

Capitolo 22

La forza nucleare

Si riassume quanto visto e discusso sulle forze nucleari. L'esistenza di nuclei stabili implica che l'interazione nucleone-nucleone è attrattiva e più intensa di quella coulombiana, anche se non può mantenersi attrattiva a qualunque distanza, altrimenti i nuclei collasserebbero su loro stessi; ciò suggerisce la presenza di un "core" repulsivo a brevi distanze. Questo "core" può essere ignorato considerando la struttura nucleare a basse energie, dato il modo in cui la capacità che una particella incidente ha di sondare una struttura bersaglio a brevi distanze, dipende dall'energia.

All'ordine più basso il potenziale può essere rappresentato da un termine centrale dominante, dipendente esclusivamente dalla separazione radiale fra le particelle coinvolte, assieme a un piccolo contributo di tipo non-centrale. Dagli esperimenti sull'interazione nucleone-nucleone si sa che essa è a range breve, dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni nucleari, e quindi non può essere imputata allo scambio diretto di gluoni, come avviene per la forza forte fondamentale fra quark.

Il confronto fra i dati della diffusione n-n e p-p, tenuto conto dell'interazione coulombiana, mostra che la forza nucleare gode della *simmetria di carica* ed è quindi sostanzialmente indipendente dalla carica elettrica (p-p = n-n = p-n), come visto nel paragrafo [4.3.11](#).

Gli studi effettuati sul deutone hanno evidenziato che le forze nucleari hanno una dipendenza dallo spin: la forza fra protone e neutrone in uno stato di spin totale 1 (spin paralleli), è infatti abbastanza intensa da permettere il debole legame che garantisce l'esistenza del deutone, mentre il potenziale per lo stato con spin totale 0 (spin anti-paralleli) non contempla stati legati. Si ricorda infine che le forze nucleari mostrano *saturazione* , per cui ogni nucleone di un nucleo ha praticamente interazioni attrattive solo con un numero limitato di altri nucleoni del nucleo a lui vicini, e questo discende dal breve raggio d'azione delle forze nucleari e si evidenzia nella forma dell'andamento dell'energia media di legame mostrato in figura [4.5](#).

22.1 Sistema legato nucleone-nucleone

22.1.1 La diffusione nucleone-nucleone

La diffusione nucleone-nucleone (N-N) alle basse energie, al di sotto della soglia di produzione del pione, è un fenomeno puramente elastico che non richiede la meccanica quantistica relativistica. I nucleoni sono visti come oggetti puntiformi privi di struttura interna ma dotati di spin e isospin. Per descrivere i processi d'interazione in questo contesto ci si può riferire a un opportuno potenziale.

I numerosissimi risultati sperimentali¹, ottenuti anche utilizzando fasci e/o bersagli polarizzati, mostrano che in un sistema di due nucleoni la forza nucleare dipende effettivamente sia dallo spin che dallo spin isotopico.

Considerando la diffusione N-N nel caso in cui gli spin fra proiettile e bersaglio siano paralleli o antiparalleli, ma ortogonali al piano di diffusione², si riescono a isolare i contributi di tripletto e di singoletto all'interazione. Se gli spin dei nucleoni coinvolti sono paralleli lo spin totale deve essere 1, se sono antiparalleli risultano possibili sia contributi da stati con spin totale pari a 0 che pari ad 1.

Passando all'isospin, nella diffusione protone-protone si ottiene il solo stato di tripletto con isospin 1, in quanto il protone ha $I_3 = +1/2$; nella diffusione protone-neutrone si hanno sia il contributo di singoletto che quello di tripletto.

Sfasamenti

Si consideri un nucleone proveniente da distanza infinita, con energia cinetica E e impulso \vec{p} , e che diffonde sul potenziale di un altro nucleone. Il nucleone incidente può essere descritto da un'onda piana e quello uscente, fino a certi valori di E , da un'onda sferica. Si trova che la sezione d'urto dipende dallo sfasamento fra queste due onde.

Nel caso di stati con ben definiti valori di spin e isospin, la sezione d'urto per la diffusione nucleone-nucleone entro un elemento d'angolo solido $d\Omega$ dipende dall'ampiezza di diffusione $f(\vartheta)$ della reazione

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vartheta)|^2 \quad (22.1)$$

¹Per un articolo di rassegna sull'interazione N-N si vedano ad esempio: R. Machleidt and I. Slaus, "The nucleon-nucleon interaction" - J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 27 (2001) R69, e la bibliografia associata.

²Il piano di diffusione corrisponde a quello contenente sia la retta che rappresenta l'asse del fascio incidente che la retta passante dal punto in cui avviene l'urto e diretta verso l'osservatore.

Nel caso di diffusione su un potenziale a breve raggio d'azione, per descrivere l'ampiezza di diffusione si utilizza la *decomposizione in onde parziali*³, secondo la quale l'onda diffusa è espansa in termini di valori fissati del momento angolare ℓ . Per la diffusione elastica e considerando di porsi a grandi distanze r dalla posizione del centro di diffusione, vale la relazione

$$f(\vartheta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) e^{i\delta_\ell} \sin\delta_\ell P_\ell(\cos\vartheta) \quad (22.2)$$

con

$$k = \frac{1}{\lambda} = \frac{|\vec{p}|}{\hbar} = \frac{\sqrt{2ME}}{\hbar} \quad (22.3)$$

il numero d'onda del nucleone diffuso, δ_ℓ lo sfasamento angolare e P_ℓ l'autofunzione del momento angolare coincidente con un polinomio di Legendre di ordine ℓ . Lo sfasamento δ_ℓ rappresenta la differenza di fase fra onda incidente originale e onda diffusa. Questi termini contengono l'informazione su forma e intensità del potenziale e la dipendenza dall'energia della sezione d'urto.

La conservazione del flusso di particelle caratterizzante la diffusione elastica considerata fa sì che il termine di sfasamento δ_ℓ contribuisca anche all'ampiezza tramite il termine $\sin\delta_\ell$. Ciò viene anche detto *unitarietà*. La decomposizione in onde parziali risulta particolarmente utile per le basse energie poichè in tal caso contribuiscono significativamente soltanto pochi termini dell'espansione, dato che per un potenziale con raggio d'azione a si ha

$$\ell \leq \frac{|\vec{p}| a}{\hbar} \quad (22.4)$$

Lo sfasamento δ_0 per $\ell = 0$, ovvero in onda "s", è fondamentale per il legame nucleare. Dalla [22.4](#) si deduce che per impulsi relativi inferiori a 100 MeV/c, l'onda "s" domina per la diffusione protone-protone, in cui il range d'interazione è dell'ordine di 2 fm; il polinomio di Legendre vale $P_0 = 1$ e non c'è quindi dipendenza da ϑ .

In figura [22.1](#) sono riportati i valori misurati dello sfasamento δ_0 per la diffusione nucleone-nucleone, separatamente per i casi di tripletto e singoletto di spin, rispetto all'impulso disponibile nel sistema del CM.

Lo sfasamento δ_0 risulta positivo per impulsi inferiori a circa 400 MeV/c, negativo per valori superiori. Se ne deduce, confermando quanto già visto per altre vie, che l'interazione nucleare ha carattere repulsivo a brevissimo raggio d'interazione, e natura attrattiva a più grandi distanze.

Se infatti si considera una funzione d'onda $\psi(\vec{x})$ a simmetria sferica, la si può decomporre in un opportuno prodotto di cui si consideri il fattore radiale espresso dalla funzione $u(r) = r \psi(r)$, che obbedisce all'equazione di

³Si vedano ad esempio: E. Gozzi, "Notes on Quantum Mechanics with Examples of Solved Problems", cap. 15; D. J. Griffiths, "Introduction to Quantum Mechanics", cap. 11.

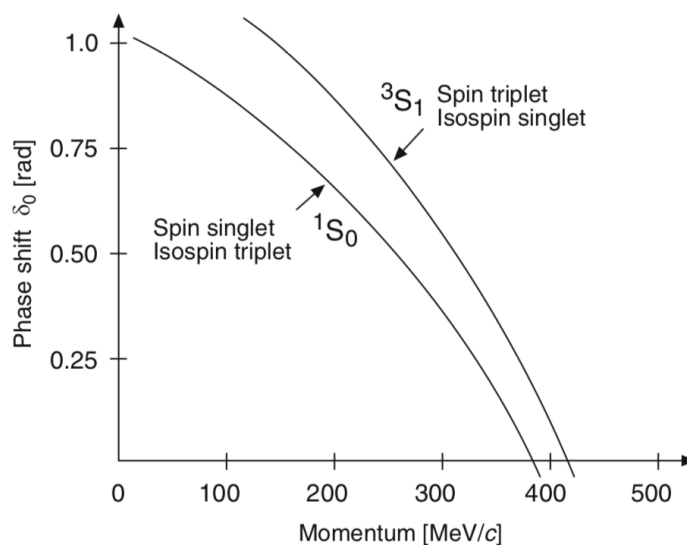


Figura 22.1: Valori sperimentali dello sfasamento δ_0 per l'interazione nucleone-nucleone, nel caso di tripletto e di singoletto di spin, in funzione dell'impulso relativo dei nucleoni interagenti.

