

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle r^2 \rangle_\pi} &\simeq 0.67 \pm 0.02 \text{ fm} \\ \sqrt{\langle r^2 \rangle_K} &\simeq 0.58 \pm 0.04 \text{ fm} \end{aligned} \quad (11.23)$$

Pione e kaone hanno quindi entrambi un raggio di carica inferiore a quello del protone, e quello del kaone risulta inferiore a quello del pione. Ciò può essere capito in funzione delle diverse strutture interne delle tre particelle: il protone è come si vedrà composto da tre quark, pione e kaone sono invece entrambi composti da un quark e da un anti-quark. Nel caso del kaone uno dei due quark componenti è però decisamente più massivo degli altri.

Si accennerà più oltre come ciò si legi alle dimensioni della distribuzio-

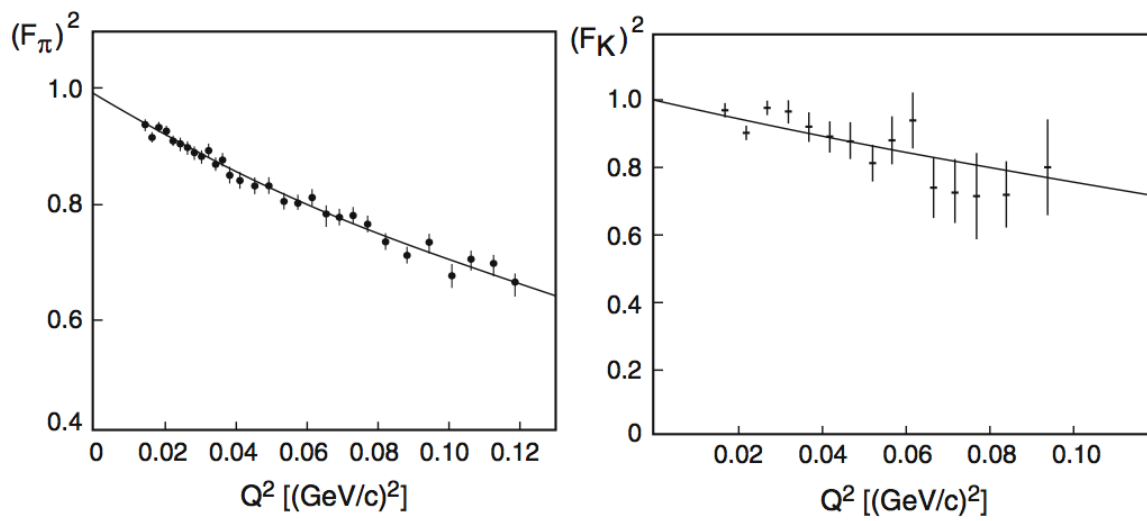


Figura 11.7: Fattori di forma elettrici per π e K in funzione di Q^2 .

ne di carica, trovando che le dimensioni di un sistema di quark calano all'aumentare delle masse dei quark costituenti.

Allegato

7.3 Cinematica per urti di particelle leggere su particelle massive

Nei prossimi paragrafi si tratteranno sezioni d'urto e si comincerà col caso di particelle leggere, elettroni o muoni, contro bersagli massivi, nucleoni o nuclei. Si richiama quindi la trattazione cinematica relativistica specifica che permette di descrivere queste tipologie di interazioni.

La componente zero del quadri-vettore spazio-tempo è proporzionale al tempo, e quella del quadri-impulso è proporzionale all'energia

$$\begin{aligned}x &= (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, \vec{x}) \\p &= (p_0, p_1, p_2, p_3) = (E/c, \vec{p})\end{aligned}\quad (7.48)$$

Il prodotto scalare Lorentz-invariante di due quadri-vettori a e b è definito come

$$a \cdot b = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (7.49)$$

Applicandolo al quadri-impulso si ha

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \quad (7.50)$$

Si noti che il quadrato del quadri-impulso coincide col quadrato della massa m a riposo moltiplicata per c^2 . Essendo un invariante deve avere lo stesso valore rispetto a qualsiasi sistema di riferimento inerziale e se si sceglie quello in cui la particella è a riposo, ne consegue $\vec{p} = 0$ ed $E = mc^2$, da cui

$$p^2 = m^2 c^2 \quad \text{ed} \quad m = \frac{\sqrt{p^2}}{c} \quad (7.51)$$

con m la *massa invariante*.

Dalle relazioni [7.50](#) e [7.51](#) si desume la relazione relativistica fra energia e impulso

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4 \quad (7.52)$$

e quindi

$$E \approx |\vec{p}| c \quad \text{se} \quad E \gg mc^2 \quad (7.53)$$

che nel caso di elettroni è soddisfatta già per energie di pochi MeV.

Si consideri come esempio la diffusione di un elettrone di massa m_e e quadri-impulso p da parte di una particella di massa M e quadri-impulso P , come schematizzato in figura [7.8](#). La conservazione di energia e impulso implica che la somma dei quadri-impulsi prima dell'urto deve uguagliare quella dopo l'urto

$$p + P = p' + P' \quad (7.54)$$

e quadrando

$$p^2 + 2pP + P^2 = p'^2 + 2p'P' + P'^2 \quad (7.55)$$

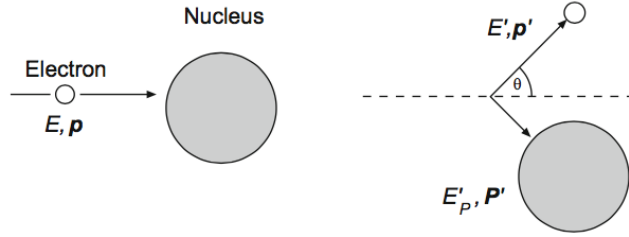


Figura 7.8: Interazione elastica fra un elettrone e un nucleo.

Nel caso di diffusione elastica le masse m_e ed M delle particelle collidenti restano invariate, e di conseguenza da

$$p^2 = p'^2 = m_e^2 c^2 \quad \text{e} \quad P^2 = P'^2 = M^2 c^2 \quad (7.56)$$

segue che

$$p \cdot P = p' \cdot P' \quad (7.57)$$

Tipicamente in questo tipo di interazioni si rivela soltanto l'elettrone diffuso e non la particella di rinculo. In tal caso si utilizza quindi la relazione

$$p \cdot P = p' \cdot (p + P - p') = p'p + p'P - m_e^2 c^2 \quad (7.58)$$

Ponendosi nel Sistema del Laboratorio (SL), in cui la particella di massa M e quadri-impulso P è a riposo prima dell'urto, si ha

$$\begin{aligned} p &= (E/c, \vec{p}) & p' &= (E'/c, \vec{p}') \\ P &= (Mc, \vec{0}) & P' &= (E'_P/c, \vec{P}') \end{aligned} \quad (7.59)$$

per cui, dalla [7.58](#) discende

$$E M c^2 = E' E - \vec{p} \cdot \vec{p}' c^2 + E' M c^2 - m_e^2 c^4 \quad (7.60)$$

Ad alte energie si può trascurare il termine $m_e^2 c^4$ e si ha anche, con buona approssimazione, $E \approx |\vec{p}| c$. Si ottiene in tal modo una relazione fra l'energia E' dell'elettrone diffuso, la sua energia E prima dell'urto e l'angolo ϑ di diffusione nel (SL)

$$E M c^2 \simeq E' E (1 - \cos\vartheta) + E' M c^2$$

ovvero

$$E' \simeq \frac{E}{1 + \frac{E}{M c^2} (1 - \cos\vartheta)} \quad (7.61)$$

L'energia di rinculo trasferita al bersaglio di massa M corrisponde alla differenza $E - E'$. Nel caso di diffusione elastica la relazione fra energia E' e

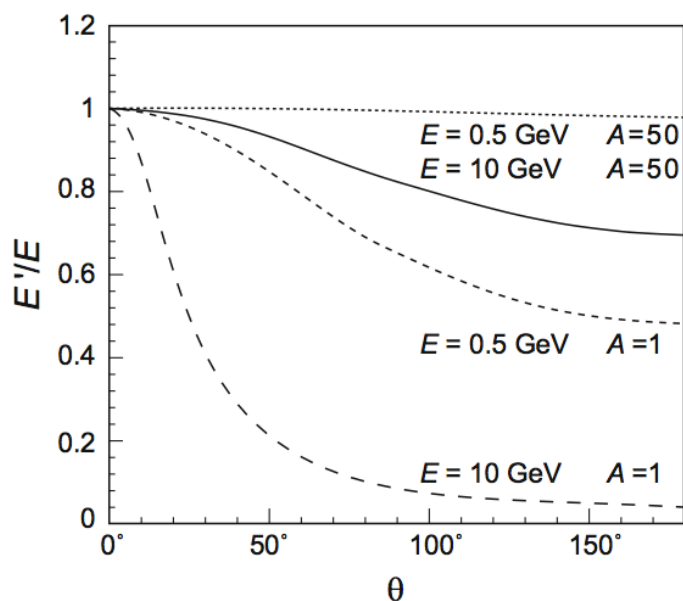


Figura 7.9: E'/E in funzione di ϑ per diffusione elastica di elettroni su nuclei con $A = 1$ e $A = 50$.

angolo ϑ di diffusione è quindi biunivoca, mentre ciò non vale nel caso di diffusione anelastica.

Dalla [7.61](#) si deduce che l'energia di rinculo del bersaglio cresce al crescere del rapporto fra la cosiddetta massa relativistica E/c^2 dell'elettrone e la massa M del bersaglio, in accordo con quanto si ottiene dall'approccio classico alla diffusione.

In figura [7.9](#) è riportato l'andamento di E'/E rispetto all'angolo ϑ di diffusione, per elettroni di energia relativamente bassa (0.5 GeV) e relativamente alta (10 GeV), incidenti su nuclei con $A = 1$ e $A = 50$. Per $E = 0.5$ GeV, nel caso di urto su nuclei con $A = 50$, si ha $(E - E')/E \simeq 0.02$.

Capitolo 8

Reazioni nucleari

Le prime reazioni nucleari indotte sono state prodotte nel laboratorio di Rutherford utilizzando particelle α da sorgenti radioattive. In alcuni di questi primissimi esperimenti le particelle α , come s'è visto, semplicemente rimbalzavano elasticamente sui nuclei bersaglio. Nel corso di altri esperimenti Rutherford fu in grado di osservare la modificazione o "trasmutazione" di specie nucleari come nella seguente reazione studiata nel 1919



Il primo acceleratore di particelle in grado di indurre reazioni nucleari fu realizzato da Cockroft e Walton che nel 1930 osservarono la reazione



In questo paragrafo si tratteranno reazioni che vengono classificate di *bassa energia*, ovvero fino a poche decine di MeV. Le reazioni nell'intervallo $100 \text{ MeV} \div 1 \text{ GeV}$ sono dette di *media energia* e comportano anche la produzione di mesoni e la trasformazione di protoni in neutroni e viceversa. A energie superiori si possono produrre anche altre particelle più massive e determinare riarrangiamenti dei quark che costituiscono i nucleoni interagenti.

