

L'idea di Yukawa

Yukawa considerò il raggio d'azione della forza nucleare da una prospettiva nuova, mutuandola da come si erano interpretate le interazioni elettromagnetiche fra le cariche, sorgenti del campo, in termini di scambio (emissione e assorbimento) di *fotoni γ* , i **quanti mediatori** dell'interazione elettromagnetica, che sono **bosoni**.

La propagazione dei fotoni è descritta dalle equazioni di Maxwell e avviene a velocità c nel vuoto. Come diretta conseguenza della Relatività Ristretta, il fotone è **privo di massa**: $m_\gamma = 0$. Inoltre il potenziale coulombiano è proporzionale all'inverso della distanza dalla sorgente del campo:

$$V_C(r) \propto \frac{1}{r}$$

da cui il raggio d'azione ∞ della forza associata.

Immaginando anche la forza nucleare un'interazione con una particella mediatrice scambiata, **sempre un bosone**, che posseda però una massa non nulla, **Hideki Yukawa**, nel **1934**, individuò per essa un potenziale corrispondente della forma:

$$V_Y(r) \propto \frac{e^{-\frac{mc}{\hbar} r}}{r}$$

con m massa della particella mediatrice dell'interazione. Il potenziale di Yukawa, nel limite $m \rightarrow 0$, tende alla forma *coulombiana*.

Trascurando la dipendenza dallo spin, che non pregiudica la comprensione di alcune fondamentali caratteristiche dell'interazione fra nucleoni, il ragionamento può essere schematizzato come segue.

Si considerino due nucleoni di massa M in quiete nel (SL) \rightarrow l'energia totale del sistema da loro rappresentato è $2Mc^2$.

Si supponga che uno dei due nucleoni emetta un bosone di massa m prendendo "**a prestito**" l'energia di massa mc^2 necessaria, per cui la variazione dell'energia totale del sistema è non inferiore a $\Delta E = mc^2$.

Questa **fluttuazione energetica** ΔE , che classicamente violerebbe il principio di conservazione dell'energia, può aver luogo purché la sua durata sia vincolata da $\Delta E \Delta t \geq \hbar$. Quindi, come limite superiore per Δt si ha: $\Delta t = \hbar/(mc^2)$.

Supponendo al limite che il bosone sia emesso a velocità c , nell'intervallo Δt concessogli dal principio di indeterminazione può percorrere la distanza $a_0 = c\Delta t = \frac{\hbar}{mc}$

che coincide con la **lunghezza d'onda Compton** λ del bosone di massa m e che tende ad ∞ per $m \rightarrow 0$, coerentemente con l'essere infinito il raggio d'azione dell'interazione elettromagnetica.

I due nucleoni possono dunque interagire se la loro distanza mutua r è inferiore ad a_0 , e non interagiscono o interagiscono debolmente se $r > a_0$, che definisce quindi il **raggio d'azione** delle forze nucleari.

Assumendo ragionevolmente $\lambda \approx 1.4 \times 10^{-15}$ m, e quindi il raggio d'azione a_0 della forza nucleare, si ottiene per m :

$$m = \frac{\hbar}{\lambda c} \approx \frac{6.583 \times 10^{-22} \times 2.998 \times 10^8 \text{ MeV s}}{c \times 1.4 \times 10^{-15}} \frac{\text{MeV s}}{\text{m}} \approx$$

$$\approx \frac{1.9736 \times 10^{-13}}{c^2 \cdot 1.410^{-15}} \text{ MeV} \approx 141 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

Il pione π è la particella mediatrice cercata, e ne esistono tre tipi, due carichi e uno neutro di masse rispettive:

Nota quindi la massa della particella mediatrice si può predire il raggio d'azione dell'interazione, e viceversa.

Si è anche implicitamente ipotizzato che l'intensità dell'accoppiamento sia la medesima fra particella mediatrice e qualunque dei due nucleoni.

$$m_{\pi^+} = m_{\pi^-} = 139.57 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_{\pi^0} = 134.98 \text{ MeV}/c^2$$

Per la forma del potenziale si parte dall'esempio di due cariche uguali q , dove l'energia potenziale del campo nelle zone non occupate dalle stesse, espressa da $U_C(r) = q^2/4\pi\epsilon_0 r$, è soluzione dell'equazione di Laplace nel caso statico $\nabla^2 U_C(r) = 0$

Si modifica quest'ultima considerando le forze fra due sorgenti del campo, caratterizzate da un raggio d'azione finito.