Schrödinger

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2m(E - V)}{\hbar^2} u(r) = 0 \quad (22.5)$$

Risolvendo la [22.5](#) per un potenziale repulsivo rettangolare $V \rightarrow \infty$ con raggio d'azione b si trova

$$\delta_0 = -kb \quad (22.6)$$

Lo sfasamento è quindi negativo e proporzionale al raggio d'azione del

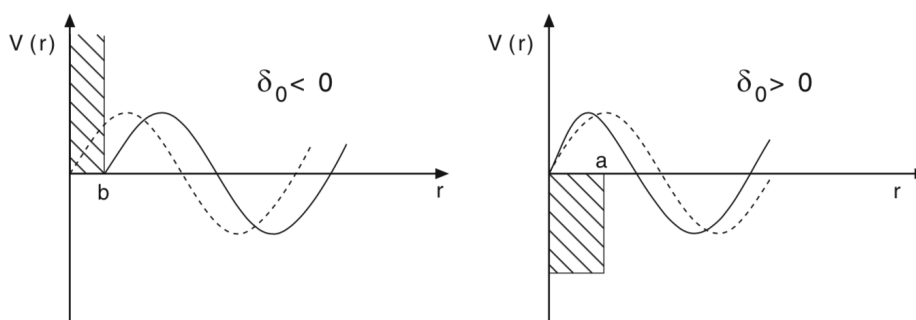


Figura 22.2: Potenziale repulsivo $V \rightarrow \infty$ con raggio d'azione b , a sinistra, e potenziale attrattivo con raggio d'azione a , a destra. Tratteggiate le onde non diffuse, per confronto.

potenziale; ciò significa che l'onda diffusa è in ritardo di fase rispetto a

quella non diffusa.

Per un potenziale attrattivo con raggio d'azione a invece, l'onda diffusa è in anticipo di fase rispetto a quella non diffusa e $\delta_0 > 0$. L'espressione completa per lo sfasamento è data da

$$\delta_0 = \arctg \left(\sqrt{\frac{E}{E + |V|}} \operatorname{tg} \frac{a\sqrt{2mc^2(E + |V|)}}{\hbar c} \right) - \frac{a\sqrt{2mc^2E}}{\hbar c} \quad (22.7)$$

Lo sfasamento è quindi positivo e decresce al crescere dell'impulso.

Sovrapponendo lo sfasamento associato a un potenziale repulsivo a breve raggio d'azione con quello di un potenziale attrattivo a un maggior raggio d'azione si ottiene quanto illustrato in figura 22.3, dove appunto lo sfasamento effettivo cambia segno così come osservato sperimentalmente.

La relazione fra δ_0 e il potenziale diffusore V è contenuta nelle espressioni

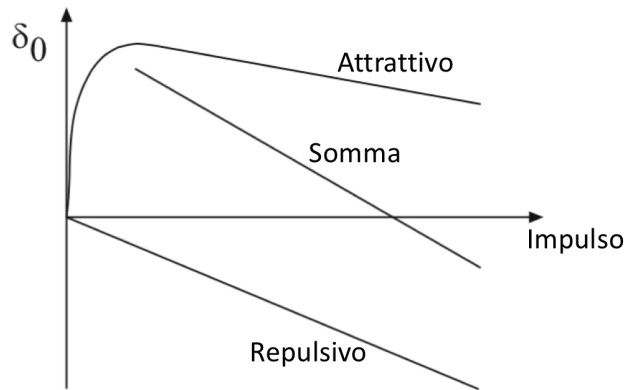


Figura 22.3: Sfasamento risultante dalla sovrapposizione degli effetti di un potenziale repulsivo a breve raggio e di uno attrattivo a raggio più ampio.

ni 22.6 e 22.7, visto che nella regione in cui agisce il potenziale, il numero d'onda k dipende dalla forma e dall'entità di quest'ultimo, oltre che dall'energia cinetica E del proiettile.

Un'analisi completa degli sfasamenti conduce al potenziale mostrato in figura 22.4, che descrive appunto un potenziale con un core fortemente repulsivo a breve raggio che diviene rapidamente attrattivo a poco meno di 1 fm, mantenendosi tale ma riducendo enormemente la propria intensità già a circa 2 fm.

Il potenziale nucleone-nucleone

Una forma generale del potenziale nucleone-nucleone si ottiene da opportune considerazioni sulle quantità dinamicamente rilevanti. Si trascura qui la struttura interna dei nucleoni e di conseguenza è chiaro che il potenziale che ne deriverà potrà essere considerato valido per il caso di stati legati

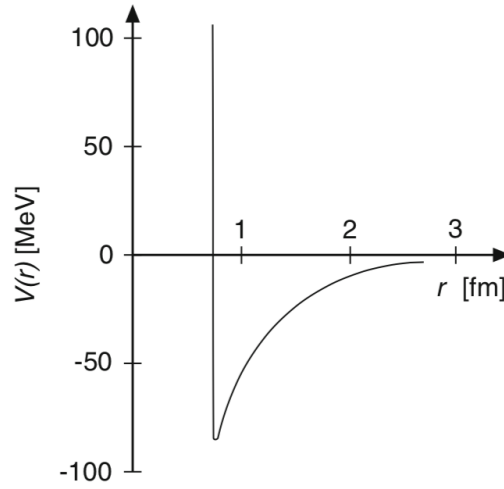


Figura 22.4: Illustrazione della dipendenza radiale del potenziale nucleone-nucleone per $\ell = 0$. Non sono mostrati gli effetti della dipendenza da spin e isospin.

nucleone-nucleone e solo per diffusione fra nucleoni a basse energie.

Le quantità che entrano in gioco nel determinare l'interazione sono la separazione spaziale \vec{x} fra i nucleoni, il loro impulso relativo \vec{p} , il momento angolare orbitale totale \vec{L} e le orientazioni relative fra gli spin \vec{s}_1 ed \vec{s}_2 di ogni coppia di nucleoni del sistema. Il potenziale deve poi essere uno scalare e per lo meno invariante per traslazioni e rotazioni. Dovrebbe inoltre risultare simmetrico rispetto allo scambio di due nucleoni.

Queste precondizioni derivano necessariamente dal rispetto di alcune proprietà per la teoria che si delinea, quale ad esempio la conservazione della parità, e pongono delle limitazioni alle caratteristiche dei termini scalari che possono contribuire al potenziale stesso. In definitiva, fissati i valori di isospin, il potenziale assume la forma

$$\begin{aligned}
 V(r) = & V_0(r) + V_{ss}(r) \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{\hbar^2} \\
 & + V_T(r) \frac{3(\vec{s}_1 \cdot \vec{x})(\vec{s}_2 \cdot \vec{x})/r^2 - s_1 s_2}{\hbar^2} + \frac{V_{LS}(r)(\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \cdot \vec{L}}{\hbar^2} \quad (22.8) \\
 & + \frac{V_{Ls}(r)(\vec{s}_1 \cdot \vec{L})(\vec{s}_2 \cdot \vec{L})}{\hbar^4} + \frac{V_{ps}(r)(\vec{s}_1 \cdot \vec{p})(\vec{s}_2 \cdot \vec{p})}{\hbar^2 m^2 c^2}
 \end{aligned}$$

V_0 è un normale potenziale centrale; il secondo termine descrive una pura interazione fra spin mentre il terzo termine, detto potenziale tensore, descrive una componente non-centrale dell'interazione. Questi ultimi due termini hanno la stessa forma dell'interazione fra due dipoli magnetici. Il termine tensoriale è particolarmente interessante in quanto mescola gli stati di mo-

mento angolare orbitale.

Il quarto termine deriva dall'interazione di spin-orbita che è a sua volta dovuta all'interazione forte.

I due ultimi termini sono compatibili con le prescrizioni di simmetria, ma essendo quadratici nell'impulso danno comunque un apporto trascurabile rispetto ai termini di tipo spin-orbita.

Gli sforzi per determinare i valori dei termini di questi contributi al potenziale tramite fit sui dati sperimentali non hanno condotto a valori definitivamente univoci per essi; c'è comunque un generale accordo sui primi quattro termini. Andrebbero poi considerati anche contributi di interazioni a più di due corpi.

Il termine centrale del potenziale per $S = 0$ si applica alle interazioni p-p ed n-n a bassa energia, ma la parte attrattiva non è abbastanza intensa da determinare la presenza di stati legati.

Per $S = 1$ invece, con il contributo dei termini tensoriale e di spin-spin, l'intensità risultante permette l'esistenza di uno stato legato, il deutone.