Una tipica reazione nucleare $a + X \rightarrow Y + b$ si scrive anche



con a il proiettile, X il nucleo bersaglio, eventualmente a riposo nel SL, Y e b i prodotti di reazione. Spesso Y è un prodotto pesante che si ferma nella struttura del bersaglio e non viene osservato direttamente, mentre b è leggero e può essere rivelato.

Se a è un raggio γ la reazione è detta *foto-nucleare*, se b è un raggio γ la reazione viene detta *cattura radiativa*.

Se a e b coincidono, e così pure X e Y , si ha diffusione *elastica* se Y e b sono

nel loro stato fondamentale, *anelastica* se Y o b o entrambi sono in uno stato eccitato.

Talvolta a e b sono la stessa particella ma la reazione produce un ulteriore nucleone nel canale d'uscita, espulso dal nucleo X per effetto dell'urto; questo meccanismo di reazione è detto di *knockout*.

Vi sono *reazioni di trasferimento* in cui uno o più nucleoni vengono scambiati fra proiettile e bersaglio, come nel caso in cui un deutone incidente si trasforma in un protone o in un neutrone in uscita con la cessione di un neutrone o di un protone al bersaglio X per trasformarlo in Y .

Le reazioni possono essere classificate anche in base al meccanismo che le governa. Le reazioni di trasferimento appartengono ad esempio alle cosiddette *reazioni dirette*, nel corso delle quali solo pochi nucleoni, tipicamente del bersaglio, prendono effettivamente parte al processo, con la restante parte dei nucleoni del bersaglio che svolgono un ruolo di sostanziali spettatori passivi.

Questo tipo di reazioni porta alla rimozione o all'inserimento di singoli nucleoni, permettendo di studiare direttamente la struttura a shell dei nuclei. C'è poi l'altro caso estremo, detto meccanismo del *nucleo composto*, in cui proiettile e bersaglio si fondono per un breve lasso di tempo durante il processo, ripartendosi completamente l'energia disponibile prima che il sistema così costituito, detto appunto *nucleo composto*, si disecciti emettendo uno o più nucleoni in un modo che ricorda l'evaporazione di una molecola da un liquido caldo.

Fra questi due casi estremi trovano posto le cosiddette *reazioni di risonanza*, nel corso delle quali il proiettile forma col bersaglio uno stato *quasi-legato* prima dell'emissione del prodotto leggero della reazione.

8.1 Leggi di conservazione

Per lo studio delle reazioni nucleari vanno naturalmente tenute in considerazione delle leggi di conservazione.

La conservazione dell'*energia totale* e dell'*impulso totale* sono utilizzate per correlare le energie misurabili dei prodotti di reazione alle energie note delle particelle incidenti.

Si può utilizzare l'energia misurata di b per dedurre l'energia d'eccitazione degli stati di Y o la differenza di massa tra X e Y .

Per i processi a bassa energia, nel corso dei quali non hanno luogo produzioni di pioni e/o riarrangiamenti dei quark costituenti, vale la conservazione separata del *numero di protoni e di neutroni*, che deriva dalla più generale conservazione del *numero barionico*.

Le interazioni deboli hanno un ruolo trascurabile sulla scala temporale caratteristica delle reazioni nucleari, che è dell'ordine di $10^{-16} \div 10^{-22}$ s.

La conservazione del *momento angolare* aiuta nel correlare gli spin delle par-

ticelle del canale d'ingresso col momento angolare orbitale dei prodotti dei canali d'uscita delle reazioni, deducibili da misure delle loro distribuzioni angolari. Si può così risalire agli spin degli specifici stati nucleari.

La conservazione della *parità* permette, noto il momento angolare orbitale dei prodotti di reazione, tramite la regola $(-1)^\ell$ e dalla conoscenza degli altri valori di parità, di risalire alle parità incognite degli eventuali stati eccitati.

8.2 Condizioni sperimentali

Lo studio sperimentale accurato di reazioni nucleari richiede che siano soddisfatti certi criteri per quanto concerne i fasci incidenti:

- _ devono essere ben collimati e focheggiati, in modo da poter definire con precisione una direzione di riferimento rispetto alla quale determinare gli angoli ϑ e φ d'emissione dei prodotti di reazione;
- _ l'energia cinetica delle particelle incidenti deve essere ben definita;
- _ la loro intensità deve essere monitorabile con precisione e adeguata per poter ottenere in tempi ragionevoli i necessari livelli di significatività statistica per i risultati cercati;
- _ se si vogliono effettuare misure di tempi di volo può essere necessario che il fascio sia pulsato e comunque serve un segnale veloce di riferimento associato ad ogni particella o pacchetto di particelle del fascio; bisogna anche che la separazione temporale fra ogni particella/pacchetto e quella/o precedente o successiva/o sia almeno maggiore della risoluzione temporale dell'apparato di misura;
- _ le particelle del fascio devono poter essere polarizzabili;
- _ il trasporto delle particelle del fascio verso il bersaglio deve avvenire con la minor degradazione possibile delle loro caratteristiche dinamiche.

8.4 Diffusione da potenziale nucleare

Della diffusione da potenziale coulombiano si è detto in paragrafi precedenti, ora si tratta della diffusione da potenziale nucleare.

Data l'intensità dell'interazione non ci si trova nelle condizioni per poter sfruttare la teoria delle perturbazioni e non si può dunque applicare l'approssimazione di Born.

Usando proiettili con energie sufficientemente alte però, la loro lunghezza d'onda di De Broglie $\lambda = h/p$ può risultare inferiore alle dimensioni nucleari tipiche da pensare di utilizzare un approccio di tipo "ottico", confortati in questo dal fatto che le sezioni d'urto sperimentali elastiche mostrano forti analogie con gli andamenti tipici dei fenomeni diffrattivi ottici da parte di un disco opaco.

In ottica la diffrazione da un bordo netto produce una figura di massimi e minimi il cui primo minimo si presenta a un angolo ϑ tale che $\text{sen}\vartheta \simeq \lambda/R$, con R il raggio del disco. I successivi minimi si presentano quasi ugualmente spazati e i massimi intermedi calano d'ampiezza al progredire di ϑ .

Un nucleo può assorbire efficacemente nucleoni incidenti, per cui ha senso l'analogia con un disco opaco. Nel caso di proiettili carichi bisogna tener conto della concorrenza fra meccanismi d'interazione coulombiana e nucleare. Per osservare la diffusione elastica di nucleoni nella forma *diffrattiva* bisogna quindi riuscire ad eliminare gli effetti coulombiani e ciò può essere ottenuto in due modi. Il primo consiste nell'utilizzare proiettili privi di carica elettrica come i neutroni, che però sentono la forza nucleare.

Le sezioni d'urto differenziali in questi casi mostrano dei minimi sempre superiori a zero, in quanto la superficie nucleare non è equiparabile a un bordo netto, ma piuttosto a una struttura diffusa. Per ridurre gli effetti coulombiani con proiettili carichi si ricorre a due passi successivi, il primo dei quali consiste nell'utilizzare proiettili di energia sufficiente a contrastare la barriera coulombiana, onde permettere il raggiungimento di piccoli valori di massimo avvicinamento fra proiettile e bersagli; quindi si osservano in particolare gli andamenti ad angoli grandi, dove la sezione d'urto coulombiana decresce molto e rapidamente. Uno dei risultati della diffusione elastica di nucleoni su nuclei è la determinazione dei raggi nucleari; anche se i valori ottenuti dipendono in una certa misura dal modello di potenziale utilizzato per descrivere l'interazione, si ottiene comunque che i risultati sono generalmente consistenti con l'ipotesi che per un nucleo simmetrico si possa considerare una forma sferica con raggio espresso dalla $R = R_0 A^{1/3}$, con $R_0 \simeq 1.25$ fm.

Una diffusione anelastica coulombiana implica che il nucleo, dopo l'interazione, viene lasciato in una condizione eccitata a carico di parte dell'energia cinetica del proiettile e anche quest'ultimo potrebbe essere in una condizione d'eccitazione, dopo l'urto.

Se in questi casi si misura la distribuzione in energia delle particelle diffuse

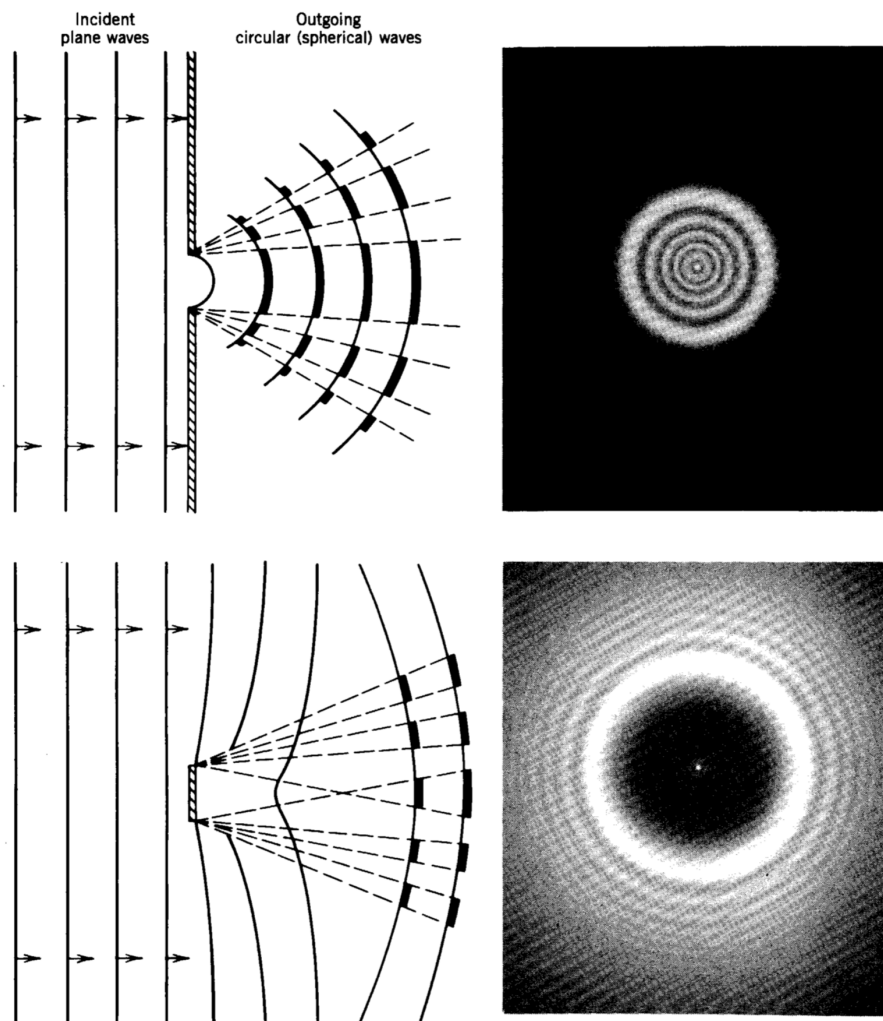


Figura 8.6: In alto la rappresentazione della diffrazione della luce prodotta da una piccola apertura circolare; in basso quella prodotta da un piccolo disco opaco circolare (Atlas of Optical Phenomena - 1962).

a un angolo solido definito, si osserva la presenza di un singolo picco elastico, alla più alta energia, e di picchi a energie inferiori ognuno dei quali corrisponde a interazioni anelastiche associate a specifici stati eccitati del nucleo bersaglio. La posizione di ognuno di questi picchi permette di risalire all'energia dello stato eccitato che lo ha generato, e la sua popolazione è proporzionale alla sezione d'urto per la reazione d'eccitazione dello stato ad esso associato.

