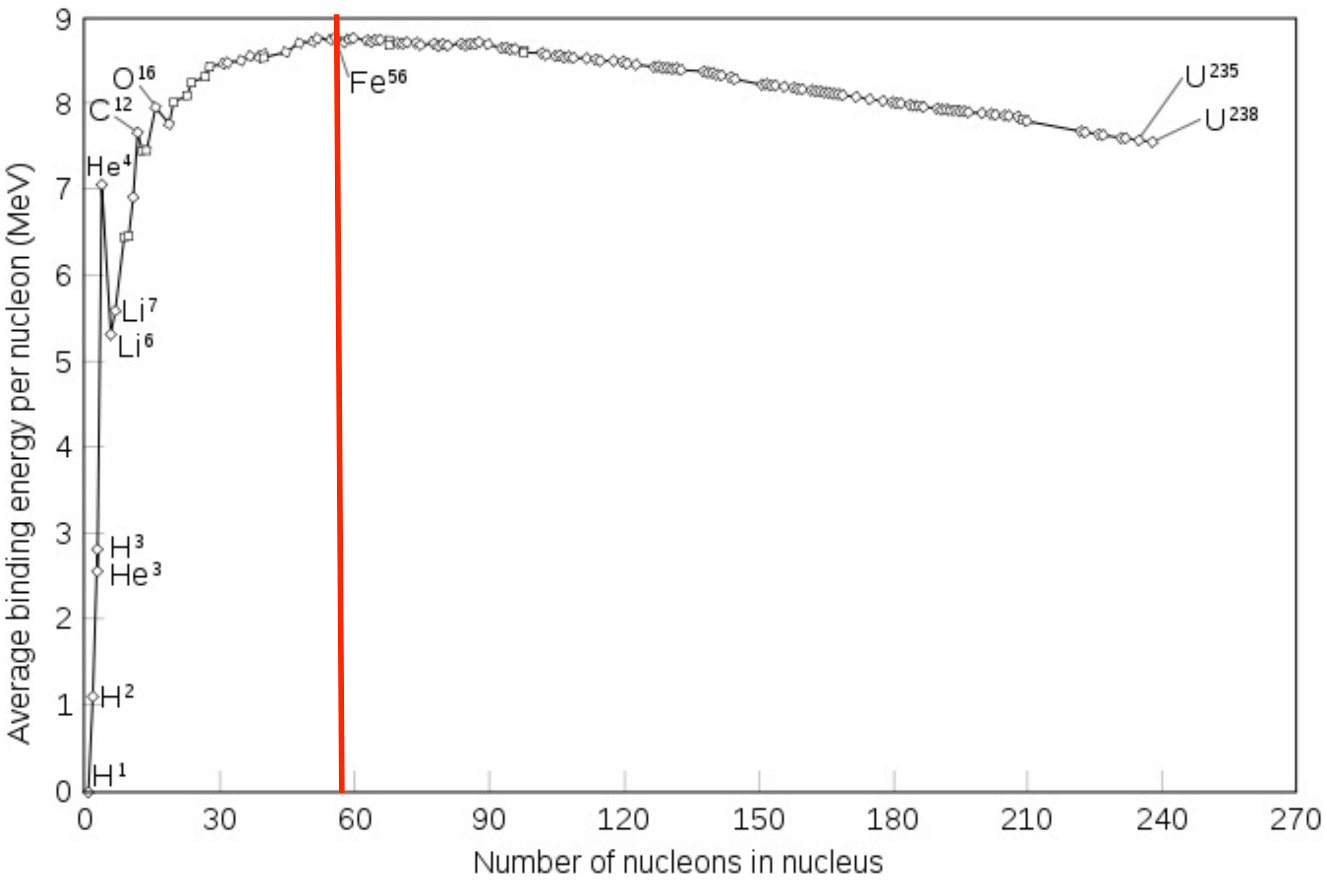
Fusione nucleare

L'energia media di legame per nucleone in un nucleo ha un massimo per $\mathrm{A} \approx 56\ (\mathrm{Fe})$, poi ha una decrescita lenta per i nuclei più pesanti. Nei nuclei più leggeri del ferro la decrescita è più ripida quindi, tranne per i nuclei "magici", questi sono meno fortemente legati dei nuclei di taglia intermedia.