22.1.2 *- Il deutone

Il deutone è il più semplice fra tutti gli stati legati di nucleoni in quanto non si hanno complicazioni derivanti dall'interazione elettromagnetica (è trascurabile l'interazione puramente magnetica degli spin) e neppure dal principio d'esclusione di Pauli. Questo lo rende adatto per lo studio dell'interazione nucleone-nucleone. Esso è il solo nucleo con $A = 2$ e non presenta stati eccitati. Dagli esperimenti si hanno le seguenti caratteristiche, per lo stato fondamentale del deutone

Energia di legame $B(2,1) = 2.225 \text{ MeV}$

Spin e parità $J^P = 1^+$

Isospin $I = 0$

Momento magnetico $\mu_d = 0.8574 \mu_N$

Momento di quadrupolo elettrico $Q = 2.88 \times 10^{-31} \text{ m}^2$

Si osservi che $B(2,1)$ è piccola, a confronto dell'energia media tipica di legame per nucleone dei nuclei più grandi, dell'ordine di 8 MeV.

Inoltre con buona approssimazione si ha

$$\mu_p + \mu_n = 2.793 \mu_N - 1.913 \mu_N = 0.880 \mu_N \simeq \mu_d$$

Questo, assieme al valore unitario dello spin, suggerisce che il momento magnetico del deutone sia dovuto esclusivamente agli spin dei nucleoni costituenti, che questi siano paralleli e che si trovino in uno stato con momento angolare orbitale nullo, ovvero con $\ell = 0$, per cui ci si potrebbe aspettare che lo stato fondamentale del deutone sia uno stato $|^3S_1\rangle$.

Ma quest'ipotesi se rigorosamente vera, condurrebbe all'annullarsi del momento di quadrupolo elettrico del deutone, essendo nullo il valor medio della quantità $\langle {}^3S_1 | (3z^2 - r^2) | {}^3S_1 \rangle$, data la simmetria sferica dell'autofunzione associata. Siccome però il valore sperimentale del momento di quadrupolo elettrico del deutone non è zero, se ne conclude che l'ipotesi fatta corrisponde solo approssimativamente alla realtà e che il deutone ha una struttura leggermente deformata rispetto a quella a simmetria sferica. Ciò richiede che la funzione d'onda del deutone contenga anche un piccolo contributo con $\ell = 2$, anch'esso come quello con $\ell = 0$, consistente con la parità del deutone che essendo uno stato legato di due nucleoni deve avere parità -1^ℓ .

Dato che lo spin del deutone è pari a 1 ed esso si trova prevalentemente in uno stato con $\ell = 0$, ne consegue che gli spin dei nucleoni devono essere allineati e paralleli. La possibilità che siano allineati e antiparalleli condurrebbe a un ipotetico stato legato n-p con spin nullo, ma sperimentalmente si sa che il deutone è il solo stato legato n-p, quindi *si deduce che il potenziale che descrive l'interazione fra neutrone e protone dipende dallo spin*.

Se inoltre, come visto in precedenza, l'interazione forte non distingue fra neutroni e protoni (spin isotopico), l'inesistenza di stati legati neutrone-protone con $s = 0$ è consistente con la non esistenza di analoghi stati legati neutrone-neutrone o protone-protone con $s = 0$ ed $\ell = 0$.

Inoltre si ricorda che il principio d'esclusione implica la non esistenza di stati legati n-n o p-p con $s = 1$ ed $\ell = 0$, in quanto la funzione d'onda completa di coppie di fermioni identici deve essere antisimmetrica, ovvero se due fermioni occupano lo stesso livello $\ell = 0$ allora devono avere spin anti-paralleli. Se ne conclude quindi che l'esistenza di uno stato legato n-p e la contemporanea non-esistenza di stati legati p-p ed n-n, sono consistenti col fatto che la forza nucleare non distingue fra neutroni e protoni, ma soltanto se essa dipende dallo spin.

I risultati sperimentali sulla diffusione a bassa energia fra protone e neutrone mettono poi inequivocabilmente in evidenza che il potenziale d'interazione dipende dall'orientazione relativa fra gli spin di protone e neutrone.

Il fatto che esista lo stato con $s = 1$ e non quelli con $s = 0$, potrebbe suggerire anche che la forza nucleare sia di tipo attrattivo per $s = 1$ e repulsivo per $s = 0$, ma ciò non è corretto, la forza nucleare è attrattiva in entrambi i casi, ma solo per $s = 1$ lo è a sufficienza da generare l'esistenza di uno stato legato.

L'autofunzione dello stato fondamentale del deutone è in definitiva una miscela di due stati con uguali numeri quantici J^P

$$|\psi_d\rangle = 0.98 |{}^3S_1\rangle + 0.20 |{}^3D_1\rangle \quad (22.9)$$

che comporta una probabilità del 4% di trovare il deutone in uno stato 3D_1 . Dato che le interazioni deboli non conservano la parità, sarebbe possibile

una probabilità finita di trovare il deutone anche nello stato $|^3P_1\rangle$, di parità dispari, ma il valore di tale probabilità è quantitativamente trascurabile.

22.2 Analogia atomico-molecolare

Idealmente si vorrebbe poter interpretare il potenziale nucleone-nucleone in termini della dinamica delle interazioni fondamentali fra quark. Non si è ancora in grado di farlo ma si può ragionare per analogia. In figura 22.5 è schematicamente illustrato l'andamento radiale del potenziale nucleone-nucleone così come dedotto dalla gran messe di dati forniti dallo studio di interazioni elastiche p-p e n-p. È evidente la somiglianza col potenziale agen-

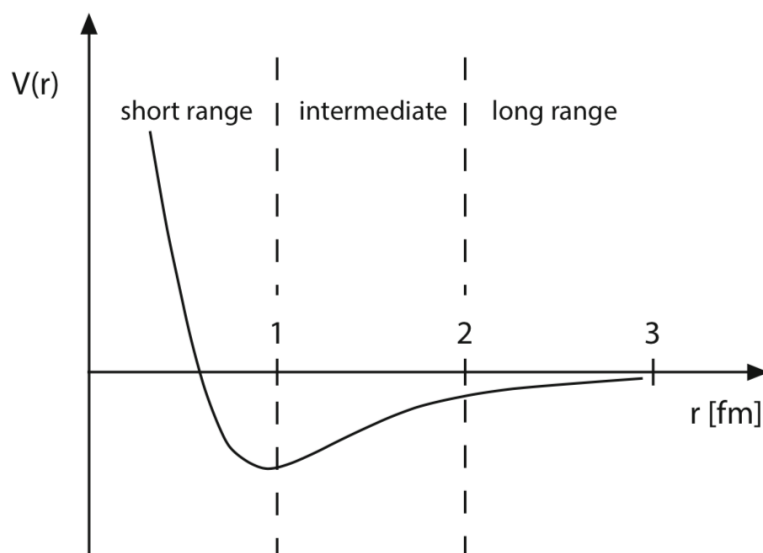


Figura 22.5: Andamento radiale del potenziale nucleone-nucleone in un nucleo.

te fra due atomi, con una componente repulsiva a distanze compatibili con la sovrapposizione spaziale delle due strutture e una attrattiva a distanze maggiori che poi diminuisce al crescere di queste.

Ragionando dunque per analogia col caso delle strutture atomiche e molecolari, si immagina che i quark giochino il ruolo degli elettroni. Vi sono in tal caso alcune possibilità quali interazioni di tipo "ionico", di tipo "van der Waals" o di tipo "covalente".

La prima tipologia può essere subito scartata per il caso nucleare, in quanto richiederebbe il "prestito a lungo termine" di un quark da un nucleone ad un altro nucleone e ciò non è compatibile con le intense forze di confinamento che caratterizzano l'interazione fra quark in un nucleone.

Anche la seconda tipologia va scartata in quanto lo scambio di una coppia di gluoni che ne conseguirebbe da luogo a un contributo troppo debole per giustificare l'effettiva interazione nucleare a distanze intermedie.

Rimane dunque la forma di legame covalente che nel caso nucleare dovrebbe corrispondere a una forma di compartecipazione di un singolo quark tra due diversi nucleoni. Questi devono tuttavia restare cromaticamente neutri durante la forma di interazione descritta, per cui il quark compartecipato da un nucleone deve essere dello stesso colore di quello compartecipato dall'altro nucleone. L'effetto di ciò, essendoci tre possibili diversi stati di colore, è di ridurre la forza che ne consegue al punto che questo solo meccanismo non è in grado di giustificare la profondità osservata per il potenziale nucleare. Si tenga però presente che in aggiunta ai tre quark di valenza, in un nucleone vi sono anche fluttuazioni di coppie quark-antiquark del mare, e nel caso in cui tali coppie siano cromaticamente neutre potranno anch'esse essere compartecipate fra due nucleoni, contribuendo all'interazione. Risulta anzi che il loro contributo è maggiore rispetto a quello di singoli quark. I più leggeri fra questi di-quark sono i pioni π , il cui scambio fra nucleoni costituisce il grosso della parte attrattiva della forza nucleare.