Le misure delle distribuzioni angolari delle particelle diffuse dai vari stati eccitati permettono di risalire ai valori di spin-parità degli stessi.

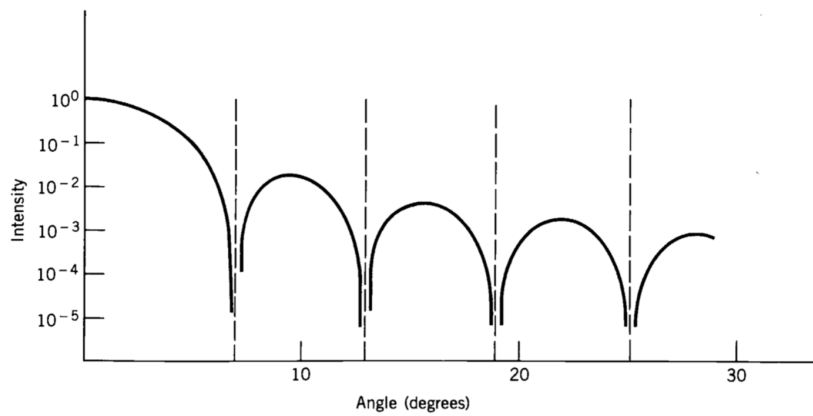


Figura 8.7: Figura di diffrazione prodotta da luce incidente su un foro circolare. L'andamento è calcolato per una lunghezza d'onda dieci volte superiore al diametro dell'apertura circolare. I minimi hanno intensità zero.

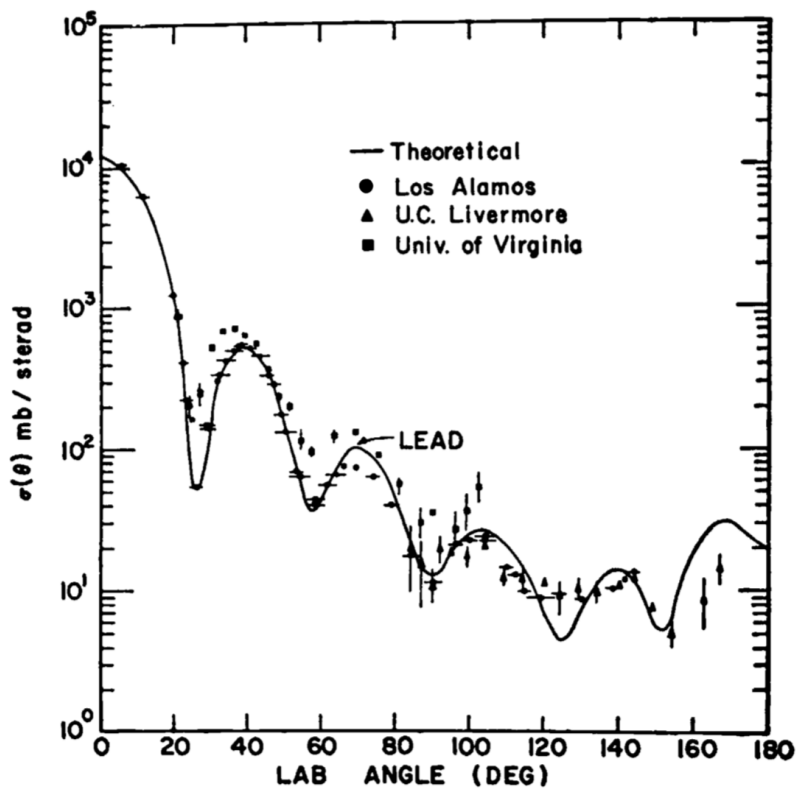


Figura 8.8: Diffusione elastica di neutroni da 14 MeV su piombo (S.Fernbach - Rev. Mod. Phys. 30 (1958) 415).

8.5 Diffusione in onde parziali

Si illustra ora un approccio che permette di dedurre espressioni per le sezioni d'urto confrontabili con quelle sperimentali, di utilità anche negli studi a energie superiori, comprese quelle per lo studio della struttura a quark dei nucleoni e degli adroni in genere.

Si consideri un fascio di particelle incidenti lungo l'asse z di un sistema di riferimento (x, y, z) e si supponga di avere un centro diffusore di massa $\approx \infty$ posizionato nell'origine del sistema di riferimento. Si assuma di poter rappresentare ogni particella del fascio incidente come un'onda piana e^{ikz} con impulso di modulo $p = \hbar k$, e le particelle in uscita siano rappresentate da onde sferiche.

L'analisi del problema diventa quindi più agevole se si esprime l'onda piana incidente anch'essa come sovrapposizione di onde sferiche

$$\psi_{inc} = A e^{ikz} = A \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} (2\ell + 1) j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos\vartheta) \quad (8.15)$$

con A costante di normalizzazione.

Le funzioni radiali $j_{\ell}(kr)$ sono le *funzioni sferiche di Bessel*, soluzioni della parte radiale dell'equazione di Schrödinger in una regione lontanata dal bersaglio, dove il potenziale nucleare è ormai trascurabile. Le funzioni angolari $P_{\ell}(\cos\vartheta)$ sono i *polinomi di Legendre*

$$\begin{aligned} P_0(\cos\vartheta) &= 1 \\ P_1(\cos\vartheta) &= \cos\vartheta \\ P_2(\cos\vartheta) &= \frac{1}{2} (3 \cos^2\vartheta - 1) \\ &\text{ecc.} \end{aligned} \quad (8.16)$$

Si dice in questo caso di aver sviluppato l'onda incidente e quella diffusa in *onde parziali*, ognuna delle quali corrispondente a uno specifico valore ℓ del momento angolare. La procedura è possibile se il potenziale d'interazione nucleare è di tipo "centrale". Questo approccio si rivela utile finché risulta sufficiente considerare l'effetto del potenziale nucleare soltanto sulle onde parziali di ordine ℓ più basso.

Semiclassicamente, se una particella di impulso $p = 2\pi\hbar/\lambda$ interagisce con parametro d'urto b , allora il momento angolare relativo è dato da

$$\ell \hbar = p b \quad \text{da cui:} \quad b = \ell \frac{\hbar}{p} = \ell \frac{\lambda}{2\pi} = \ell \lambda \quad (8.17)$$

Siccome ℓ può assumere soltanto valori interi, semiclassicamente si può dire che particelle con momento angolare compreso tra $0\hbar$ e $1\hbar$ interagiscono con parametri d'urto compresi fra $b = 0$ e $b = \lambda$, e quindi attraversano

un'area circolare efficace (sezione d'urto) pari a $\pi\lambda^2$.

Per $\hbar \leq \ell \leq 2\hbar$ la sezione d'urto risulta un anello circolare di raggio interno λ , raggio esterno 2λ , e area $3\pi\lambda^2$.

Si può dunque immaginare di suddividere l'area d'interazione in zone, ognuna corrispondente a un definito valore di momento angolare ℓ e di area

$$\pi [(\ell + 1)\lambda]^2 - \pi (\ell\lambda)^2 = (2\ell + 1)\pi\lambda^2$$

Si può, in modo semiclassico, ragionevolmente stimare il massimo valore di b come $b_{max} = R_1 + R_2$, ovvero la somma del raggio del nucleo incidente con quello del nucleo bersaglio, deducendo quindi che il massimo valore di ℓ può essere in tal caso $\ell_{max} = b_{max}/\lambda$, e la sezione d'urto corrispondente

$$\sigma = \sum_{\ell=0}^{R/\lambda} (2\ell + 1)\pi\lambda^2 = \pi (b_{max} + \lambda)^2 \quad (8.18)$$

che seppur semiclassica è una stima ragionevole, tenendo conto, tramite il termine λ , dell'indeterminazione spaziale quantisticamente associata al proiettile.

Asintoticamente, ovvero lontano dal bersaglio, le funzioni di Bessel si approssimano a

$$\begin{aligned} j_\ell(kr) &\simeq \frac{\text{sen}(kr - \ell\pi/2)}{kr} \quad \text{per } (kr \gg \ell) \\ &= \frac{e^{i(kr - \ell\pi/2)} - e^{-i(kr - \ell\pi/2)}}{2ikr} \end{aligned} \quad (8.19)$$

per cui

$$\psi_{inc} = \frac{A}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell+1} (2\ell + 1) \left[e^{-i(kr - \ell\pi/2)} - e^{i(kr - \ell\pi/2)} \right] P_\ell(\cos\vartheta) \quad (8.20)$$

dove il primo termine in parentesi quadra rappresenta un'onda sferica entrante convergente verso il bersaglio e il secondo termine un'onda sferica uscente dal bersaglio. La sovrapposizione delle due costituisce l'onda piana.

Come effetto della causalità la diffusione può naturalmente agire solo sull'onda uscente e lo può fare in due modi: tramite una modificazione della fase e/o tramite una modificazione dell'ampiezza.

La modificazione dell'ampiezza, se non si considera la possibilità della trasformazione di parte dell'energia incidente in ulteriori particelle uscenti, implica sostanzialmente una riduzione del numero di particelle nel canale d'uscita rispetto a quelle coinvolte nel canale d'ingresso. Ma si ricordi che la funzione d'onda rappresenta soltanto le particelle con impulso pari ad $\hbar k$. In presenza di diffusione anelastica, energia e identità delle particelle uscenti possono cambiare, rispetto al canale d'ingresso. Al termine e^{ikr} saranno

quindi generalmente associate anche particelle provenienti da diffusioni anelastiche.

Le diffusioni determinate da una specifica causa d'interazione costituiscono quello che vien detto un definito *canale di reazione*. Alcuni canali di reazione possono essere chiusi per le particelle interagenti, se ad esempio non ci sono abbastanza energia e/o momento angolare disposizione.