Fondendo quindi due ***nuclei leggeri*** per produrne uno più pesante si produce energia e il nucleo più pesante ottenuto è più fortemente legato.
Processo opposto alla fissione; l'energia rilasciata è la differenza fra le energie di legame degli stati iniziale e finale.
Il processo è detto ***fusione nucleare***.



Per averla bisogna vincere la repulsione coulombiana fra le cariche protoniche dei due nuclei; l'en. potenziale coulombiana fra essi vale

$$U_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 (R_1 + R_2)} ,$$

$(R_1 + R_2)$ è la distanza classica di max avvicinamento possibile fra i due nuclei.

Posto $R = R_0 A^{1/3}$ si ha $U_C = \dfrac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R_0 \left(A_1^{1/3} + A_2^{1/3}\right)}$ e se ad esempio si prende $A_1 \approx A_2 \approx 2Z_1 \approx 2Z_2 = 8$,
$\Rightarrow$ $U_C \approx 4.8\ \mathrm{MeV}$, che equivale
all'energia cinetica E che bisognerebbe fornire ai due nuclei perché possano superare la barriera coulombiana.

E' un'energia ottenibile già con i primi acceleratori elettrostatici.

Così però, al momento dell'urto quasi tutti i nuclei interagiscono elasticamente, ma per la fusione due nuclei dovrebbero permanere vicini per un tempo che può eccedere quello in gioco durante l'urto indotto da fasci accelerati, tranne nei rari casi di urto centrale, ovvero con **parametro d'urto** $\boldsymbol{b \simeq 0}$.

In natura si hanno condizioni favorevoli alla fusione, riscaldando a sufficienza una miscela "confinata" di nuclei così da dare loro abbastanza energia termica da fargli superare la barriera coulombiana, nella formazione di una stella, dove l'interazione gravitazionale ***"confina"*** e favorisce il ***"riscaldamento"***.

Stimando la temperatura affinché la fusione possa aver luogo in una stella, ricordando il valore della costante k_B di Boltzmann ($k_\mathrm{B} = 8.61673324 \times 10^{-11}\,\mathrm{MeV\ K^{-1}}$), si ha

$$T \simeq \frac{4.8}{k_B} \simeq 5.6 \times 10^{10}\ \mathrm{K}$$

che è però $\gg$ a quello tipico nella maggior parte delle stelle, dell'ordine di $\mathbf{10^7 \div 10^8\ K}$.
Ciò portò molti a rifiutare inizialmente l'idea di ***Eddington*** che l'energia delle stelle provenisse da reazioni di fusione al loro interno, e rappresenta oltretutto uno degli ostacoli maggiori da superare per ottenere la fusione controllata in un reattore.

Le reazioni di fusione hanno in realtà luogo a temperature inferiori a quella stimata, grazie alla combinazione di due fatti:

- il primo e più importante è l'**effetto tunnel**. Con esso la fusione non richiede necessariamente un'energia superiore a quella della barriera coulombiana. La penetrazione della barriera dipende da alcuni fattori il più importante dei quali è il fattore G di Gamow che dipende dalle velocità relative e per due nuclei interagenti con numeri atomici Z_1 e Z_2 e masse m_1 ed m_2, si può scrivere in funzione dell'energia E

$$G(E) = \sqrt{\frac{E_G}{E}} \qquad \text{con} \qquad E_G = 2m_r c^2 \left(\pi\alpha Z_1 Z_2\right)^2$$