In linea di principio la repulsione a breve range potrebbe essere imputata allo scambio di di-quark (mesoni) più pesanti eventualmente in differenti stati di spin totale. Dai dati sperimentali emergono molti candidati mesonici possibili, in accordo con le predizioni del modello a quark, e ogni scambio risulta responsabile di uno specifico contributo al potenziale totale nucleone-nucleone. Modelli che tengono conto di alcuni di questi possibili scambi sono in grado di fornire eccellenti fit dei dati ottenuti da esperimenti di diffusione nucleone-nucleone. Questi modelli di scambio bosonico sono però di tipo "semi-fenomenologico", non in grado quindi di fornire una spiegazione fondamentale della parte repulsiva.

Nel caso di due atomi legati in una stessa molecola, la parte repulsiva a brevi distanze è dovuta al principio d'esclusione di Pauli. Considerando infatti che normalmente gli elettroni dei due atomi occupano i livelli energetici più bassi possibili, si ha che se i due atomi si avvicinano, come nel caso di un urto, e quindi le due nuvole elettroniche iniziano a sovrapporsi spazialmente, allora alcuni degli elettroni che le popolano, dovendo ubbidire al principio d'esclusione, vengono forzatamente eccitati a livelli energetici superiori e ciò non può che avvenire a carico di una frazione dell'energia cinetica disponibile nel canale d'ingresso; è questo che genera l'effetto repulsivo a distanze ridotte.

Anche i quark di un sistema di due nucleoni ubbidiscono al principio d'esclusione, per cui la funzione d'onda che descrive quei 6 quark deve necessariamente essere anti-simmetrica. Il numero di quark che possono occupare lo stato a più bassa energia, con $\ell = 0$, senza violare il principio di Pauli è però pari a 12, in quanto i quark coinvolti si differenziano su tre possibili diversi

stati di colore, su due diversi possibili stati di spin e su due diversi possibili stati di isospin (quark *up* e quark *down*). La parte di spin-isospin della funzione d'onda completa deve dunque essere simmetrica in quanto la parte legata al colore è antisimmetrica e quella spaziale, per $\ell = 0$, è simmetrica. Si ha perciò che il principio d'esclusione non limita, per quanto concerne la funzione d'onda spaziale, la possibilità che i 6 quark costituenti due nucleoni possano occupare il livello energetico più basso ($\ell = 0$); di conseguenza la ragione della presenza del "core" repulsivo va cercata altrove.

Si osservi che l'energia potenziale cresce se tutti i 6 quark restano nello stato con $\ell = 0$ mantenendo gli spin allineati; si confronti ad esempio la massa della risonanza $\Delta(1232)$, i cui tre quark componenti hanno gli spin allineati, con quella del generico nucleone, più leggero di circa $295 \text{ MeV}/c^2$, in cui una coppia di quark componenti si trova nella condizione di spin antiparalleli. Nel caso dei 6 quark, se quando i due nucleoni si "sovrappongono" restano tutti nello stato con $\ell = 0$, è chiaro che il numero di coppie di quark con spin paralleli è maggiore rispetto al considerare i nucleoni singolarmente, e quindi l'energia potenziale del sistema aumenta; si trova che l'aumento, per ogni coppia in più di quark con spin paralleli, equivale a metà della differenza in energia fra la massa della Δ e quella del nucleone.

È d'altronde ragionevole che il sistema di due nucleoni cerchi spontaneamente di minimizzare questo contributo alla propria energia massimizzando il numero di coppie di quark con spin anti-paralleli, ma ciò entra in competizione con l'esigenza che la parte di spin-sapore della funzione d'onda sia completamente simmetrica, se tutti i 6 quark restano nello stato con $\ell = 0$. Si trova che il contributo energetico può essere ridotto se almeno una coppia di quark si pone nello stato con $\ell = 1$. L'energia d'eccitazione necessaria a questo è però confrontabile con la diminuzione dell'energia di appaiamento di spin che si ottiene, quindi in ogni caso l'energia potenziale del sistema di due nucleoni aumenta se essi tendono verso una grande sovrapposizione spaziale mutua.

La repulsione che si osserva a brevi distanze è dunque conseguenza sia dell'aumento dell'energia dovuta agli appaiamenti di spin che dell'eccitazione di coppie di quark a stati con $\ell = 1$.

La forza nucleare viene anche detta "interazione forte *residua*", intendendo come "interazione forte" tout court quella che interviene fra i quark all'interno di ogni nucleone.

22.3 Il potenziale di Yukawa

Si veda ora quello che è stato storicamente il primo approccio al problema della forza nucleare in termini di scambio di bosoni, formulato da Yukawa. Egli considerò la questione del raggio d'azione della forza nucleare da una prospettiva nuova, mutuandola dall'approccio che ha condotto a interpretare

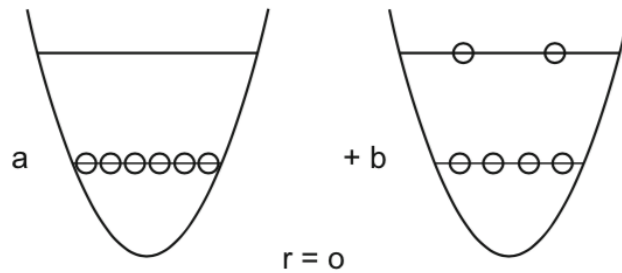


Figura 22.6: Lo stato dei quark per due nucleoni fortemente sovrapposti. In un'approssimazione non adiabatica si trova che domina la configurazione b che diviene però sempre meno importante all'allontanarsi reciproco dei due nucleoni.

e spiegare le interazioni elettromagnetiche fra sorgenti del campo elettromagnetico, cioè le cariche elettriche, in termini di scambio, ovvero emissione e assorbimento, di fotoni γ , i quanti mediatori dell'interazione elettromagnetica, che sono bosoni.

La propagazione dei fotoni è descritta dalle equazioni di Maxwell e avviene alla velocità della luce, pari a c nel vuoto. Questo porta, come diretta conseguenza della Relatività Ristretta, a definire il fotone *privo di massa*, $m_\gamma = 0$. Inoltre il potenziale coulombiano è proporzionale all'inverso della distanza dalla sorgente del campo:

$$V_C(r) \propto \frac{1}{r} \quad (22.10)$$

il che determina il lungo raggio d'azione della forza associata.

Immaginando anche la forza nucleare come un tipo di interazione in cui vi sia una particella mediatrice scambiata, sempre un bosone, che possieda però una massa non nulla, Hideki Yukawa⁴, nel 1934, individuò per la forza nucleare un potenziale corrispondente della forma

$$V_Y(r) \propto \frac{e^{-\frac{mc}{\hbar} r}}{r} \quad (22.11)$$

dove m rappresenta la massa della particella mediatrice dell'interazione. Il potenziale di Yukawa, nel limite in cui $m \rightarrow 0$, tende alla forma coulombiana.

È interessante e utile leggere, in figura 22.7, le prime righe dell'articolo in cui Yukawa descriveva l'origine della sua idea, per poi svilupparla. Trascurando la dipendenza dallo spin, il che non pregiudica la comprensione di alcune fondamentali caratteristiche dell'interazione fra nucleoni, il ragionamento di

⁴Hideki Yukawa, "On the interaction of elementary particles I" - Proc. Phys. Math. Soc. Jap. 17 (1935) 48-57

On the Interaction of Elementary Particles. I.

By Hideki YUKAWA.

(Read Nov. 17, 1934)

§ 1. Introduction

At the present stage of the quantum theory little is known about the nature of interaction of elementary particles. Heisenberg considered the interaction of "Platzwechsel" between the neutron and the proton to be of importance to the nuclear structure.⁽¹⁾

Recently Fermi treated the problem of β -disintegration on the hypothesis of "neutrino"⁽²⁾. According to this theory, the neutron and the proton can interact by emitting and absorbing a pair of neutrino and electron. Unfortunately the interaction energy calculated on such assumption is much too small to account for the binding energies of neutrons and protons in the nucleus.⁽³⁾

To remove this defect, it seems natural to modify the theory of Heisenberg and Fermi in the following way. The transition of a heavy particle from neutron state to proton state is not always accompanied by the emission of light particles, i. e., a neutrino and an electron, but the energy liberated by the transition is taken up sometimes by another heavy particle, which in turn will be transformed from proton state into neutron state. If the probability of occurrence of the latter process is much larger than that of the former, the interaction between the neutron and the proton will be much larger than in the case of Fermi, whereas the probability of emission of light particles is not affected essentially.

Figura 22.7: Introduzione dell'articolo di Yukawa.

Yukawa può essere così schematizzato.

Si considerino due nucleoni di massa M in quiete nel sistema del laboratorio, per cui l'energia totale del sistema fisico da loro rappresentato è pari a $2Mc^2$. Si supponga che uno dei due nucleoni emetta un bosone di massa m prendendo in qualche modo "a prestito" l'energia di massa mc^2 necessaria e conseguentemente la variazione dell'energia totale del sistema risulta non inferiore a $\Delta E = mc^2$. Questa *fluttuazione energetica* ΔE , che di per sè, da un punto di vista classico, violerebbe il principio di conservazione dell'energia, può aver luogo purchè la sua durata temporale sia vincolata dalla relazione di indeterminazione $\Delta E \Delta t \geq \hbar$. Quindi, come limite superiore conseguente per Δt si ottiene: $\Delta t = \hbar/(mc^2)$.