Per tener conto delle conseguenti variazioni nelle onde parziali uscenti di ordine ℓ -mo si introduce un coefficiente complesso η_{ℓ} nel termine d'onda uscente e^{ikr} nell'equazione [8.20](#) che diventa

$$\psi_{inc} = \frac{A}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell+1} (2\ell+1) \left[e^{-i(kr-\ell\pi/2)} - \eta_{\ell} e^{i(kr-\ell\pi/2)} \right] P_{\ell}(\cos\vartheta) \quad (8.21)$$

La [8.21](#) rappresenta quindi la sovrapposizione di onde incidenti e diffuse: $\psi = \psi_{inc} + \psi_{dof}$. Sottraendo la [8.21](#) alla [8.20](#) si ottiene l'onda diffusa

$$\begin{aligned} \psi_{dif} &= \frac{A}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell+1} (2\ell+1) i (1-\eta_{\ell}) e^{i(kr-\ell\pi/2)} P_{\ell}(\cos\vartheta) \\ &= \frac{A}{2k} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) (1-\eta_{\ell}) P_{\ell}(\cos\vartheta) \end{aligned} \quad (8.22)$$

Se si considerano i contributi a ψ_{dif} relativi esclusivamente ai valori del numero d'onda k corrispondenti a quelli dell'onda incidente, allora si ottiene la rappresentazione della diffusione elastica.

Si può quindi introdurre la densità di corrente diffusa come

$$\begin{aligned} j_{diff} &= \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi_{dif}^* \frac{\partial \psi_{dif}}{\partial r} - \frac{\partial \psi_{dif}^*}{\partial r} \psi_{dif} \right) \\ &= |A|^2 \frac{\hbar}{4mkr^2} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i (1-\eta_{\ell}) P_{\ell}(\cos\vartheta) \right|^2 \end{aligned} \quad (8.23)$$

Essendo la corrente incidente data da

$$j_{inc} = \frac{\hbar k}{m} |A|^2 \quad (8.24)$$

si ottiene, per la sezione d'urto differenziale

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4k^2} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i (1-\eta_{\ell}) P_{\ell}(\cos\vartheta) \right|^2 \quad (8.25)$$

Integrando i polinomi di Legendre su tutto l'angolo solido si ottiene la sezione d'urto di diffusione

$$\sigma_{dif} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \pi \lambda^2 (2\ell+1) |1-\eta_{\ell}|^2 \quad (8.26)$$

Nel caso di interazione esclusivamente elastica $|\eta_{\ell}| = 1$ e convenzionalmente si pone $\eta_{\ell} = e^{2i\delta_{\ell}}$, dove δ_{ℓ} rappresenta lo sfasamento dell'onda parziale di ordine ℓ . In questo caso $|1 - \eta_{\ell}|^2 = 4 \sin^2 \delta_{\ell}$, e

$$\sigma_{dif} = \sum_{\ell=0}^{\infty} 4\pi\lambda^2 (2\ell + 1) \sin^2 \delta_{\ell} \quad (8.27)$$

Definendo la *sezione d'urto di reazione* σ_r come quella che tien conto di tutti i possibili canali di reazione tranne di quello elastico, per esprimerla bisogna considerare il rateo con cui le particelle diffuse scompaiono dal canale con un particolare numero d'onda k partendo dalla [8.21](#). Si considera praticamente la differenza fra corrente entrante e corrente uscente ottenendo

$$|j_{inc}| - |j_{out}| = \frac{|A|^2 \hbar}{4mkr^2} \left[\left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^{\ell+1} e^{i\ell\pi/2} P_{\ell}(\cos\vartheta) \right|^2 - \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^{\ell+1} \eta_{\ell} e^{i\ell\pi/2} P_{\ell}(\cos\vartheta) \right|^2 \right] \quad (8.28)$$

e la sezione d'urto di reazione diventa

$$\sigma_r = \sum_{\ell=0}^{\infty} \pi\lambda^2 (2\ell + 1) (1 - |\eta_{\ell}|^2) \quad (8.29)$$

La sezione d'urto totale che tien conto di tutti i processi è quindi

$$\sigma_{Tot} = \sigma_{dif} + \sigma_r = \sum_{\ell=0}^{\infty} 2\pi\lambda^2 (2\ell + 1) (1 - \text{Re } \eta_{\ell}) \quad (8.30)$$

Da quanto ottenuto si possono trarre alcune importanti osservazioni:

- La diffusione elastica può manifestarsi anche in assenza di ogni altro tipo d'interazione, come si vede dalla [8.29](#) se $|\eta_{\ell}| = 1$, mentre non si può avere interazione anelastica senza la contemporanea presenza anche di una componente elastica non nulla. Pensando a un processo di tipo diffrattivo ciò equivale a dire che se delle particelle sono rimosse da un fascio incidente dando luogo a una sorta di "ombra" dietro il bersaglio, allora vi saranno delle particelle che per effetto dell'interazione col bersaglio verranno diffratte nella zona d'ombra.
- Considerando il bersaglio alla stregua di un disco opaco che assorba tutte le onde parziali fino a quelle di ordine $\ell = b_{max}/\lambda$ ($\eta_{\ell} = 0$ implica assorbimento completo) e non perturbi quelle per $\ell > b_{max}/\lambda$ ($\eta_{\ell} = 1$), si ha

$$\sigma_{dif} = \pi (b_{max} + \lambda)^2 \quad (8.31)$$

e

$$\sigma_r = \pi (b_{max} + \lambda)^2 \quad (8.32)$$

da cui

$$\sigma_{Tot} = 2\pi (b_{max} + \lambda)^2 \quad (8.33)$$

per cui la sezione d'urto totale vale il doppio della sezione d'urto geometrica. È un effetto "non classico" e può essere capito sempre tenendo in considerazione la zona d'"ombra" prodotta dal nucleo bersaglio che però non può limitarsi ad assorbire ma deve appunto anche diffrangere entro la zona d'ombra.

Questi risultati possono essere utilizzati per indagare la struttura dei nuclei: si ipotizza una forma di potenziale d'interazione e si risolve la corrispondente equazione di Schrödinger nella regione d'interazione $0 \leq r \leq R$, imponendo condizioni di continuità agli estremi. Si può così trovare η_ℓ e provare a valutare la plausibilità della forma scelta per il potenziale dal confronto con i dati sperimentali per σ_{dif} e σ_r .

8.6 Interazioni neutroni-nuclei

Per sondare la distribuzione di materia in quanto tale di un nucleo, serve una "sonda" che interagisca sia con i protoni che con i neutroni, ma che non dia luogo a interazioni elettromagnetiche, per poter separare l'effetto coulombiano dal resto.

Si può in proposito sfruttare la diffusione elastica di neutroni su nuclei.

In ottica si considera la contemporanea presenza di rifrazione e riflessione che non modificano l'intensità totale della luce, e di assorbimento che invece riduce l'intensità totale della luce, introducendo un indice di rifrazione complesso la cui parte reale descrive riflessione e rifrazione, e la cui parte immaginaria descrive invece l'assorbimento.

Nel caso della diffusione di neutroni da nuclei ci si trova di fronte a una tipologia di fenomeni simili in quanto il neutrone incidente con un impulso \vec{p} può eccitare livelli nucleari o produrre altre reazioni, e in tal caso non è più presente nello stato finale, perlomeno non con i valori di energia e impulso iniziali. Si può quindi considerarlo come "assorbito" e ciò vale anche quando subisce una reazione "anelastica", poichè in tal caso sarà infatti passato da uno stato di una certa energia ad un stato con un'altra energia. Esso è stato dunque "sottratto" al suo stato iniziale e questo equivale all'averlo "assorbito". Si può quindi descrivere il fenomeno con un potenziale complesso la cui parte immaginaria è responsabile dell'assorbimento del neutrone.

Utilizzando un bersaglio con numero di massa A non piccolo ($A \gtrsim 16$), si dispone potenzialmente di un numero rilevante di suoi possibili modi d'eccitazione, legati al corrispondentemente gran numero di suoi possibili livelli, e

si può ragionevolmente pensare al nucleo come un buon assorbitore di neutroni incidenti, almeno in un certo intervallo di energie.

Sperimentalmente si osserva che la sezione d'urto totale per neutroni su nuclei pesanti a partire da alcune decine di MeV è sostanzialmente costante al crescere delle energie fino ai valori più alti, come mostrato nelle figure [8.9](#) e [8.10](#). Dal valore misurato della sezione d'urto totale si può quindi otte-

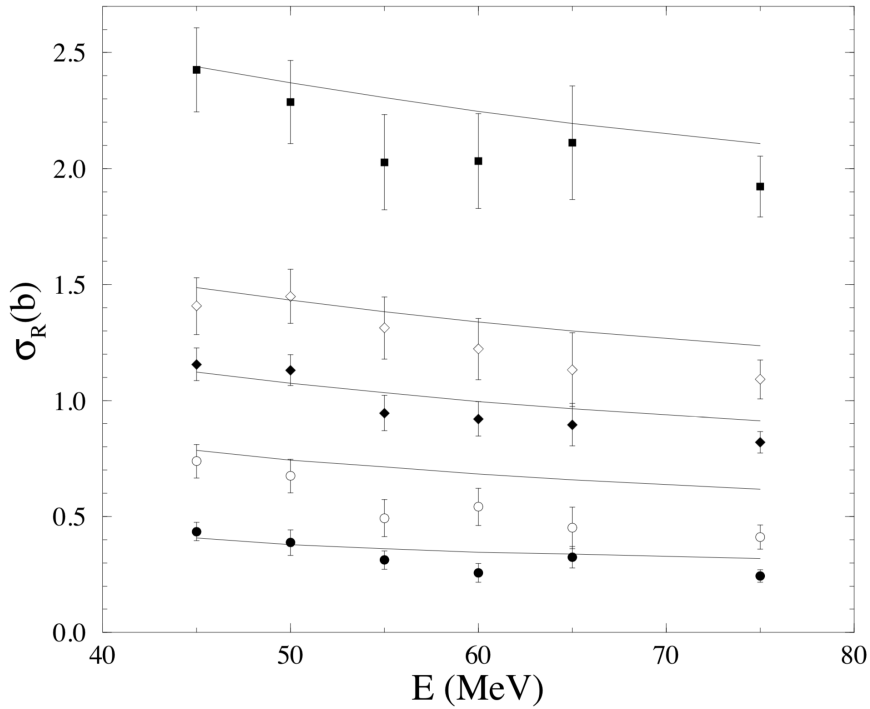


Figura 8.9: Sezione d'urto totale di reazione per neutroni su ^{12}C , ^{28}Si , ^{56}Fe , ^{90}Zr e ^{208}Pb . Le curve sono fit con previsioni di modello ottico.

nera $R \simeq (b_{max} + \lambda)$ che a meno delle "dimensioni" del neutrone incidente rappresenta l'estensione radiale della distribuzione di materia del nucleo che sente l'interazione forte. Anche in questo caso, al variare di A , si trova che vale

$$R = R_0 A^{1/3} \quad (8.34)$$

con R_0 leggermente superiore al valore trovato per diffusione coulombiana. Utilizzando la distribuzione di Woods-Saxon per effettuare un *best-fit* separatamente sui dati provenienti dalla diffusione di elettroni e su quelli provenienti dalla diffusione di neutroni, si ottiene rispettivamente

$$\begin{aligned} R_0 = 1.07 \text{ fm} \quad , \quad a = 0.55 \text{ fm} \quad , \quad (\text{elettroni}) \\ R_0 = 1.25 \text{ fm} \quad , \quad a = 0.65 \text{ fm} \quad , \quad (\text{neutroni}) \end{aligned} \quad (8.35)$$