  con $\boldsymbol{\alpha}$ la costante di struttura fine, $\boldsymbol{m_r = m_1 m_2/(m_1+m_2)}$ la massa ridotta dei due nuclei in procinto di fondersi.
  La probabilità di attraversamento della barriera, e quindi di fusione tra i due nuclei, è proporzionale ad $\boldsymbol{e^{-G(E)}}$, quindi aumenta con $\boldsymbol{E}$. Se la si considera per la fusione di due protoni in una stella tipica alla temperatura di $10^7\ \mathrm{K}$, si ha $E_G \simeq 490\ \mathrm{keV}$ ed $E \simeq 1\ \mathrm{keV}$, da cui una probabilità di fusione estremamente bassa $\boxed{\propto \boldsymbol{e^{-22}} \simeq 10^{-9.55}}$;

- il secondo contributo ai ratei dei processi di fusione nelle stelle dipende dalla forma maxwelliana delle distribuzioni d'energia al loro interno, per cui anche alle temperature di $10^7 \div 10^8\ \mathrm{K}$, vi sono nuclei con energie cinetiche superiori a quella media della distribuzione, sulla coda alta della stessa e con valori più adatti a favorire la fusione.

E' la cooperazione tra questi due effetti che favorisce la fusione nucleare in una stella.

Analizziamo la fusione fra due nuclei a e b

Fusione fra due nuclei $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ in equilibrio termico alla temperatura $\boldsymbol{T}$ in un volume definito con densità $\boldsymbol{n}_{\mathrm{a}}$ e $\boldsymbol{n}_{\mathrm{b}}$.
Si supponga $\boldsymbol{T}$ sufficientemente alta che i nuclei di tipo $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ costituiscano un ***plasma*** totalmente ionizzato.
Le velocità dei due tipi di nuclei siano distribuite secondo **Maxwell-Boltzmann** → probabilità che due nuclei abbiano velocità relativa $\boldsymbol{v} \in (\boldsymbol{v} + \mathbf{d}\boldsymbol{v})$ è data da

$$P\left(v\right)\mathrm{d}v \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m_r}{kT}\right)^{3/2} e^{\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right)} v^2 \mathrm{d}v$$

con $\boldsymbol{m}_r$ la massa ridotta del sistema. Detta $\boldsymbol{\sigma}_{ab}$ la sez. d'urto di fusione si ha, per il rateo $\boldsymbol{R}_{ab}$ delle reazioni di fusione per unità di volume

$$R_{ab} \;=\; n_a n_b \langle \sigma_{ab} v \rangle \qquad \text{con} \qquad \langle \sigma_{ab} v \rangle \;\equiv\; \int_0^\infty \sigma_{ab} v P\left(v\right)\mathrm{d}v$$

N.B. Sperimentalmente molte sezioni d'urto nucleari a basse energie vanno come l'inverso dell'energia cinetica $\boldsymbol{E}$ del proiettile, e ricordando *l'**effetto tunnel***, si può scrivere la sez. d'urto di fusione

$$\sigma_{ab}\left(E\right) \;=\; S\left(E\right)\,\frac{1}{E}\,e^{-\left(\frac{E_G}{E}\right)^{1/2}}$$

dove $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})$, lentamente variabile con $\boldsymbol{E}$, esprime i dettagli dei meccanismi nucleari dell'interazione.
Sostituendo, il rateo delle reazioni di fusione per unità di volume diventa