La modifica intuitiva consiste nell'aggiungere una costante che tenda a zero quando il raggio d'azione dell'interazione tende a ∞ , e che per motivi dimensionali sia *inversamente proporzionale al quadrato d'una lunghezza* e di segno tale da generare un potenziale che si annulli all'infinito.

L'ultima condizione, richiede una costante definita negativa, per cui è opportuno scriverla come l'opposto del quadrato di qualcosa.

L'equazione che si ottiene è detta di Klein Gordon statica $(\nabla^2 - \mu^2)U(r) = 0$ e risolta imponendo la **non** divergenza per $r \rightarrow \infty$, ha come soluzione l'energia potenziale di Yukawa

$$U_Y(r) = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-r/a_0}}{r}$$

Si introduce la quantità $\alpha_X = g^2/4\pi\hbar c$ che vien detta **costante d'accoppiamento tra i nucleoni e il campo mesonico**, analoga alla costante di struttura fine.

Ma Yukawa non sapeva ancora dei quark, e le cose sono infatti un po' più complicate, come intravisto nella lezione precedente.

La fissione nucleare

Fissione nei nuclei pesanti, **scoperta da Hahn e Strassman nel '38**: bombardando U con n si avevano come prodotti nuclei di masse \simeq alla metà di quella dell' U bombardato; fenomeno subito dopo giustificato da **Meitner e Frish**.

Si ha anche **fissione spontanea** quando, senza intervento esterno, un nucleo genitore si spezza spontaneamente in due nuclei figli \simeq della stessa massa.

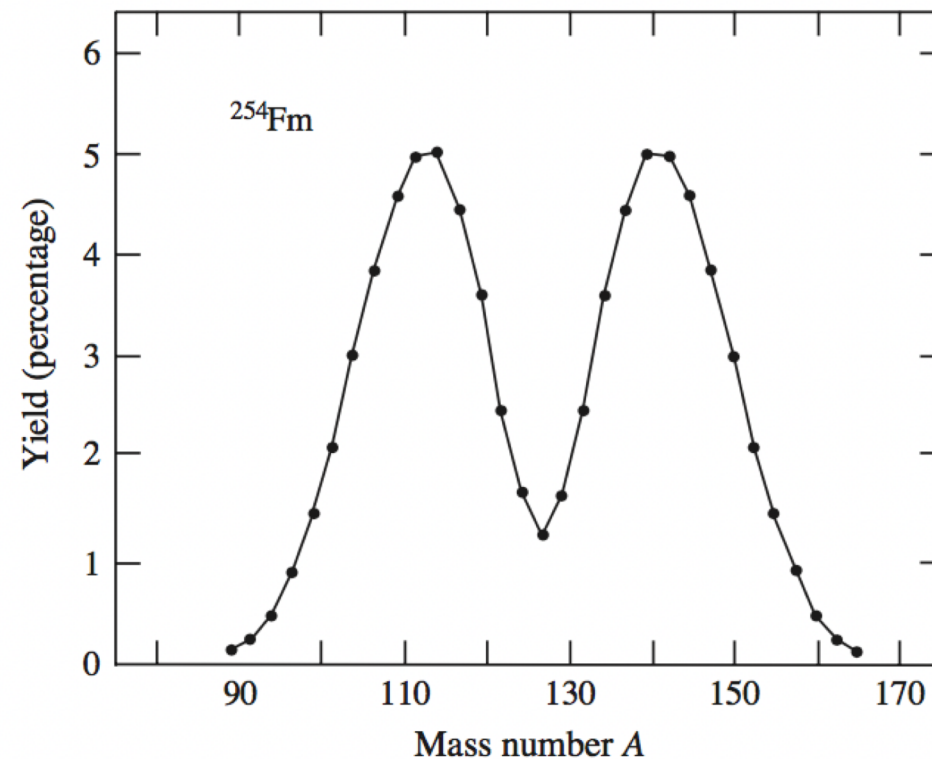
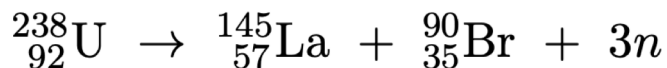
Dalla formula semi-empirica di Weizsacker si prevede il massimo guadagno in energia per due frammenti esattamente della stessa massa, ma **sperimentalmente si trova questa configurazione è poco probabile**.