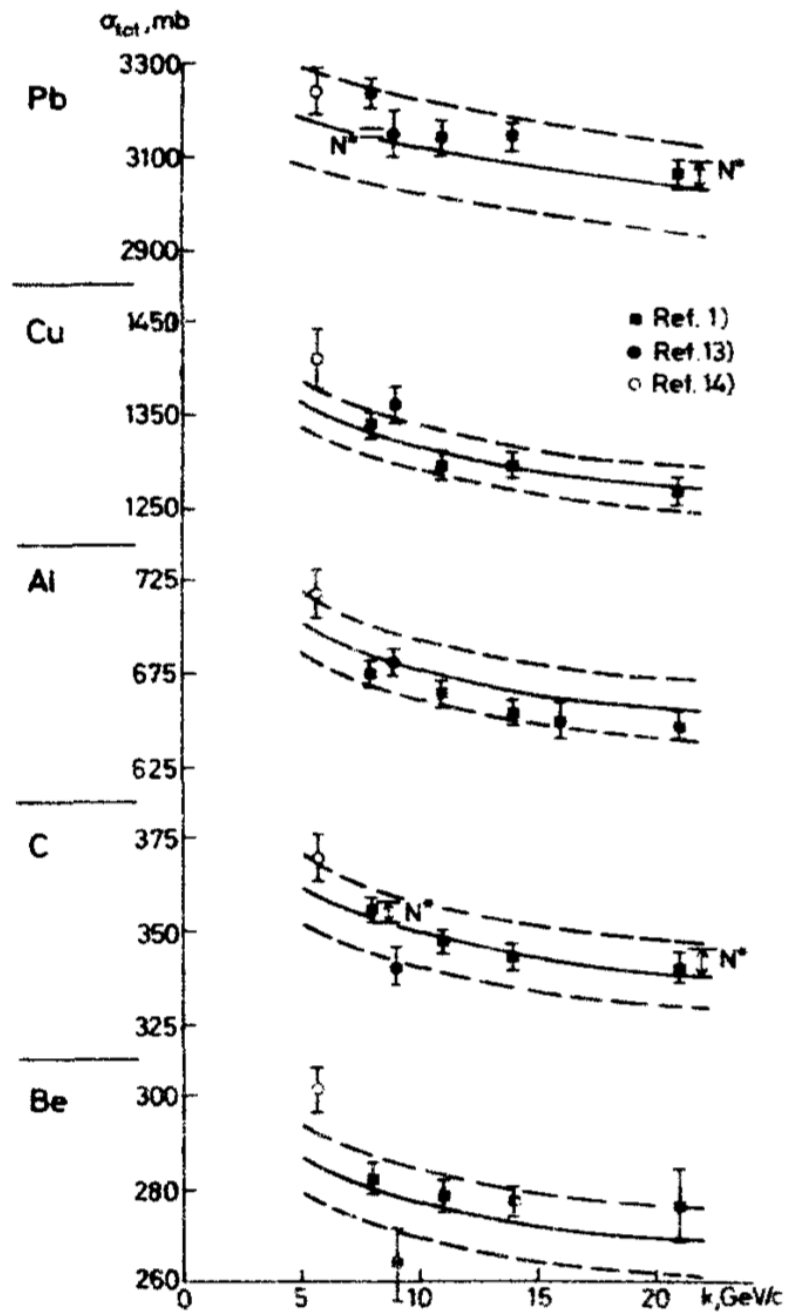


Figura 8.10: Sezioni d'urto totali n-nucleo per impulsi maggiori di 5 GeV/c [G.V. Bochman et al., Phys.Lett. 33B (1970) 222].

Alle energie considerate gli elettroni hanno lunghezze d'onda molto inferiori alle dimensioni nucleari esplorate, sono sostanzialmente puntiformi, per cui la distribuzione di carica nucleare va pensata associata ai "centri" dei protoni del nucleo; nell'interazione forte fra neutroni e nucleo invece, oltre che le dimensioni non più trascurabili della sonda neutronica, cui bisogna pensare associato un opportuno fattore di forma, bisogna considerare anche le dimensioni fisiche finite di ogni singolo nucleone. Tutto ciò concorre alle differenze ottenute nei due casi. Naturalmente, al crescere dell'energia dei

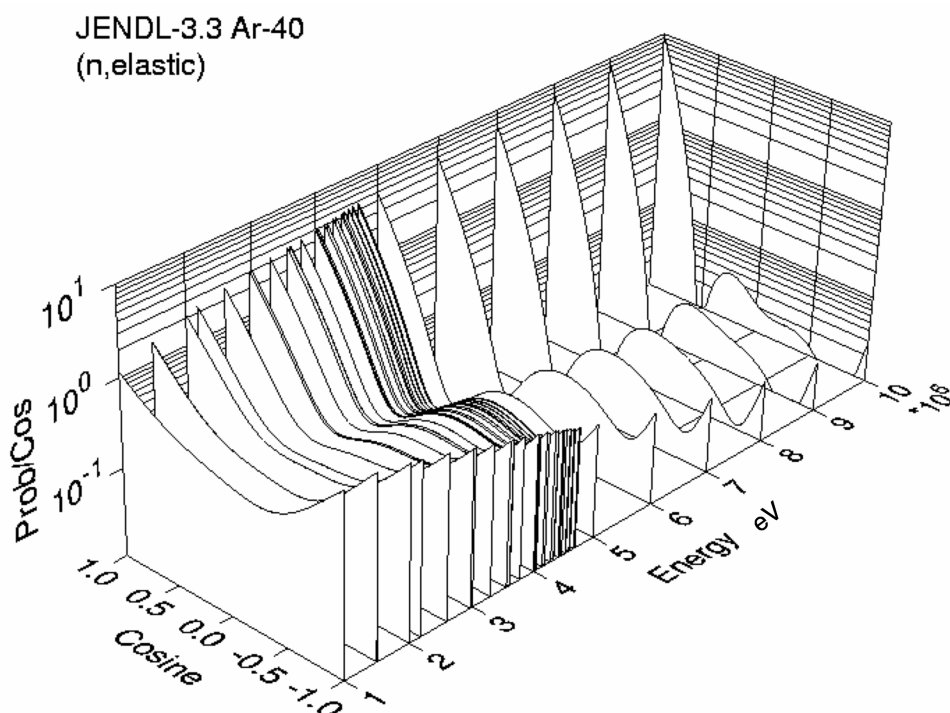


Figura 8.11: Sezioni d'urto differenziali normalizzate per neutroni su ^{40}Ar a energie crescenti da 1 a 10 MeV. Si nota l'insorgere sempre più evidente dell'andamento diffrattivo all'aumentare dell'energia, quindi al ridursi della lunghezza d'onda di De Broglie dei neutroni incidenti.

neutroni incidenti, e quindi al diminuire della loro lunghezza d'onda, ci si aspetta che divengano sempre più evidenti fenomeni di diffusione diffrattiva, come mostrato in figura [8.11](#).

Finora si è sempre supposto di trattare diffusioni elastiche, in cui cioè gli stati iniziali e finali delle particelle e nuclei coinvolti restano immutati e l'unico trasferimento d'energia considerato è quello dell'energia di rinculo del bersaglio senza che né questo né il proiettile si trovino in uno stato eccitato dopo l'interazione. Ciò significa che una volta fissati gli angoli di diffusione, le energie nei canali d'ingresso e d'uscita della reazione sono univocamente

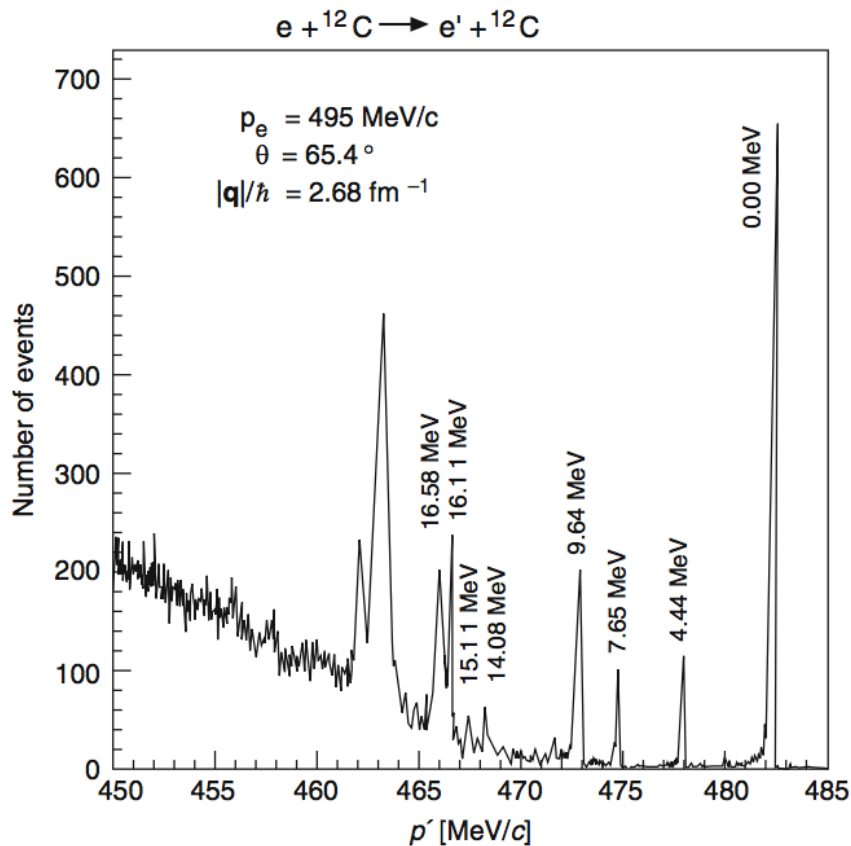


Figura 8.12: Spettro della diffusione di elettroni da 495 MeV/c su ${}^{12}\text{C}$, a 65.4° nel (SL).

connesse, come visto nei paragrafi [7.3](#) e [7.2](#)

Analizzando però gli spettri energetici misurati per la diffusione di elettroni ad angoli ϑ fissati, si nota che contengono eventi per i quali il trasferimento d'energia è chiaramente superiore a quanto ci si potrebbe attendere in base al solo fenomeno di rinculo. Questi eventi corrispondono a reazioni anelastiche come ad esempio mostrato in figura [8.12](#) dove si notano il prominente picco all'energia $E' \approx 482 \text{ MeV}$, dovuto all'urto elastico fra elettroni e nuclei di ${}^{12}\text{C}$, preceduto da picchi a energie inferiori dovuti all'eccitazione di singoli livelli nucleari oltre, in questo caso, al picco ad un'energia $E' \approx 463 \text{ MeV}$, causato da una *risonanza dipolare gigante*¹. La struttura dello spettro a energie inferiori dipende dalle diffusioni quasi-elastiche dei nucleoni legati nel nucleo. I picchi possono essere riprodotti con funzioni che descrivono fenomeni risonanti.