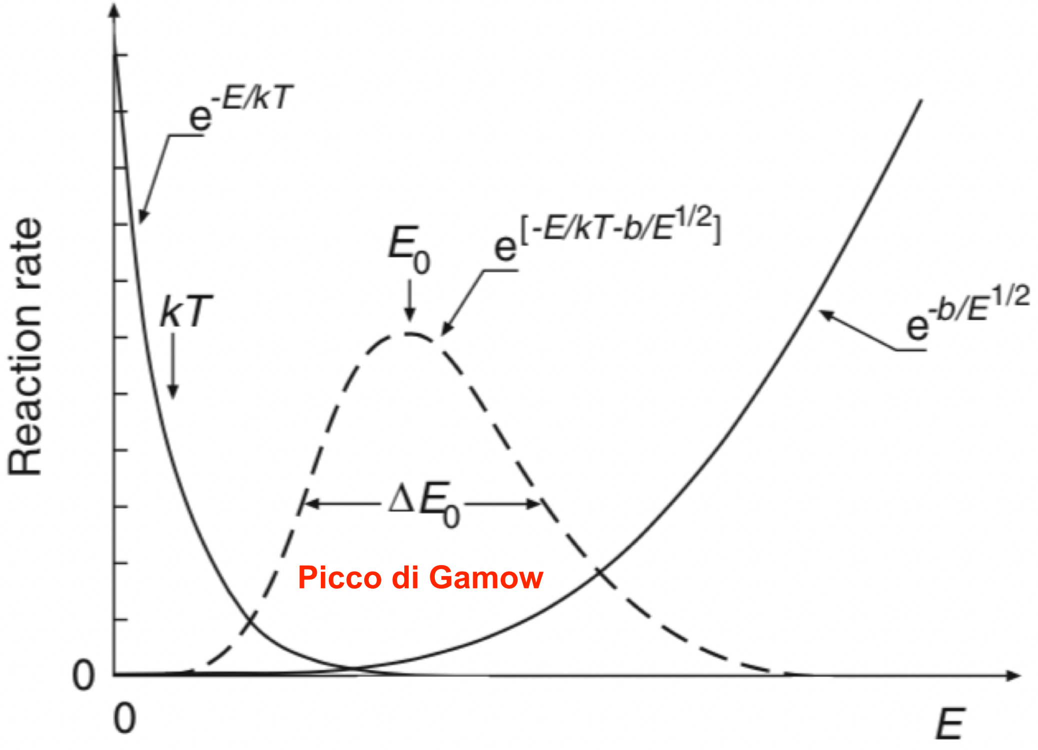
$$R_{ab} \;=\; n_a n_b \sqrt{\frac{8}{\pi m_r}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty S\left(E\right) e^{\left[-\frac{E}{kT} - \sqrt{\frac{E_G}{E}}\right]} \mathrm{d}E$$

L'essere $S(E)$ lentamente variabile con E implica che nell'integrando il ruolo dominante sia del termine esponenziale, e il termine Maxwelliano, calante con E, si combina con quello crescente con E, dell'effetto tunnel, dando un massimo nell'integrando, detto ***picco di Gamow***, in corrispondenza a

$$E = E_0 = \left[\frac{1}{4}E_G\,(kT)^2\right]^{1/3}$$

il processo di fusione può quindi prodursi nel ristretto intervallo di energie $E_0 \pm \Delta E_0$, con