In figura un esempio: distribuzione in massa dei frammenti di fissione del ^{254}Fm .

Distribuzioni così caratteristiche, oltre che delle fissioni spontanee, anche di fissioni indotte da urto di **neutroni termici**. Le fissioni indotte da urti di **particelle energetiche** conducono invece a distribuzioni di prodotti con masse fra loro molto più simili.

La distribuzione in massa dei frammenti di fissione non ha sempre un andamento "liscio" come in figura, per alcuni nuclei fissionabili evidenza irregolarità marcate dovute all'intima **struttura a shell** dei nuclei.

La fissione spontanea di $^{238}_{92}\text{U}$ è a vita media molto lunga e rilascia un'energia cinetica dei prodotti di fissione di $\simeq 154$ MeV :



Nuclei pesanti ricchi in neutroni → danno quindi luogo a prodotti di fissione anche ricchi in neutroni, con alcuni neutroni liberi.

I prodotti di fissione sono di solito fuori dalla linea di stabilità per decadimento β e danno spesso successive fasi di decadimento.

La probabilità di fissione spontanea **augmenta con A** , ma è comunque un processo raro: il rateo di fissione spontanea per ^{238}U è di soli $3 \times 10^{-24} \text{ s}^{-1}$, mentre il rateo di decadimento α per lo stesso isotopo è $5 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$, **circa 1.7×10^6 volte più intenso**.

La fissione diviene il processo di decadimento dominante soltanto per gli elementi più pesanti, con $A \geq 270$.

Interpretazione qualitativa e quantitativa della fissione → modello di **Bohr e Wheeler (1939)**: il nucleo è immaginato come una **goccia di liquido** di nucleoni incompressibile (**liquido di Fermi**). Le condizioni d'equilibrio in una goccia di liquido usuale sono determinate dall'azione repulsiva delle forze coulombiane e da quella attrattiva della tensione superficiale; nel liquido di Fermi queste ultime danno luogo al termine **d'energia di superficie** nell'equazione semi-empirica di Weizsaker che con lo stesso segno di **quello coulombiano** contribuisce invece **a ridurre e non ad aumentare** il legame nucleare.

Si studia, col modello a goccia, la fissione di un nucleo genitore con numero di massa A ed energia di legame $B(A, Z)$, in due frammenti con numeri di massa simili, ξA e $(1-\xi)A$ rispettivamente. Si suppone che i p si distribuiscano sui due frammenti proporzionalmente alla massa. Dette $B_1(\xi A, \xi Z)$ e $B_2[(1-\xi)A, (1-\xi)Z]$ le energie di legame dei due frammenti, e $B_{12}(A, Z; \xi)$ la loro somma

$$B_{12}(A, Z; \xi) = B_1(\xi A, \xi Z) + B_2[(1 - \xi)A, (1 - \xi)Z]$$

la frammentazione spontanea del nucleo nei due frammenti ${}_{\xi Z}^{\xi A}X$ e ${}_{(1-\xi)Z}^{(1-\xi)A}X$ è energeticamente permessa se

$$Q = \Delta B(A, Z; \xi) = B(A, Z) - B_{12}(A, Z; \xi) > 0 \quad (\text{condizione puramente necessaria})$$

La formula di Weizsaker ha tre termini "classici" dipendenti dalla forma del nucleo: l'energia di volume $B_V(A) = b_V A$, quella di superficie $B_S(A) = b_S A^{2/3}$, e quella coulombiana $B_C(A) = b_C Z(Z-1)A^{-1/3}$.

Partendo da questi si studia la stabilità di una goccia di tale liquido per una perturbazione esterna

$$Q = \Delta B(A, Z; \xi) = b_S A^{2/3} [1 - \xi^{2/3} - (1 - \xi)^{2/3}] + b_C Z^2 A^{-1/3} [1 - \xi^{5/3} - (1 - \xi)^{5/3}] > 0$$