¹J. Speth A. van der Woude, "Giant resonances in nuclei" - Rep. Prog. Phys. 44 (1981) 719-786.

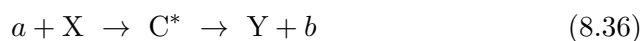
Nel caso in cui non si possano trascurare le dimensioni finite dei proiettili, i dati per le sezioni d'urto fra nuclei proiettile, con numero di massa A_P e nuclei bersaglio, con numero di massa A_B , mostrano comunque una proporzionalità con il termine $(A_P^{1/3} + A_B^{1/3})$, coerentemente con l'assumere, tanto per il proiettile quanto per il bersaglio che le loro dimensioni siano compatibili con una forma sferica di raggio $R \simeq R_0 A_i^{1/3}$, con $R_0 \gtrsim 1.3$ fm, quindi maggiore di quanto trovato negli altri casi, dipendendo ciò dal fatto che un nucleo non va visto effettivamente come una sfera dalla superficie a bordo netto, ma piuttosto a bordo esteso e "sfumato", ad esempio come descritto dalla distribuzione di Wood-Saxon.

8.7 Reazioni con formazione del nucleo composto

Fra le tipologie di reazioni nucleari indicate si descrive ora brevemente quella che procede tramite la formazione di un cosiddetto *nucleo composto*.

Si immagini una particella che incide su un nucleo con parametro d'urto piccolo rispetto al raggio del nucleo stesso, e che quindi avrà una relativamente alta probabilità di interagire con uno dei suoi nucleoni. La particella, ceduta parte della propria energia, potrà comunque ancora interagire con i restanti nucleoni del nucleo in modo tale da ripartire la propria energia cinetica con molti nucleoni del nucleo bersaglio e divenire lei stessa parte del sistema fisico interagente bersaglio+proiettile. Se anche l'incremento medio di energia di ogni nucleone coinvolto è inferiore a quanto servirebbe per scalarlo dal nucleo, può però verificarsi che la redistribuzione statistica dell'energia portata dal proiettile possa talvolta concentrarne su uno dei nucleoni del sistema formatosi una quantità sufficiente a estrometterlo dal sistema in modo simile a quanto avviene nel caso dell'evaporazione d'una molecola da un liquido caldo.

Un simile processo avviene quindi tramite la formazione di uno "stato intermedio" successivo all'assorbimento della particella incidente e che precede l'emissione delle particelle per "evaporazione". Questo stato intermedio viene detto *nucleo composto* e una simile reazione viene indicata come



e C^* rappresenta il nucleo composto. Una simile reazione è quindi un processo che ha luogo in due fasi, la prima delle quali comporta la formazione del nucleo composto, seguita dal suo "decadimento".

Il decadimento di un nucleo composto può avvenire in svariati modi e un'assunzione del modello è che le probabilità relative dei diversi possibili canali di decadimento siano indipendenti dal modo in cui il nucleo composto si è formato, e dipendano invece soltanto dalla composizione del nucleo composto e dall'energia totale del sistema, ciò equivale ad assumere l'ipotesi che

la redistribuzione dell'energia cinetica del proiettile fra i nucleoni del nucleo composto avvenga in modo sostanzialmente "termico", con conseguente "perdita di memoria" del processo di formazione. Il successivo decadimento sarà quindi governato prevalentemente da processi statistici.

Un esempio interessante è riportato nello schema di figura 8.13 dove si vede come uno stesso nucleo composto possa essere ottenuto con diversi canali d'ingresso e possa produrre diversi canali di reazione. Il modello del nucleo

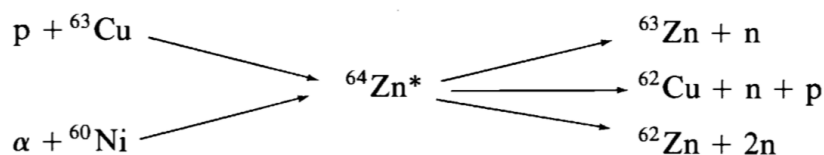


Figura 8.13: Esempio di formazione di un nucleo composto.

composto dá buoni risultati nella descrizione di reazioni a bassa energia, fra i 10 MeV e i 20 MeV, per le quali la probabilità che la particelle incidente sfugga dal sistema prima di essersi sostanzialmente "termalizzata" con esso è bassa. Per lo stesso motivo la sua efficacia cresce al crescere del numero di massa A dei nuclei bersaglio.

Da quanto detto si deduce anche che data la casualità delle interazioni che determinano la formazione di un nucleo composto, l'emissione dei prodotti di decadimento debba essere sostanzialmente isotropa, con una distribuzione angolare quindi uniforme nel sistema del CM, come confermato dai risultati sperimentali.

Se peraltro il proiettile ha un numero di massa non trascurabile rispetto al bersaglio, il momento angolare trasferito al nucleo composto durante l'urto può essere notevole e conseguentemente la distribuzione angolare delle particelle emesse dal suo decadimento ne risente con una preferenza per direzioni ortogonali a quella dell'asse del momento angolare trasferito.

Data l'analogia evaporativa si può dedurre che il numero delle particelle emesse da un nucleo composto cresca con l'energia e che la sezione d'urto abbia una forma pressochè Gaussiana.

I tempi caratteristici d'evoluzione di un processo con formazione di un nucleo composto sono abbastanza lenti, dell'ordine di $10^{-16} \div 10^{-18}$ s.

8.8 Reazioni dirette

Al crescere dell'energia della particella incidente la sua lunghezza d'onda associata cala. Un nucleone da 1 MeV ha una lunghezza d'onda di de Broglie di circa 4 fm e quindi, non risolvendo i singoli nucleoni, è più facile che interagisca con un nucleo producendo un "nucleo composto". Salendo a 20 MeV la lunghezza d'onda associata scende a circa 1 fm rendendo possibile

un'interazione "diretta" fra il nucleone incidente e uno o comunque solo pochissimi fra i nucleoni del bersaglio.

Questa condizione, detta appunto *reazione diretta*, è quindi in un certo senso opposta a quella che conduce al nucleo composto, e oltretutto vede probabili urti fra i nucleoni incidenti e i nucleoni più periferici dei nuclei bersaglio.

I meccanismi del nucleo composto e delle reazioni dirette possono ovviamente contribuire entrambi a una certa reazione e diventa in tal caso importante e interessante capire come distinguere i due contributi.

Un'altra caratteristica delle reazioni dirette è il loro tempo di attuazione, dell'ordine di 10^{-22} s, quindi da quattro a sei ordini di grandezza inferiore rispetto al caso del nucleo composto. Anche le distribuzioni angolari dei prodotti di reazione sono diverse nei due casi, caratterizzate da picchi definiti nel caso delle reazioni dirette.

Una reazione anelastica può procedere secondo entrambi le vie, con una forte dipendenza dall'energia del proiettile, come avviene ad esempio con la reazione di stripping del deutone $X(d, n)Y$, una *reazione di trasferimento* in cui un singolo protone viene trasferito dal proiettile al bersaglio.

L'altra reazione di stripping del deutone $X(d, p)X'$ è invece più facile che proceda per via "diretta" in quanto l'"evaporazione" di un protone da un nucleo composto risulta inibita dalla barriera coulombiana.

La reazione $X(\alpha, n)Y$ difficilmente procede invece per via diretta in quanto richiede il trasferimento di ben tre nucleoni su stati di valenza di un nucleo bersaglio, che è un processo molto poco probabile.

Un'applicazione importante delle reazioni di trasferimento di singola particella, specialmente d, p e d, n , concerne lo studio degli stati eccitati a breve vita media per confrontarne le caratteristiche con le previsioni del "modello a shell".

Lo studio delle reazioni di *pickup* in cui il proiettile cattura un nucleone al nucleo bersaglio, come ad esempio (p, d) , fornisce informazioni sugli stati di singola particella.

8.9 Reazioni di risonanza

Il modello del nucleo composto considera gli stati nucleari non legati come un continuo privo di struttura, anche se in realtà si tratta di stati definiti, ma in numero così grande e con energie così prossime l'una all'altra da formare uno spettro praticamente continuo.

Ognuno di questi stati è poi instabile e presenta quindi una certa "larghezza", il che determina una sostanziale "sovrapposizione" fra gli stati, se la distanza fra questi è dell'ordine o inferiore alla larghezza, da cui lo spettro praticamente "continuo" che giustifica il modello del nucleo composto.

Gli stati legati studiati tramite reazioni dirette rappresentano come detto la condizione simmetrica; risultano stabili rispetto all'emissione di particelle e

le loro vite medie sono molto più lunghe, come ad esempio per i decadimenti γ , per cui sono caratterizzati da "larghezze" molto inferiori. Uno stato con vita media di 10^{-12} s ha ad esempio una larghezza di circa 10^{-3} eV, quindi molto inferiore alla tipica spaziatura fra stati legati contigui. Questo rende plausibile trattare questi stati alla stregua di stati discreti caratterizzati ognuno da una propria funzione d'onda.

Fra questi due estremi si individua quella che vien detta regione di *risonanza*, caratterizzata da livelli discreti con alta probabilità, e quindi sezione d'urto, di formarsi e larghezze piuttosto ridotte in quanto presentano solitamente due soli modi di decadimento disponibili, ovvero la re-emissione della particella incidente o l'emissione di fotoni γ .

Il comportamento delle sezioni d'urto in prossimità dei valori d'energia caratteristici di tali livelli viene descritto con andamenti risonanti del tipo Breit-Wigner, come in [5.32](#).

Le reazioni di cattura radiativa mostrano una tipica struttura di risonanza, come per lo spettro in figura [8.14](#).

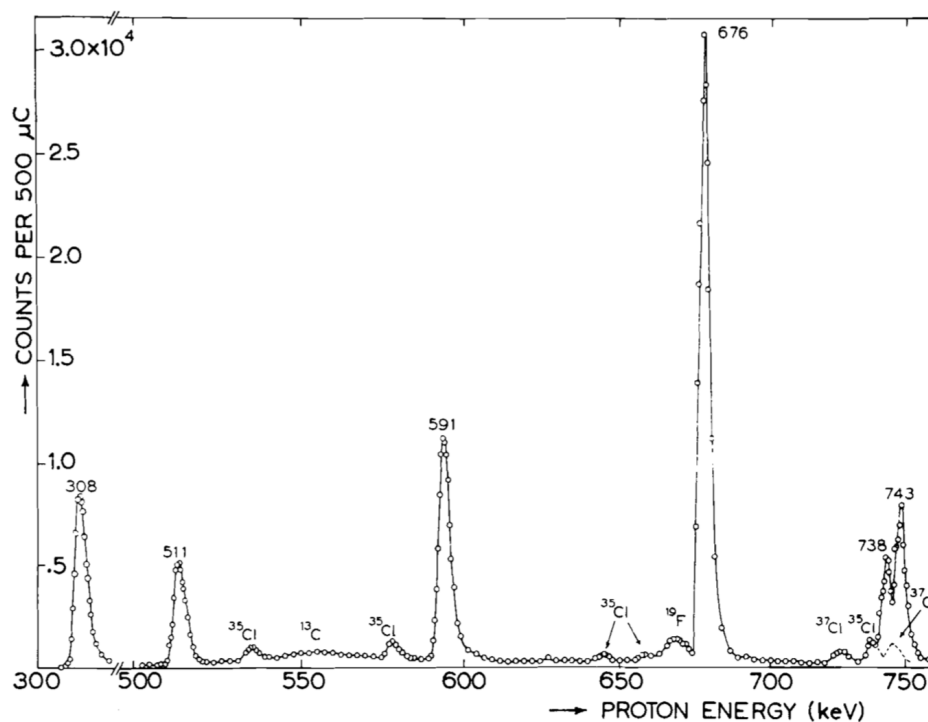


Figura 8.14: Risonanze da cattura radiativa di protoni su ^{23}Na . Lo spettro è presentato in funzione dell'energia dei protoni incidenti. Si osservano anche picchi relativi al Cl in quanto il bersaglio utilizzato consisteva in NaCl.