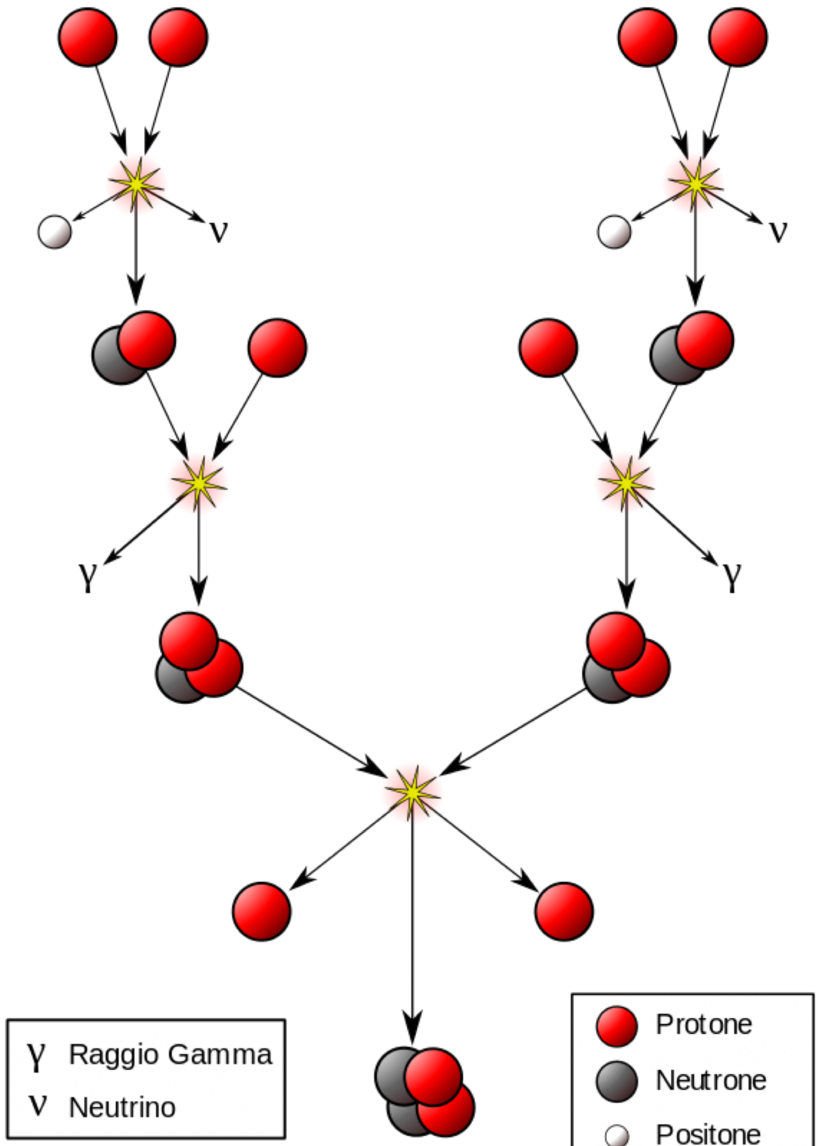
$$\Delta E_0 = \frac{4}{2^{1/3}\sqrt{3}}E_G^{1/6}\,(kT)^{5/6}$$



Nel caso di due protoni che si fondono alla temperatura $\mathrm{T} = 2 \times 10^7\ \mathrm{K}$ (la temperatura interna del **Sole** è stimata essere $\mathrm{T} \simeq 1.57 \times 10^7\ {}^o\mathrm{K}$), si ha:

$E_G = 493\ \mathrm{keV}$, $kT = 1.7\ \mathrm{keV}$, $\mathrm{E}_0 = 7.2\ \mathrm{keV}$ e $\Delta E_0 = 8.2\ \mathrm{keV}$

Nel **Sole**, la quasi totalità dell'energia prodotta proviene dal cosiddetto ciclo ***protone-protone***, che ha più di un canale possibile, il principale dei quali, detto catena PP-I e illustrato alla pagina successiva.