Supponendo come caso limite che il bosone sia emesso a velocità c , nell'intervallo di tempo Δt concessogli dal principio di indeterminazione può percorrere la distanza

$$a_0 = c\Delta t = \frac{\hbar}{mc} \quad (22.12)$$

che coincide con la cosiddetta *lunghezza d'onda Compton* λ del bosone di massa m e che tende ad ∞ per $m \rightarrow 0$, coerentemente col fatto che il raggio d'azione dell'interazione elettromagnetica risulti infinito. Ne consegue che i due nucleoni possono interagire se la loro distanza mutua r è inferiore ad a_0 , e non interagiscono o interagiscono debolmente se $r > a_0$, che definisce quindi il *raggio d'azione* delle forze nucleari.

Assumendo, per quanto visto in precedenza e noto dai dati sperimentali, ragionevolmente pari a circa $1.4 \cdot 10^{-15}$ m il valore di λ e quindi del raggio d'azione a_0 della forza nucleare, si ottiene per m :

$$\begin{aligned} m &= \frac{\hbar}{\lambda c} \approx \frac{6.583 \times 10^{-22} \times 2.998 \times 10^8 \text{ MeV s}}{c \times 1.4 \times 10^{-15}} \frac{\text{MeV s}}{\text{m}} \approx \\ &\approx \frac{1.9736 \times 10^{-13}}{c^2 \cdot 1.410^{-15}} \text{ MeV} \approx 141 \frac{\text{MeV}}{c^2} \end{aligned} \quad (22.13)$$

Nota quindi la massa della particella mediatrice si può predire il raggio d'azione dell'interazione, e viceversa. Si noti che si è anche implicitamente fatta l'ipotesi che l'intensità dell'*accoppiamento* considerato sia la medesima fra la particella mediatrice e qualunque dei due nucleoni considerati.

Nel 1936, studiando i raggi cosmici, fu scoperto il muone μ che avendo una massa di $105.66 \text{ MeV}/c^2$, si pensò potesse essere la particella ipotizzata da Yukawa. Analizzandone il comportamento si osservò però che il muone non era sensibile all'interazione nucleare, e quindi non poteva essere la particella mediatrice cercata.

Questa, chiamata pione π , fu poi effettivamente scoperta nel 1947 da C. Lattes, G. Occhialini e C. Powell analizzando, presso l'Università di Bristol, le tracce lasciate in emulsioni fotografiche dai prodotti di reazioni causate sempre da raggi cosmici⁵.

Il pione era effettivamente la particella mediatrice cercata⁶: esistono tre tipi di pioni, due carichi e uno neutro di masse rispettive

$$m_{\pi^+} = m_{\pi^-} = 139.57 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_{\pi^0} = 134.98 \text{ MeV}/c^2$$

Si prosegue ora sulla scia di Yukawa per individuare la forma del potenziale cercato. Nel caso dell'interazione elettromagnetica fra due cariche uguali q , l'energia potenziale del campo nelle zone di spazio non occupate dalle

⁵Si veda l'immagine in figura [9.2](#)

⁶Si veda il paragrafo [9.3](#)

cariche elettriche, espressa da $U_C(r) = q^2/4\pi\epsilon_0 r$, è soluzione dell'equazione differenziale di Laplace nel caso statico

$$\nabla^2 U_C(r) = 0 \quad (22.14)$$

Ci si può quindi chiedere come modificare la [22.14](#) quando le forze fra due sorgenti del campo sono caratterizzate da un raggio d'azione finito. La modifica più intuitiva consiste nell'aggiungere una costante che tenda a zero quando il raggio d'azione dell'interazione tende all'infinito, che per motivi dimensionali sia inversamente proporzionale al quadrato di una lunghezza e di segno tale da generare un potenziale che si annulli all'infinito. L'ultima condizione, come si vedrà, richiede una costante definita negativa, per cui è opportuno scriverla come l'opposto del quadrato di qualcosa. La conseguente modifica dell'equazione di Laplace porta alla

$$(\nabla^2 - \mu^2)U(r) = 0 \quad (22.15)$$

detta *equazione di Klein-Gordon* statica, in cui $\mu = 1/a_0$. Si osservi che al limite $\mu \rightarrow 0$ che equivale ad $a_0 \rightarrow \infty$, e quindi $m \rightarrow 0$, la [22.15](#) si riconduce alla [22.14](#).

Data la simmetria sferica del problema impostato, si consideri la parte radiale del Laplaciano

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \mu^2 \right) U(r) = 0 \quad (22.16)$$

che cercando una soluzione del tipo $U(r) = y(r)/r$, diventa

$$\frac{d^2}{dr^2} y(r) - \mu^2 y(r) = 0 \quad (22.17)$$

che ha come integrale generale

$$y(r) = c_0 e^{-r/a_0} + c_1 e^{r/a_0} \quad (22.18)$$

Per evitare che $y(r)$ diverga, per $r \rightarrow \infty$ bisogna porre $c_1 = 0$. Posto poi $c_0 = -g^2/4\pi$ si ottiene l'espressione dell'energia potenziale di Yukawa

$$U_Y(r) = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-r/a_0}}{r} \quad (22.19)$$

che come il potenziale coulombiano diverge per $r \rightarrow 0$, ma tende asintoticamente a zero molto più rapidamente al crescere della distanza fra i due nucleoni, oltre il valore della lunghezza d'onda Compton a_0 del pione π .

La quantità g , omogenea a una carica elettrica, è detta *carica mesonica* e $\alpha_X = g^2/4\pi\hbar c$ rappresenta la *costante d'accoppiamento*⁷ tra i nucleoni e il

⁷Si trova che g ha in generale una dipendenza dall'impulso del mesone scambiato.

cosiddetto *campo mesonico*, similmente a come $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ rappresenta la costante d'accoppiamento tra gli elettroni e il *campo elettromagnetico* o *fotonico*.

Espressioni più raffinate del potenziale nucleone-nucleone, ottenibili nell'ambito della *teoria mesonica* delle interazioni nucleari, tengono conto dell'esistenza dei tre tipi di pioni (π^+ , π^0 , π^-) e come accennato nel paragrafo precedente, di altri mesoni più pesanti e delle loro proprietà di simmetria, che determinano la scelta del termine di *sorgente* del campo mesonico, assente nell'equazione di Klein-Gordon qui dedotta e risolta, oltre che dell'indipendenza delle forze nucleari dalla carica elettrica.

Si ricordi comunque che l'interazione nucleare è in realtà il complicato effetto risultante di come agiscono le interazioni forti fondamentali fra le distribuzioni di quark, costituenti e del mare, all'interno dei due nucleoni.

5.7 Fissione nucleare

La fissione nei nuclei pesanti fu scoperta sperimentalmente da O. Hahn e F. Strassman nel 1938 quando constatarono che bombardando uranio con neutroni si ottenevano come prodotti nuclei di masse approssimativamente simili alla metà di quella dell'uranio bombardato; il fenomeno fu subito dopo giustificato teoricamente da L. Meitner e O. Frish¹⁸.

Oltre alla fissione indotta si ha anche fissione spontanea quando, senza intervento dall'esterno, un nucleo genitore si spezza spontaneamente in due nuclei figli approssimativamente della medesima massa. Calcoli basati sulla formula semiempirica di Weizsäcker prevedono come si vedrà che il massimo guadagno in energia si ha quando i due frammenti hanno esattamente la stessa massa, ma sperimentalmente si trova che questa configurazione risulta poco probabile. In figura 5.21 si vede ad esempio la distribuzione in massa dei frammenti di fissione del $^{254}_{100}\text{Fm}$.

Distribuzioni di questo tipo sono caratteristiche, oltre che delle fissioni spontanee, anche dei casi di fissioni indotte dall'urto di neutroni termici, mentre invece le fissioni indotte da urti di particelle molto energetiche conducono a distribuzioni di prodotti con masse che sono fra loro molto più simili. La distribuzione in massa dei frammenti di fissione non ha inoltre sempre

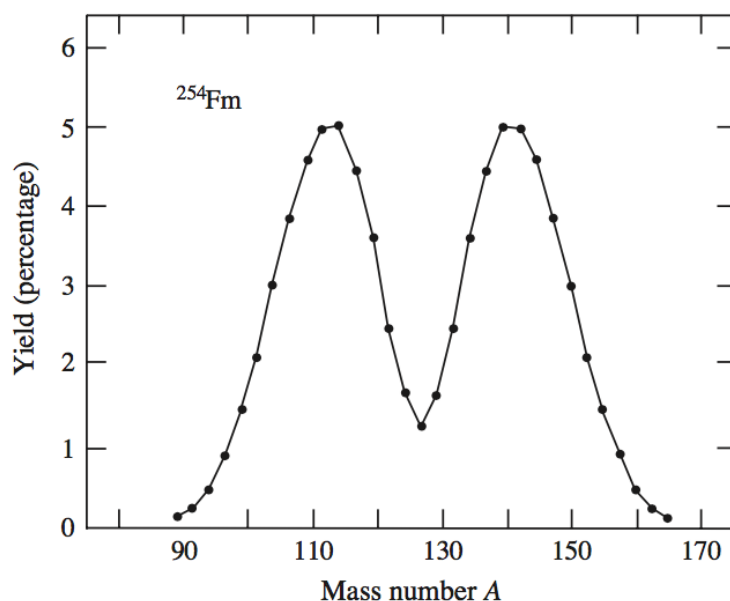


Figura 5.21: Distribuzione in massa dei frammenti di fissione spontanea del Fermio ^{254}Fm .