9.12 Urti e risonanze

Come si è visto, l'individuazione di picchi o di risonanze negli spettri o negli andamenti di sezioni d'urto, e la loro opportuna descrizione e interpretazione, costituiscono uno dei punti cardine delle attività sperimentali in fisica nucleare e delle particelle.

Si riprende ora il problema considerando come esempio quello dell'urto fra pioni π e protoni p o deutoni d (bersagli di idrogeno o di deuterio) nel sistema del laboratorio (SL), e si suppone di misurare le sezioni d'urto di produzione di nuove particelle in funzione dell'energia dei pioni del fascio incidente, o dell'angolo polare ϑ di diffusione rispetto alla direzione z parallela alla velocità di avvicinamento dei proiettili al bersaglio. I pioni che non interagiscono proseguono lungo la traiettoria che hanno seguito per avvicinarsi al bersaglio.

Misurando ad esempio la sezione d'urto di produzione di pioni a diversi angoli ϑ , è intuitivo capire che il numero di quelli semplicemente diffusi dalle interazioni col bersaglio dovrebbe diminuire al crescere dell'angolo ϑ di diffusione, se non altro per la conservazione della quantità di moto totale che nel (SL) è sempre diretta in avanti lungo z .

In generale la sezione d'urto dipende sia da ϑ che dall'energia E_π della particella incidente nel sistema del laboratorio: $\sigma = \sigma(\vartheta, E_\pi)$. I risultati sperimentali per l'interazione fra pioni e protoni o deutoni mostrano, in figura 9.20, un andamento delle sezioni d'urto lentamente variabile per energie E_π superiori a pochi GeV, che presenta però dei picchi in corrispondenza di valori caratteristici di E_π , vi sono cioè valori dell'energia delle particelle incidenti in corrispondenza dei quali la sezione d'urto aumenta anche significativamente rispetto al suo andamento prima e dopo tali valori.

I picchi nella sezione d'urto di figura 9.20 e in altre simili, per la loro forma caratteristica sono detti *risonanze* e sono interpretati come evidenza della produzione di nuove particelle (di massa definita e con ben definiti numeri quantici), non presenti prima dell'urto, che poi decadono. La prima osservazione sperimentale fu di E. Fermi e collaboratori²³

Per capire meglio quanto affermato si consideri l'urto elastico

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p \quad (9.31)$$

in cui le due particelle nello stato finale si trovano in uno stato cinematico diverso da quello iniziale; come detto se il processo è puramente elastico ci si aspetta che la maggior parte delle particelle diffuse vada "in avanti" e con un valore "piccolo" di ϑ . Se però nell'urto parte dell'energia a disposizione dá luogo alla produzione di una nuova particella "X" che poi decade in $\pi^+ + p$ ($\pi^+ + p \rightarrow X \rightarrow \pi^+ + p$), è ragionevole che i prodotti di questo

²³H. L. Anderson, E. Fermi, E. A. Long, and D. E. Nagle, "Total Cross Sections of Positive Pions in Hydrogen." Phys. Rev. 85 (1952) 936.

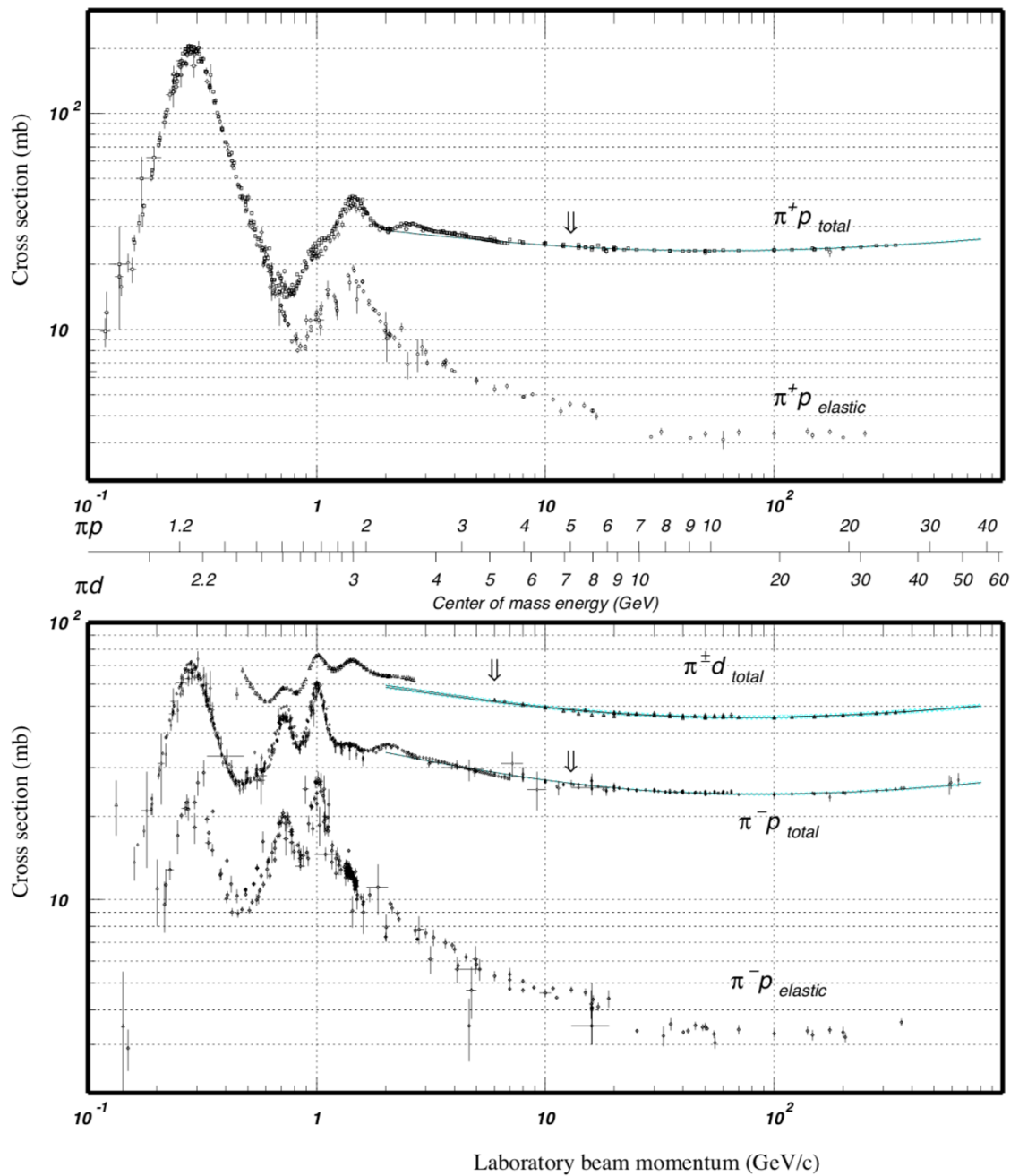


Figura 9.20: Sezioni d'urto elastica e totale per le reazioni $\pi + p$ e $\pi + d$ in funzione della quantità di moto del pione. La scala centrale riporta la corrispondente energia \sqrt{s} disponibile nel sistema del (CM). Il primo picco pronunciato per l'interazione $\pi + p$, centrato a $1.232 \text{ GeV}/c^2$, corrisponde alle risonanze Δ .

decadimento, pur nel rispetto della conservazione della quantità di moto, vengano emessi senza conservare un particolare ricordo della direzione iniziale di provenienza del pione incidente. In conseguenza di ciò i prodotti di decadimento avranno probabilità non trascurabili di essere emessi ad angoli qualunque, in particolare anche grandi, e fissatone uno ci si aspetta quindi di osservare un aumento del numero di particelle diffuse a quell'angolo, rispetto al caso della diffusione senza formazione della particella X , e quindi un aumento del valore della sezione d'urto corrispondente, man mano che l'energia del pione incidente si avvicina a quella che consente la produzione della particella X di massa pari a quella disponibile nel centro di massa della reazione, divisa per il quadrato della velocità della luce.

Quello ora descritto è un modo diretto per la ricerca di stati adronici eccitati che viene detto anche *formazione*.

Nel caso dell'interazione qui considerata la produzione delle particelle osservate è mediata dalle interazioni forti. Tali particelle sono inoltre altamente instabili e hanno quindi una vita media molto breve; dalle misure sperimentali si osserva che i prodotti del loro decadimento sembrano provenire direttamente dal cosiddetto "vertice d'interazione primario", ovvero dal piccolissimo volume in cui ha effettivamente avuto luogo l'urto fra il pione e il protone o il deutone bersaglio. Le vite medie stimate per tali risonanze sono dell'ordine di 10^{-24} s, il che indica che anche il loro decadimento è mediato dalle interazioni forti. Fra le risonanze in questione vi sono la Δ^- , la Δ^0 , la Δ^+ e la Δ^{++} , che sono stati eccitati dei nucleoni. Di esse si riparlerà nel paragrafo [12.1](#) trattando delle interazioni profondamente anelastiche.

Per quanto anche visto nel paragrafo [5.6](#) e in appendice [D](#), l'energia E di una particella di massa m e quantità di moto \vec{p} è data da

$$E^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (9.32)$$

Se si ha un sistema fisico costituito da N particelle "non interagenti" di masse m_i e quantità di moto \vec{p}_i , con $i = 1, 2, \dots, N$, l'energia complessiva E_t del sistema è la somma delle energie delle singole particelle, $E_t = \sum_i^N E_i$, e la quantità di moto totale \vec{p}_t del sistema è la somma vettoriale delle quantità di moto delle singole particelle, $\vec{p}_t = \sum_i^N \vec{p}_i$. Si può dunque porre

$$E_t^2 = |\vec{p}_t|^2 c^2 + M^2 c^4 \quad (9.33)$$

con M che ha le dimensioni fisiche di una massa. Si osservi che se c'è un sistema di riferimento in cui tutte le N particelle sono ferme, allora vale chiaramente

$$E_t = c^2 \sum_{i=1}^N m_i = M c^2 \quad (9.34)$$

per cui, almeno in questo particolare caso, $M = \sum_{i=1}^N m_i$.