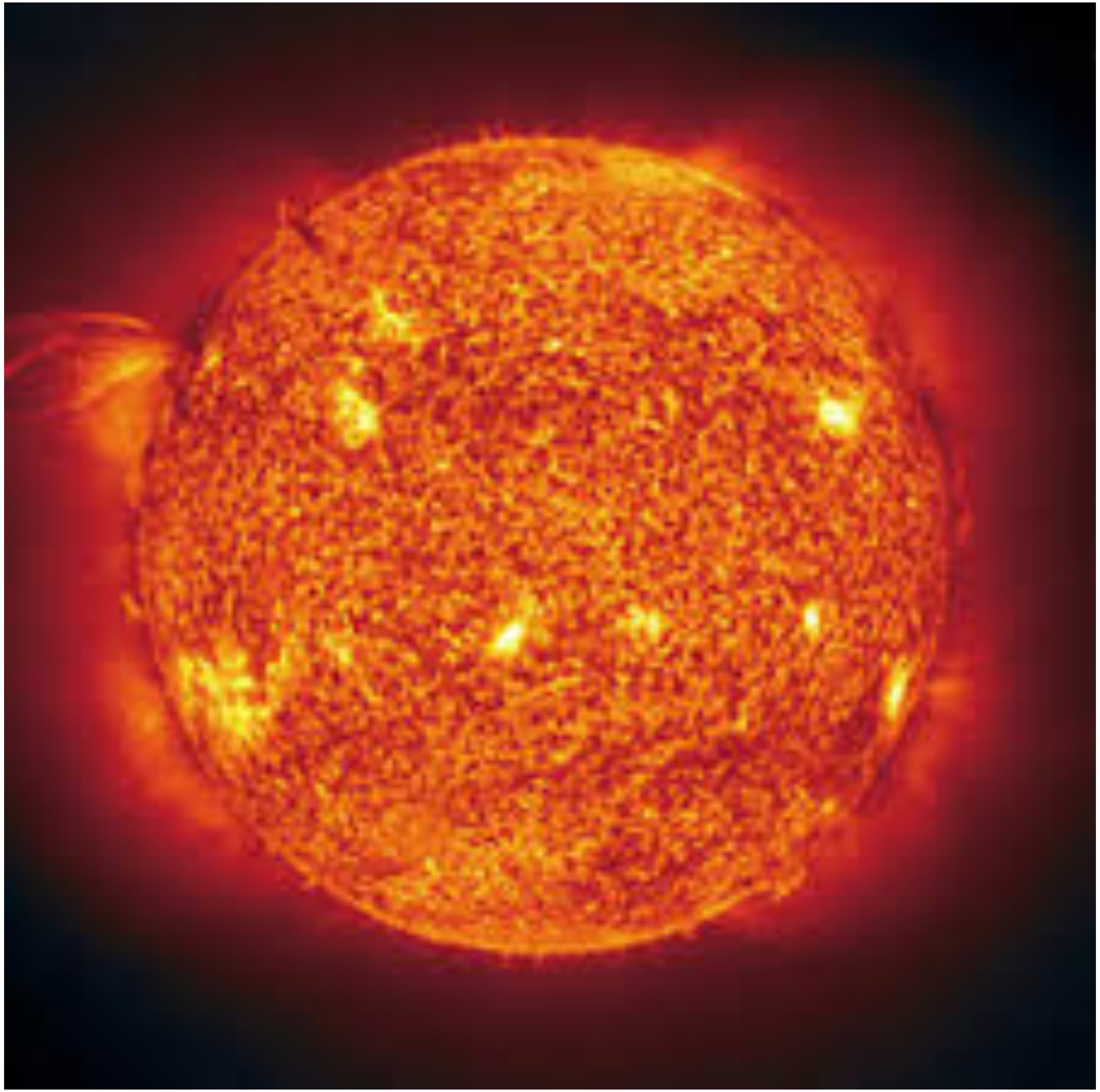
Fusione nuclei di $\mathbf{H}$ e produzione di nuclei di $\boldsymbol{d}$ + $0.42\ \mathrm{MeV}$

$\boldsymbol{d}$ si fonde con un altro $\mathbf{H}$ e produce ${}^{3}_{2}\mathbf{He} + \boldsymbol{\gamma}$ + $5.49\ \mathrm{MeV}$

Infine due nuclei di ${}^{3}_{2}\mathbf{He}$ si fondono e formano ${}^{4}_{2}\mathbf{He}$ + $\mathbf{2}\boldsymbol{p}$ + $12.86\ \mathrm{MeV}$

La gran quantità d'energia rilasciata durante l'ultima reazione di fusione è dovuta alla grande energia di legame dell' ${}^{4}_{2}\mathbf{He}$.

N.B. La prima reazione, essendo dovuta all'***interazione debole***, procede con un rateo **estremamente basso** e a ciò è dovuta la lunga ***vita media*** del Sole!