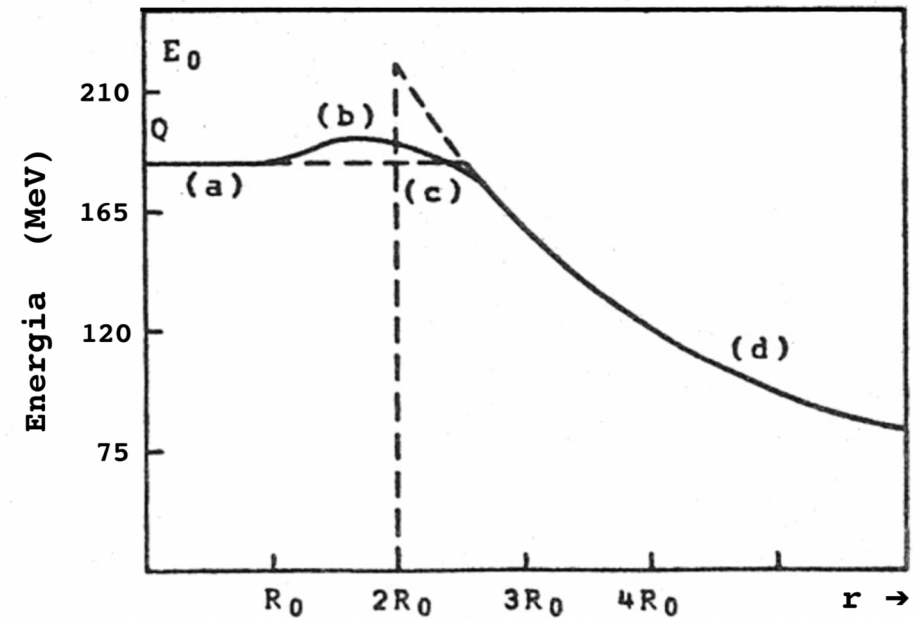
Q è massimo per $\xi=1/2$ e per l' ^{238}U , ricordando che $b_S = +17.23 \text{ MeV}$ e $b_C = +0.697 \text{ MeV}$, si ottiene $Q \approx 180 \text{ MeV}$.

Nonostante l'ampia esotermicità, la probabilità di fissione spontanea per ^{238}U è bassissima, con vita media superiore a 10^6 anni, e ciò in quanto il sistema deve superare un'elevata barriera di potenziale affinché la fissione possa aver luogo.

Una grossolana valutazione dell'entità della barriera si stima immaginando il processo inverso alla fissione, la fusione.

In figura energia d'interazione tra due frammenti sferici in funzione di r fra i loro centri. Il valore massimo si ha per due sfere che rappresentano i frammenti con le superfici a contatto:

$$E_{int}^0 = \frac{e^2 (Z/2)^2}{2r_0 (A/2)^{1/3}}$$



L'altezza della barriera è quindi $\Delta E_{bf} = E_{int}^0 - Q$ e la condizione di instabilità è $\Delta E_{bf} = E_{int}^0 - Q \leq 0$, che con $\xi = 1/2$, equivale a $(Z^2/A) \gtrsim 59$

Questo (tratteggio in figura) è un limite max per la barriera, la scissione non è infatti ancora avvenuta quando la distanza fra i centri dei due frammenti coincide con $r = 2r_0(A/2)^{1/3}$, quindi l'energia potenziale non può essere calcolata ne' considerando frammenti separati, ne' considerando un nucleo sferico.

Una valutazione più realistica della barriera di potenziale, quindi dei limiti di stabilità del nucleo per fissione spontanea, si ottiene immaginando di deformare leggermente il nucleo sferico genitore in modo che assuma almeno approssimativamente la forma di un **ellissoide di rotazione prolato**.

Il procedimento, illustrato nelle dispense, conduce a stabilire che un nucleo è stabile per piccole deformazioni se $\frac{Z^2}{A} \lesssim 49.4$, la fissione spontanea diventa quindi più probabile e se ne può prevedere un alto rateo, per nuclei con $Z^2 > 49.4 A$.

La condizione energetica per frammentazione spontanea d'un nucleo in due frammenti uguali $Q = \Delta B \left(A, Z; \xi = \frac{1}{2} \right) > 0$, è soddisfatta per $Z^2 > 17.2 A$.

Combinando il tutto si individua una regione della tabella dei nuclidi in cui anche se la configurazione sferica del nucleo genitore è stabile per piccole perturbazioni, la sua fissione in due frammenti uguali è energeticamente favorevole.