¹⁸O.R. Frisch, "Physical Evidence for the Division of Heavy Nuclei under Neutron Bombardment" - Supp. to Nature of February 18 (1939) 276

un'andamento "liscio" come quello mostrato in figura e per alcuni nuclei fissionabili evidenza delle irregolarità marcate che sono dovute alla intima struttura a *shell* dei nuclei stessi, come ad esempio mostrato in figura [5.22](#). Un esempio che mostra la natura decisamente asimmetrica dei frammenti è

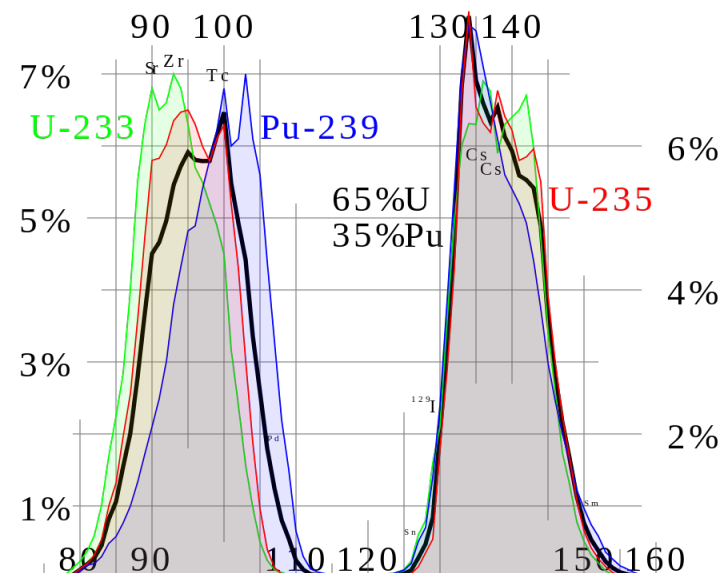


Figura 5.22: Distribuzione in massa dei frammenti di fissione di ^{233}U , ^{235}U e ^{239}Pu ; in nero una tipica miscela utilizzata nei reattori nucleari di potenza.

la fissione spontanea dell'uranio $^{238}_{92}\text{U}$,



processo a vita media molto lunga che rilascia un'energia di circa 154 MeV sotto forma di energia cinetica dei prodotti di fissione.

Come visto dalla tabella dei nuclidi, i nuclei pesanti sono ricchi in neutroni e questo dá conseguentemente luogo a prodotti di fissione anch'essi ricchi in neutroni, assieme ad alcuni neutroni liberi. I prodotti di fissione sono solitamente fuori dalla linea di stabilità per decadimento β e quindi danno tipicamente luogo a successive fasi di decadimento. Il $^{145}_{57}\text{La}$ decade con tre stadi successivi nell'isotopo β -stabile $^{145}_{60}\text{Nd}$, liberando un'energia di 8.5 MeV sotto forma di energia cinetica degli elettroni e dei neutrini emessi.

Nonostante si trovi che la probabilità di fissione spontanea aumenta al crescere di A , essa resta comunque un processo piuttosto raro: il rateo di fissione spontanea per $^{238}_{92}\text{U}$ è ad esempio di soli $3 \times 10^{-24} \text{ s}^{-1}$, mentre il rateo di decadimento α per lo stesso isotopo è pari a $5 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$, ovvero circa 1.7×10^6 volte più intenso. Nel caso del $^{254}_{100}\text{Fm}$ mostrato in figura [5.21](#), anche se più pesante, il rateo di decadimento α è circa 1.7×10^3 volte superiore a quello di fissione. La fissione diviene il processo di decadimento

dominante soltanto per gli elementi più pesanti, con $A \geq 270$.

Un'interpretazione oltre che qualitativa anche quantitativa del processo di fissione può essere ottenuta basandosi sul modello, formulato nel 1939 con ragionamenti classici da N. Bohr e J.A. Wheeler¹⁹, secondo il quale un nucleo è immaginato come costituito da una *goccia di liquido* di nucleoni, incomprimibile, detto anche *liquido di Fermi*. Si tratta ovviamente di un liquido "speciale": per una goccia di liquido usuale, ad esempio, le condizioni di equilibrio sono determinate dall'azione repulsiva delle forze coulombiane e da quella attrattiva delle forze di tensione superficiale; nel liquido di Fermi queste ultime danno luogo al termine di energia di superficie nell'equazione semiempirica di Weizsäcker che avendo lo stesso segno di quello coulombiano contribuisce invece a ridurre e non ad aumentare il legame nucleare. Si studi quindi, sulla base del modello a goccia, il problema della fissione di un nucleo genitore con numero di massa A ed energia di legame $B(A, Z)$, in due frammenti con numeri di massa simili, ξA e $(1 - \xi)A$ rispettivamente. Si supponga inoltre che anche i protoni si distribuiscano sui due frammenti in modo proporzionale alla massa. Dette $B_1(\xi A, \xi Z)$ e $B_2[(1 - \xi)A, (1 - \xi)Z]$ le energie di legame dei due frammenti, e $B_{12}(A, Z; \xi)$ la loro somma

$$B_{12}(A, Z; \xi) = B_1(\xi A, \xi Z) + B_2[(1 - \xi)A, (1 - \xi)Z] \quad (5.78)$$

si ha che la frammentazione spontanea del nucleo ${}^A_Z X$ nei due frammenti ${}^{\xi A}_{\xi Z} X$ e ${}^{(1-\xi)A}_{(1-\xi)Z} X$ è energeticamente permessa se

$$Q = \Delta B(A, Z; \xi) = B(A, Z) - B_{12}(A, Z; \xi) > 0 \quad (5.79)$$

Quella individuata è soltanto una condizione necessaria e Q rappresenta il grado di *esotermicità* del processo, quando questo può aver luogo.

Nella formula semiempirica di Weizsäcker per l'energia di legame vi sono tre termini "classici" dipendenti esplicitamente dalla forma del nucleo, che qui si immagina appunto come una goccia di liquido incomprimibile: l'energia di volume $B_V(A) = b_V A$, l'energia di superficie $B_S(A) = b_S A^{2/3}$, e l'energia coulombiana $B_C(A) = b_C Z(Z - 1)A^{-1/3} \simeq b_C Z^2 A^{-1/3}$. Tenendo conto di questi si può quindi studiare la stabilità di una goccia di tale liquido in funzione di una perturbazione esterna. La [5.79](#) diventa

$$Q = \Delta B(A, Z; \xi) = b_S A^{2/3} [1 - \xi^{2/3} - (1 - \xi)^{2/3}] + \\ + b_C Z^2 A^{-1/3} [1 - \xi^{5/3} - (1 - \xi)^{5/3}] > 0 \quad (5.80)$$

Si trova che Q assume valore massimo per $\xi = 1/2$ e calcolandolo ad esempio per il caso di ${}^{238}_{92}\text{U}$, ricordando dalla [4.56](#) che $b_S = +17.23$ MeV e

¹⁹N. Bohr - J.A. Wheeler, "The Mechanism of Nuclear Fission" - Phys. Rev. 56(1939) 426

$b_C = +0.697$ MeV, si ottiene $Q \simeq 180$ MeV. Nonostante l'ampia esotermicità del processo la probabilità di fissione spontanea per ${}^{238}_{92}\text{U}$ è bassissima, con una vita media superiore a 10^6 anni, e ciò in quanto il sistema deve superare un'elevata barriera di potenziale affinché la fissione possa aver luogo. Per ottenere una seppur grossolana valutazione dell'entità della barriera,