Esercizi di Fisica Nucleare e Subnucleare

Esercizio _ 1

Si consideri un muone prodotto nell'atmosfera, all'altezza di 8.5 km, dal decadimento di un pione prodotto dall'interazione fra un raggio cosmico primario e l'atmosfera stessa. Sapendo che dopo essere stato prodotto il muone viaggia verso il suolo inclinato di 18 gradi rispetto alla verticale, con un impulso di 4.8 GeV/c, e trascurando ogni possibile interazione significativa tra il muone e l'atmosfera, si calcoli la probabilità che esso raggiunga il suolo prima di decadere.

Si ricordi che la vita media del muone è $\tau_\mu \simeq 2.2$ μs e che la sua massa è $m_\mu \simeq 106$ MeV/c^2.

Soluzione esercizio 1

Un muone, una volta prodotto alla quota z, per giungere al suolo con traiettoria rettilinea inclinata di un angolo ϑ_μ rispetto alla verticale, percorre un tragitto di lunghezza

$$\Delta z_0 = \sqrt{z^2\left(1+\mathrm{tg}^2\vartheta_\mu\right)} = \frac{z}{\cos\vartheta_\mu}$$

Lo spazio s percorso dal muone in funzione del suo impulso è dato da

$$s = \gamma\, v\, t = \frac{m_\mu \gamma\, v}{m_\mu}\, t = \frac{p_\mu}{m_\mu}\, t$$

Il tempo necessario al muone per raggiungere il suolo nel proprio sistema di riferimento è quindi

$$t_0 = \frac{\Delta z_0\, m_\mu}{p_\mu} = \frac{m_\mu\, z}{p_\mu\, \cos\vartheta_\mu}$$

La probabilità P che il muone raggiunga il suolo è data dalla probabilità che decada solo dopo aver percorso almeno una distanza pari a Δz_0, quindi

$$P = \frac{\int_{t_0}^{+\infty} e^{-t/\tau_\mu} \mathrm{d}t}{\int_{0}^{+\infty} e^{-t/\tau_\mu} \mathrm{d}t} = \frac{-\tau_\mu \left[e^{-t/\tau_\mu}\right]_{t_0}^{+\infty}}{-\tau_\mu \left[e^{-t/\tau_\mu}\right]_{0}^{+\infty}} = e^{-\frac{m_\mu \, z}{\tau_\mu \, p \, \cos\vartheta_\mu}} =$$

$$\simeq e^{\left[-\frac{106 \ \mathrm{MeV/c^2} \times 8.5 \times 10^3 \ \mathrm{m}}{2.2 \times 10^{-6} \ \mathrm{s} \times 4.8 \times 10^3 \ \mathrm{MeV/c^2} \times 0.951}\right]} =$$

$$\simeq e^{\left[-\frac{89.72 \times 10^6}{c} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]} \simeq e^{-0.299} \simeq 0.74$$

Esercizio _ 2

La differenza in massa fra i due nuclei $^{27}{}_{14}$Si e $^{27}{}_{13}$Al è di 6.0 MeV/c^2 .

Trascurando la differenza di massa fra protone e neutrone si stimi il raggio dei due nuclei.

Soluzione esercizio 2

$^{27}_{14}$Si e $^{27}_{13}$Al sono due nuclei speculari di media grandezza e si può ragionevolmente ascrivere quasi tutta la differenza fra le loro masse al diverso contributo di energia potenziale coulombiana.
Supponendo che i due nuclei abbiano simmetria circa sferica e supponendo altresì di poter considerare uniformemente distribuito in tali sfere il contenuto di carica elettrica per ognuno dei due nuclei, si ha che le energie associate alle due distribuzioni di carica per due nuclei speculari sono rispettivamente

$$E_Z = \frac{3}{5}\frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R} \qquad \text{e} \qquad E_{(Z-1)} = \frac{3}{5}\frac{[(Z-1)\,e]^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

con R il raggio della distribuzione sferica e uniforme di carica considerata, che rappresenta un stima del ”raggio” di ognuno dei due nuclei.