Si ricordi che energia e quantità di moto di una particella sono grandezze

fisiche che dipendono dal sistema di riferimento nel quale sono calcolate. La massa di una particella non dipende invece dal sistema di riferimento, ma è una caratteristica propria della particella e costituisce per essa un *invariante relativistico*²⁴. Quindi la differenza

$$E^2 - |\vec{p}|^2 c^2 = m^2 c^4 \quad (9.35)$$

è anch'essa un invariante relativistico che assume sempre il medesimo valore in qualsiasi sistema di riferimento.

Ciò si rivela utile ad esempio, nel caso in cui si abbia una particella di massa M ferma in un sistema di riferimento che decade in N particelle ognuna con energia E_i e quantità di moto \vec{p}_i . Essendo M invariante deve dunque valere

$$E_t^2 - |\vec{p}_t|^2 c^2 = M^2 c^4 \quad (9.36)$$

Questo permette dunque di risalire alla massa M di una particella che sia decaduta in altre particelle di cui si conoscano energia e quantità di moto. Tornando al caso studiato più sopra della produzione di una risonanza Δ nell'urto $\pi + p$, si ha che questa decade in una coppia (π, p) . Misurando le quantità di moto \vec{p}_π e \vec{p}_p delle due particelle figlie se ne possono ottenere le energie: $E_\pi = \sqrt{p_\pi^2 c^2 + m_\pi^2 c^4}$ e $E_p = \sqrt{p_p^2 c^2 + m_p^2 c^4}$. Si ha quindi

$$(E_\pi + E_p)^2 - (\vec{p}_\pi + \vec{p}_p)^2 c^2 = m_\Delta^2 c^4 \quad (9.37)$$

Ponendosi ad esempio nel sistema di riferimento in cui la Δ è a riposo, per cui $(\vec{p}_\pi + \vec{p}_p) = 0$, si ha

$$(E_\pi + E_p)^2 = M^2 c^4 \quad (9.38)$$

e siccome la conservazione dell'energia richiede che sia

$$E_\pi + E_p = m_\Delta c^2 \quad (9.39)$$

ne deriva immediatamente: $M = m_\Delta$.

Se quindi si conoscono i parametri cinematici del sistema di N particelle prodotte ad esempio dal decadimento di un'altra particella, allora si può sempre calcolare la *massa invariante* di quest'ultima.

Se $N = 2$ come per il caso della Δ e si suppone di effettuare un esperimento in cui si osservano molti eventi con due particelle nello stato finale, esse potrebbero essere il risultato del decadimento di una particella di massa M oppure no. Nel primo caso la loro "massa invariante" dovrà essere pari a $M c^2$, altrimenti dovrà coincidere con un valore qualsiasi compreso fra 0 e l'energia complessiva E_t disponibile nello stato iniziale (canale d'ingresso

²⁴Il concetto di massa si applica effettivamente soltanto agli stati stazionari, ovvero agli autostati dell'Hamiltoniana, in quanto soltanto onde monocromatiche posseggono una ben determinata frequenza.

della reazione o del decadimento).

Se si dispone quindi di numerosi eventi misurati di questo tipo si può calcolare la massa invariante per ogni coppia di particelle.

La massa invariante si può naturalmente calcolare anche per più di due particelle nello stato finale e costruire quindi un "istogramma" delle frequenze con cui si presentano certi valori di massa invariante. Si ottiene in tal modo un grafico nel quale sono riportati in ascisse i possibili valori di massa invariante e in ordinate il numero di volte in cui si sono trovati questi valori.

Può naturalmente succedere che molti eventi siano casuali in quanto le particelle rivelate e considerate potenziali figlie di una particella più pesante, non avendo in realtà alcuna relazione l'una con l'altra, danno origine a masse invarianti di valore casualmente compreso tra 0 e la massima energia disponibile, quindi vi saranno anche casi di ottenimento casuale del valore di massa invariante corrispondente a quello della particella decaduta. Vi saranno però anche i casi in cui la massa invariante assumerà il valore corrispondente a quello della particella che decadendo ha dato origine a quello specifico stato finale, proprio perchè dovuti al corretto e coerente abbinamento delle particelle rivelate. Il grafico che si ottiene ha quindi generalmente l'aspetto di un fondo continuo, dovuto agli eventi casuali, sul quale si elevano alcuni *picchi* in corrispondenza delle ascisse associate alle masse invarianti delle particelle madri; esso viene detto *distribuzione* o anche *spettro in massa invariante* e in figura 9.21 ne è riportato un esempio tratto dalle misure effettuate con l'esperimento CMS ad LHC, per urti fra protoni con un'energia $\sqrt{s} = 7$ TeV nel centro di massa, rivelando coppie $\mu^+\mu^-$ nel canale d'uscita, e per una luminosità integrata di 40 pb^{-1} ; sono evidenti i picchi relativi a svariate particelle/risonanze quali ad esempio la η , la ρ , la Φ , la J/ψ , la Z .

I picchi nella distribuzione di massa invariante sono detti *risonanze* e ricordando quanto detto nel paragrafo 5.3 si possono descrivere gli andamenti delle sezioni d'urto in prossimità di tali picchi, e quindi dei corrispondenti valori di massa invariante, come la sovrapposizione fra un andamento continuo che tenga conto del fondo casuale, con un andamento risonante descritto dalla cosiddetta *formula di Breit-Wigner*²⁵

$$\sigma(E) = \frac{4\pi\lambda^2(2J+1)(\Gamma^2/4)}{(2s_a+1)(2s_b+1)[(E-E_R)^2+(\Gamma^2/4)]} \quad (9.40)$$

dove s_a ed s_b sono gli spin delle particelle a e b nel canale d'ingresso, J è lo spin dello stato risonante X , tutti in unità di \hbar , E_R è il valore d'energia associato alla risonanza. Considerando che lo stato risonante X può generalmente decadere in modi diversi e indipendenti, caratterizzati dall'indice i , a ognuno dei quali è associata una certa *larghezza parziale* $\Gamma_i = \hbar/\tau_i$, la frazione di probabilità che lo stato risonante decada proprio nel modo $i - mo$

²⁵Per come dedurla si veda ad esempio D.H. Perkins, Introduction to High Energy Physics.

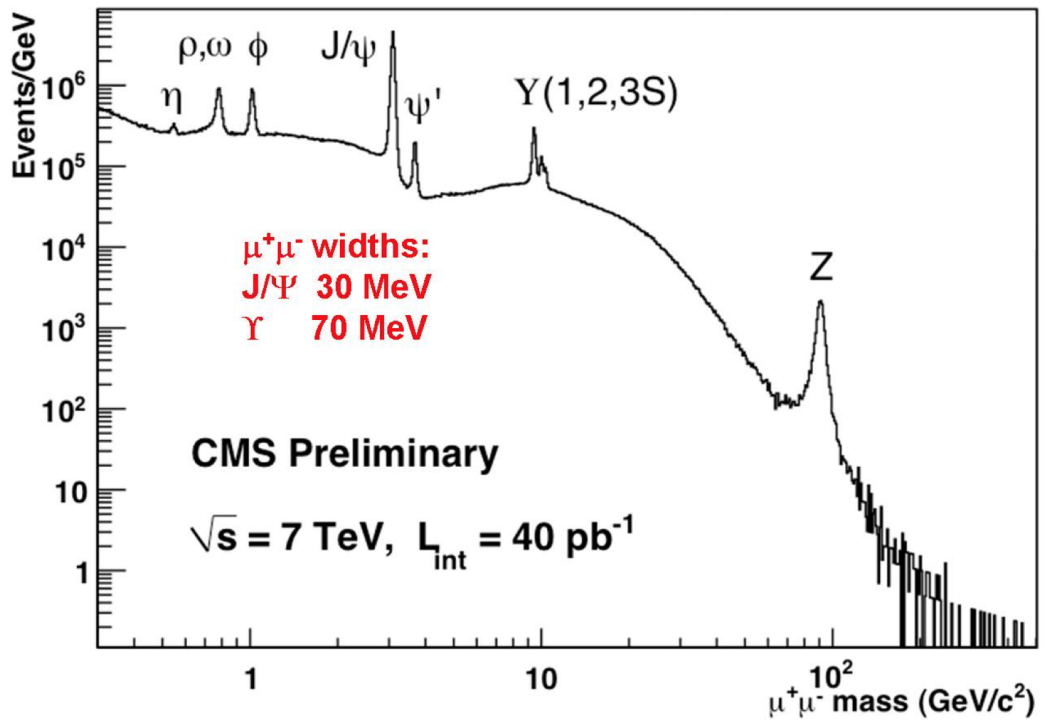


Figura 9.21: Sul fondo continuo si osservano numerosi picchi corrispondenti alle masse di altrettante particelle che decadono in coppie $\mu^+\mu^-$. L'entità del fondo generalmente decresce al crescere dell'energia, in quanto la probabilità di osservare coppie casuali di alta massa invariante è minore rispetto a quella di osservarne di bassa massa invariante.

è data da Γ_i/Γ . Chiaramente $\tau_i = \hbar/\Gamma_i$ assume il significato di vita media dello "stato risonante".

Nel valutare la vita media di uno stato risonante dall'analisi della larghezza a metà altezza del picco che lo rappresenta in uno spettro di massa invariante, bisogna sempre tener conto dell'eventuale contributo alla larghezza del picco misurato, dovuto alla risoluzione del sistema di rivelazione utilizzato. Se nel modo più generale lo stato risonante si forma attraverso un particolare canale i e decade poi attraverso un altro particolare canale j , allora la sezione d'urto che lo descrive corrisponde al prodotto della [9.40](#) con il rapporto $\Gamma_i\Gamma_j/\Gamma^2$.

Tornando ora all'esempio scelto, si osservi che non tutti gli stati eccitati adronici sono ottenibili con esperimenti di *formazione*, e ciò in quanto potrebbero essere necessari flussi incidenti di intensità praticamente non raggiungibili per poter osservare le strutture cercate. Questo è ad esempio il caso di risonanze prodotte in interazioni $(\pi + \pi)$, come il mesone ρ^0 che

ha una massa di $776 \text{ MeV}/c^2$. Particelle come la ρ^0 vengono prodotte efficientemente in reazioni che coinvolgono la produzione di molti pioni nei loro stati finali. Si consideri ad esempio la reazione

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n \quad (9.41)$$

che può procedere attraverso lo stadio intermedio

$$\pi^- + p \rightarrow \rho^0 + n \quad (9.42)$$

seguito da

$$\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- \quad (9.43)$$

Chiaramente in tal caso i due pioni risultanti del decadimento della ρ^0 restano fra loro correlati e di conseguenza, sperimentalmente, la ρ^0 può essere individuata nello stato finale graficando lo spettro di massa invariante del sistema $\pi^+\pi^-$.