Una deformazione d'ampiezza sufficiente può dunque portare il nucleo al limite della scissione, la sua forma è dunque compatibile con una configurazione di equilibrio instabile per spostarlo dalla quale anche di una quantità infinitesima, basta un lavoro infinitesimo d'ord. superiore.

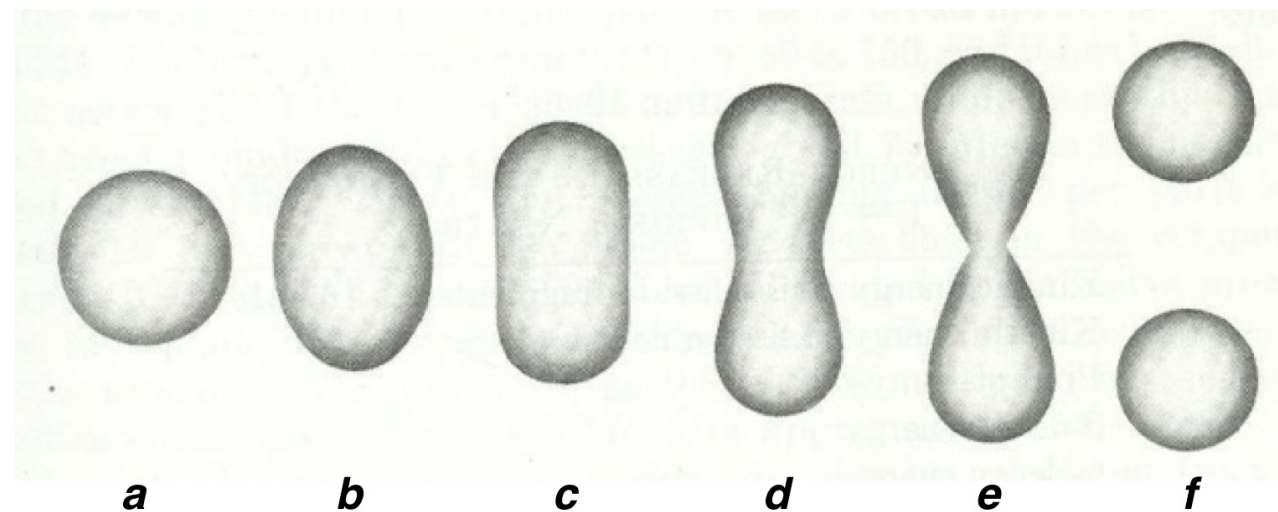
L'energia minima necessaria per portare un nucleo dalla configurazione iniziale a quella finale, illustrate in figura, è detta **energia critica di fissione**.

Nel caso si voglia indurre la fissione di un nucleo, il neutrone rappresenta il proiettile ideale, poiché la barriera coulombiana del nucleo bersaglio non interviene nel processo del suo

assorbimento, in seguito al quale si forma un sistema nucleare metastabile eccitato, che può liberarsi dell'eccesso d'energia espellendo il neutrone, spezzandosi in due o più frammenti, o trasformandosi nell'isotopo stabile del nucleo bersaglio.

La **fissione nucleare** è dunque un processo **in competizione** con la diffusione elastica e anelastica di neutroni e con il processo di cattura radiativa.

Nella condizione $17.2 A \lesssim Z^2 \lesssim 49.4 A$, il nucleo genitore potrebbe fissionare anche per **effetto tunnel** attraverso la barriera, ma la probabilità, come discusso parlando del decadimento α , è estremamente bassa data la grande massa e complessità del frammento (*la funzione d'onda ad esso associato non è semplice!*); conseguentemente risulta molto lunga la vita media di questo processo, e quindi bassissimo il suo rateo.



Il fatto che generalmente i frammenti di fissione di un nucleo si distribuiscano asimmetricamente attorno a **due diversi** valori di massa, porta alla riduzione della barriera coulombiana rispetto al caso della fissione in frammenti uguali, ma non si sono ancora individuati motivi fondamentali che lo spieghino.

La teoria della fissione di Bohr e Wheeler, pur essendo un approccio classico, riesce a fornire una buona comprensione di molte caratteristiche della fissione, sia di quella indotta che di quella spontanea.

C'è un altro meccanismo che porta nuclei ad emettere frammenti di masse superiori a quelle delle particelle α , ma nel contempo inferiori a quelle dei frammenti di fissione, si tratta della cosiddetta ***multi-frammentazione***.