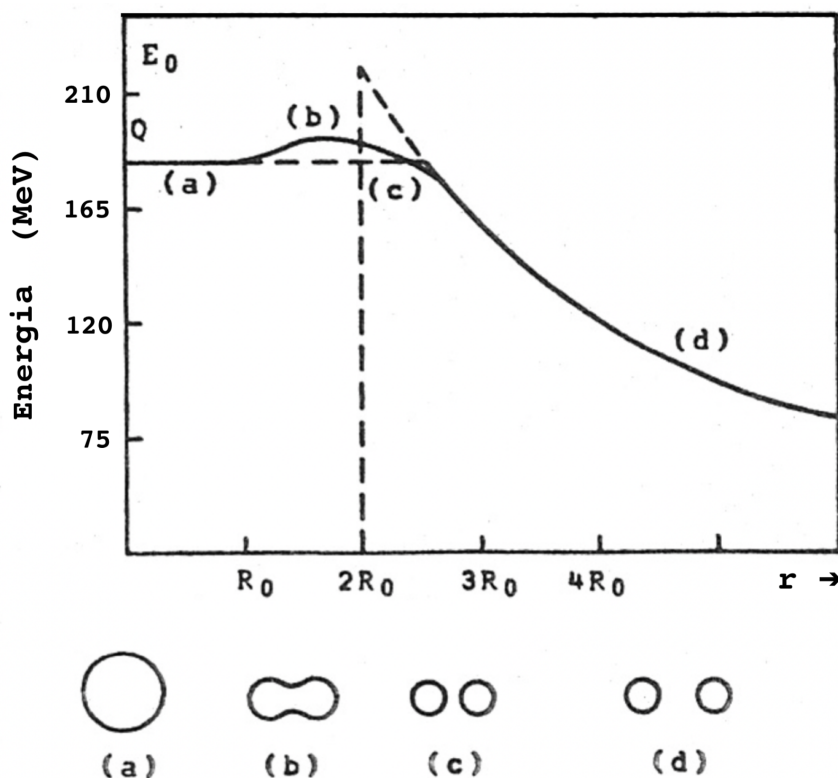


Figura 5.23: Barriera di potenziale per la fissione di ${}^{238}_{92}\text{U}$.

mostrata in figura 5.23, si può ragionare nel modo seguente: si immagini il processo di fusione, inverso alla fissione e si riporti in grafico l'energia di interazione E_{int} fra i due frammenti sferici in funzione della distanza r fra i loro centri. Il valore massimo di E_{int} si ha quando le due sfere che rappresentano i frammenti sono con le superfici a contatto e vale

$$E_{int}^0 = \frac{e^2 (Z/2)^2}{2r_0 (A/2)^{1/3}} \quad (5.81)$$

con r_0 espresso dalla 4.50. Per ${}^{238}_{92}\text{U}$ si ha ad esempio $E_{int}^0 \simeq 249$ MeV. Il valore limite dell'energia per $r \rightarrow 0$ coincide ovviamente con Q , dato dalla 5.80. L'altezza della barriera risulta quindi pari a $\Delta E_{bf} = E_{int}^0 - Q$ e la condizione di instabilità per il sistema è espressa da

$$\Delta E_{bf} = E_{int}^0 - Q \leq 0 \quad (5.82)$$

che per quanto visto, assumendo $\xi = 1/2$, equivale a

$$\left(Z^2/A \right) \gtrsim 59 \quad (5.83)$$

Quanto ottenuto e mostrato in tratteggio in figura, costituisce chiaramente un limite massimo per la barriera e di conseguenza la [5.83](#) fornisce una valutazione ottimistica della stabilità. La scissione non è infatti ancora avvenuta quando la distanza fra i centri dei due frammenti coincide con $r = 2r_0(A/2)^{1/3}$, e di conseguenza l'energia potenziale non può essere calcolata né con la [5.81](#) che considera frammenti separati, né con la [5.80](#) che considera nucleo sferico. L'approccio corretto richiederebbe una complicata equazione delle masse valida per nuclei molto deformati.

Una valutazione più realistica della barriera di potenziale e quindi dei limiti di stabilità del nucleo per fissione spontanea, si può ottenere immaginando di deformare leggermente il nucleo sferico genitore di raggio $R_0 = r_0 A^{1/3}$, riferito a un sistema cartesiano ortogonale centrato nel suo baricentro, lungo un asse, ad esempio lungo z , in modo che assuma almeno approssimativamente la forma di un ellissoide di rotazione prolato di equazione

$$\frac{(x^2 + y^2)}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \quad (5.84)$$

La supposta incomprimibilità della materia nucleare implica che la defor-

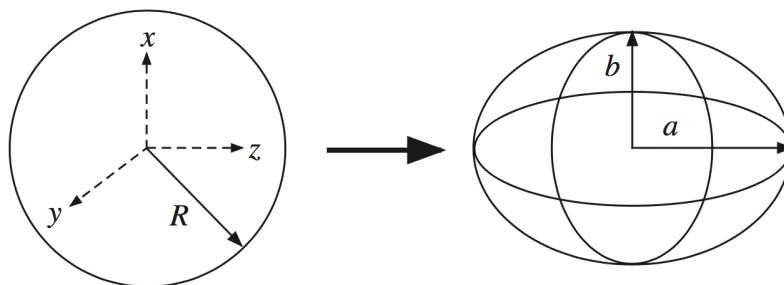


Figura 5.24: Deformazione da sfera a ellissoide prolato.

mazione mantenga inalterato il volume

$$V = \frac{4}{3} \pi ab^2 = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \quad (5.85)$$

Indicando con ϵ il termine perturbativo positivo che interviene a modificare il raggio R_0 della goccia sferica si può allora scrivere

$$a = R_0 (1 + \epsilon) \quad (5.86)$$

e di conseguenza, per la [5.85](#)

$$b = \frac{R_0}{(1 + \epsilon)^{1/2}} < a \quad (5.87)$$

La deformazione produce una variazione dell'energia di legame del nucleo. Detta quindi $B^*(A, Z)$ l'energia del nucleo perturbato si ha che se la differenza

$$\Delta B^*(A, Z) = B(A, Z) - B^*(A, Z) \quad (5.88)$$

è negativa, allora il nucleo è stabile rispetto alla deformazione e una volta cessata la perturbazione, diseccitandosi, ritorna all'originaria condizione di equilibrio con forma sferica di raggio R_0 . Se invece $\Delta B^*(A, Z) > 0$, allora il nucleo è instabile rispetto alla deformazione e se questa viene esaltata fino al punto da provocare la scissione del nucleo in due frammenti di masse confrontabili, si ha il processo di fissione indotto da una perturbazione esterna. Per proseguire ci si riferisca sempre alla formula semiempirica di Weizsäcker e si osservi che i termini di volume, di simmetria e di accoppiamento, essendo dipendenti dalla densità del nucleo che nell'ipotesi di incomprimibilità rimane immutata per deformazioni del volume, rimangono anch'essi sostanzialmente immutati dalla deformazione. Nel calcolo della differenza fra le energie di legame intervengono quindi attivamente soltanto i termini di superficie e coulombiano

$$\Delta B^*(A, Z) = B_S(A) + B_C(A, Z) - B_S^*(A) - B_C^*(A, Z) \quad (5.89)$$

Il termine coulombiano del nucleo deformato è chiaramente minore di quello del nucleo sferico in quanto la deformazione implica un aumento delle distanze medie fra i protoni; il termine di superficie del nucleo deformato è invece maggiore del suo omologo per il nucleo non deformato, in quanto la deformazione implica un aumento della superficie.

Supponendo che la carica elettrica sia uniformemente distribuita entro il volume dell'ellissoide di rotazione si ha

$$\begin{cases} \rho_Z(\vec{r}) = \frac{3Ze}{4\pi ab^2} & \text{per, } \frac{(x^2 + y^2)}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} \leq 1 \\ \rho_Z(\vec{r}) = 0 & \text{per, } \frac{(x^2 + y^2)}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} > 1 \end{cases} \quad (5.90)$$

Calcolando quindi le energie di superficie e coulombiana del nucleo deformato si ottiene

$$B_S^*(A) = \beta_S(\epsilon) B_S(A) \quad , \quad B_C^*(A, Z) = \beta_C(\epsilon) B_C(A, Z) \quad (5.91)$$

con

$$\begin{cases} \beta_C(\epsilon) = \frac{1}{2} \frac{R_0}{(a^2 - b^2)^{1/2}} \ln \frac{a + (a^2 - b^2)^{1/2}}{a - (a^2 - b^2)^{1/2}} \\ \beta_S(\epsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{R_0^2} + \frac{1}{2} \right) \frac{a^2 b}{R_0^2 (a^2 - b^2)^{1/2}} \arccos \left(\frac{b}{a} \right) \end{cases} \quad (5.92)$$

Supposto ragionevolmente piccolo il parametro ϵ di deformazione, si possono sviluppare in serie le [5.92](#), fermandosi al primo termine non nullo in potenze di ϵ

$$\begin{cases} \beta_C(\epsilon) \simeq 1 - \frac{1}{5}\epsilon^2 \\ \beta_S(\epsilon) \simeq 1 + \frac{2}{5}\epsilon^2 \end{cases} \quad (5.93)$$

ottenendo quindi per $\Delta B^*(A, Z)$

$$\Delta B^*(A, Z) \simeq \frac{1}{5}\epsilon^2 A^{2/3} \left[2b_S - b_C \frac{Z^2}{A} \right] \text{ MeV} \quad (5.94)$$

Per $\Delta B^*(A, Z) = 0$ la goccia di liquido nucleonico è in equilibrio instabile, da cui si ricava il valore critico del rapporto Z^2/A

$$\left(\frac{Z^2}{A} \right)_0 = \frac{2b_S}{b_C} \simeq 49.4 \quad (5.95)$$

Un nucleo è quindi stabile rispetto a piccole deformazioni se

$$\frac{Z^2}{A} \lesssim 49.4 \quad (5.96)$$

La condizione espressa che è soddisfatta per nuclei con $Z \leq 116$ e $A \leq 270$, assicura l'esistenza della barriera di potenziale ed è chiaramente più realistica della [5.83](#). Per nuclei con $Z^2 > 49.4 A$ la fissione spontanea diventa quindi sempre più probabile per cui se ne può prevedere un alto rateo.