Osservando che per $^{27}_{14}\mathrm{Si}$ e $^{27}_{13}\mathrm{Al}$

$$6.0\ \mathrm{MeV} = E_Z - E_{(Z-1)} = \Delta E = \frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\frac{(2Z-1)\,\hbar c}{R} = \frac{3}{5}\alpha\frac{(2Z-1)\,\hbar c}{R}$$

si ottiene

$$R = \frac{1}{10.0}\alpha\,(2Z-1)\,\hbar c = \frac{27}{1370}\times 3\times 10^{8}\times 6.582\times 10^{-22} = 3.89\times 10^{-15}\ \mathrm{m}$$

Esercizio _ 3

L'energia di legame del nucleo di deuterio ^2H è di 2.23 MeV, e quella del nucleo di tritio ^3H è di 8.48 MeV.

Quale energia serve per portare due nuclei di deuterio alla distanza di 1.44×10^{-13} cm? (Si giustifichi la risposta).

Se una volta raggiunta questa configurazione ha luogo la reazione di fusione

$$^2H + ^2H \rightarrow ^3H + X$$

si calcolino la temperatura corrispondente e l'energia prodotta nella fusione e si dica a quale particella corrisponde X. (Si ricordi che la costante di Boltzman vale: 8.6×10^{-11} MeV/K)

Soluzione esercizio 3

Assumendo per il deutone "d" un raggio medio $\langle R_d\rangle$ dato dalla relazione $R = R_0 A^{1/3}$ per il raggio dei nuclei, con $R_0 = 1.16\times 10^{-15}$ m, si nota che alla distanza di 1.44×10^{-13} cm l'interazione fra i due nuclei di deuterio è praticamente ancora tutta elettromagnetica, di fatto elettrostatica.

Per calcolare l'energia cinetica necessaria a portarli a quella distanza reciproca, basta quindi valutare l'energia elettrostatica E_{el} di due cariche protoniche q puntiformi poste a quella stessa distanza, con velocità relativa nulla:

$$E_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q^2}{\langle R_d\rangle} = \frac{\alpha\,\hbar\,c}{\langle R_d\rangle}$$

e ricordando che:
$\alpha = 1/(137.036)$,
$\hbar = 6.582 \times 10^{-22}$ MeV×s,
$c = 2.998 \times 10^{8}$ m/s
si ottiene:

$$E_{el} \simeq 1 \text{ MeV}$$

Per stimare la temperatura T alla quale si trova il sistema di due nuclei di deuterio nella configurazione descritta si ponga

$$E_{el} = k\,T \qquad \text{da cui} \qquad T = \frac{E_{el}}{k}$$

da cui sostituendo i valori per k ed E_{el}

$$T \simeq 1.16 \times 10^{10} \text{ K}$$

La particella X che viene prodotta assieme al tritio nel processo di fusione dei due deutoni è un protone. Applicando quindi la conservazione dell'energia alla reazione

$$ {}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \;\longrightarrow\; {}^{3}_{1}\mathrm{H} + p $$

e ricordando che

$$ m_p \;\simeq\; 938.27\ \mathrm{MeV}/c^2 \quad \text{ed} \quad m_n \;\simeq\; 939.56\ \mathrm{MeV}/c^2 $$

si ha,

$$ 2\,(m_p + m_n)\,c^2 - 2 \times 2.23\ (\mathrm{MeV}) \;=\; (2m_n + m_p)\,c^2 + m_p c^2 - 8.48\ (\mathrm{MeV}) + Q $$

da cui, sostituendo

$$ Q \;=\; 4.02\ \mathrm{MeV} $$

che è il Q-valore della reazione, ovvero l'energia prodotta nella fusione.