Si può concretizzare ora la condizione necessaria alla fissione espressa dalla [5.79](#), nel caso di un nucleo genitore sferico ${}^A_Z X$ che si scinde in due nuclei figli ${}^{A/2}_{Z/2} X$ uguali e sferici, ovviamente con Z pari e A pari. Anche in questo caso le energie di volume si cancellano, per la supposta incomprimibilità della materia nucleonica, e assumendo sempre $Z(Z-1) \simeq Z^2$, si ha

$$\begin{aligned} Q &= \Delta B \left(A, Z; \xi = \frac{1}{2} \right) = \simeq b_S A^{2/3} \left(1 - 2^{1/3} \right) + b_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 - 2^{-2/3} \right) \\ &\simeq 0.26 A^{2/3} \left(\frac{Z^2}{A} - 17.2 \right) \text{ MeV} \end{aligned} \quad (5.97)$$

La condizione $\Delta B(A, Z; \xi = 1/2) > 0$, per cui i due frammenti di fissione danno luogo a una configurazione energeticamente più stabile rispetto al nucleo genitore, è dunque soddisfatta per $Z^2 > 17.2 A$. Mettendo assieme quanto ottenuto si individua una regione della tabella dei nuclidi, definita dalla relazione $17.2 A \lesssim Z^2 \lesssim 49.4 A$, in cui benchè la configurazione sferica del nucleo genitore risulti stabile per piccole perturbazioni, comunque la sua

fissione in due frammenti uguali è energeticamente favorevole.

Una deformazione di ampiezza sufficiente può dunque condurre il nucleo al limite della scissione e la sua forma è in tal caso compatibile con una configurazione di equilibrio instabile per spostarlo dalla quale anche di una quantità infinitesima, è sufficiente un lavoro infinitesimo d'ordine superiore.

L'energia minima E_0 necessaria per portare un nucleo dalla configurazione

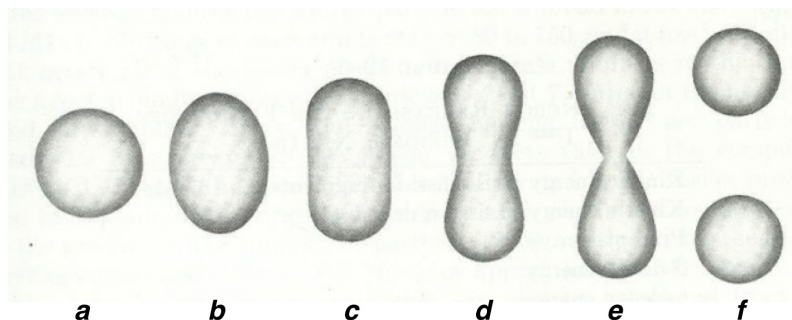


Figura 5.25: Illustrazione schematica della sequenza delle deformazioni nucleari nel processo di fissione.

iniziale "a" a quella finale "f", illustrate in figura [5.25](#), è detta *energia critica di fissione*, e può essere espressa come

$$E_0 = B_S(A) \beta_0(\zeta) \quad \text{con,} \quad \zeta = \left(\frac{Z^2}{A} \right) \left(\frac{A}{Z^2} \right)_0 \quad (5.98)$$

dove la funzione $\beta_0(\zeta)$ si determina valutando le oscillazioni della goccia di liquido nucleonico tramite il "raggio" $R(\vartheta)$ del nucleo deformato, espresso come opportuno sviluppo in serie di polinomi di Legendre, con ϑ variabile angolare sul piano di simmetria del nucleo. La fissione così descritta si dice *simmetrica* se tutti i coefficienti dispari dello sviluppo sono nulli.

Considerando fissione simmetrica e limitandosi al quarto termine dello sviluppo, l'energia critica di fissione risulta essere il massimo valore assumibile dall'energia di deformazione, espressa dalla [5.89](#)

$$[\Delta B^*(A, Z)]_{max} = E_0 \quad (5.99)$$

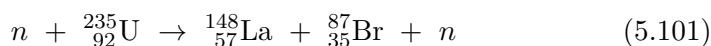
per cui esiste una deformazione critica della "goccia" che massimizza $\Delta B^*(A, Z)$ e si trova essere in corrispondenza di

$$\beta_0(\zeta) = 0.726(1 - \zeta)^3 - 0.330(1 - \zeta)^4 \quad (5.100)$$

Nel caso si voglia indurre la fissione di un nucleo il neutrone rappresenta il proiettile ideale, in quanto la barriera coulombiana del nucleo bersaglio non interviene nel processo del suo assorbimento, in seguito al quale si forma un sistema nucleare metastabile eccitato che può liberarsi dell'eccesso di energia

espellendo il neutrone, spezzandosi in due o più frammenti, o trasformandosi nell'isotopo stabile del nucleo bersaglio. La fissione nucleare è dunque un processo in competizione con la diffusione elastica e anelastica di neutroni e con il processo di cattura radiativa.

È interessante osservare che sperimentalmente si ottiene la fissione di ${}^{235}_{92}\text{U}$ bombardandolo con neutroni termici



che risultano però inefficaci per indurre fissione in ${}^{238}_{92}\text{U}$, che richiede invece neutroni molto più energetici.

Si valuti dunque quale energia cinetica devono avere i neutroni per provocare fissione in un nucleo.

La soglia di fissione E_n^0 si ha quando l'energia d'eccitazione E^* del sistema metastabile coincide con l'energia critica di fissione E_0 , cioè

$$E^* = \epsilon_c + s_n = E_0 \quad (5.102)$$

Data la grande massa dei nuclei bersaglio, rispetto a quella del neutrone, si ha $E_n^0 \simeq \epsilon_c$ e di conseguenza dalla [5.102](#) si ottiene

$$E_n^0 = E_0(A+1, Z) - s_n(A+1, Z) \quad (5.103)$$

avendo esplicitamente indicato la dipendenza da A e Z delle energie critica di fissione e di legame del neutrone nel sistema metastabile $(n, {}^A_ZX)$.

A_ZX	$({}^{A+1}_Z X)^*$	$E_0(A+1, Z)$ (MeV)	$s_n(A+1, Z)$ (MeV)	$E_n^{(0)}$ (MeV)
${}^{238}_{92}\text{U}$	$({}^{239}_{92}\text{U})^*$	5.7	4.8	0.9
${}^{235}_{92}\text{U}$	$({}^{236}_{92}\text{U})^*$	5.2	6.5	-1.3
${}^{234}_{92}\text{U}$	$({}^{235}_{92}\text{U})^*$	5.0	5.3	-0.3
${}^{232}_{90}\text{Th}$	$({}^{233}_{90}\text{Th})^*$	6.9	5.0	1.9

In tabella sono riportati i valori di E_n^0 per alcuni nuclei pesanti calcolati con la [5.103](#); i valori di E_0 sono stati calcolati tramite la [5.98](#) e la [5.100](#). Valori negativi di E_n^0 indicano che i relativi nuclei non hanno soglia di fissione e possono quindi essere fissionati anche dalla cattura di neutroni termici, la cui energia cinetica è quindi irrilevante ai fini del processo.

Si osservi che nella condizione $17.2 A \lesssim Z^2 \lesssim 49.4 A$, il nucleo genitore potrebbe fissionare anche per *effetto tunnel* attraverso la barriera, ma la probabilità, come discusso parlando del decadimento α , è estremamente bassa data la grande massa del frammento; conseguentemente risulta molto lunga la vita media di questo processo, e quindi bassissimo il suo rateo.

Il fatto che generalmente i frammenti di fissione di un nucleo si distribuiscono asimmetricamente attorno a due diversi valori di massa, porta alla riduzione della barriera coulombiana rispetto al caso della fissione in frammenti uguali, ma non si sono ancora individuati motivi fondamentali che lo spieghino.

La teoria della fissione di Bohr e Wheeler, pur costituendo un approccio classico, riesce a fornire una buona comprensione di molte caratteristiche della fissione, sia di quella indotta che di quella spontanea.

Va anche osservato che nonostante il cruciale ruolo che la fissione nucleare e le sue applicazioni hanno avuto e hanno sulla società, il suo contributo alla conoscenza fondamentale del nucleo atomico non è particolarmente rilevante.

C'è un altro meccanismo che porta nuclei ad emettere frammenti di masse superiori a quelle delle particelle α , ma nel contempo inferiori a quelle dei frammenti di fissione, si tratta della cosiddetta *multiframmentazione*, di cui si tratterà brevemente parlando delle reazioni nucleari.

La grande quantità d'energia liberabile tramite reazioni di fissione ha suggerito e portato allo sviluppo sia di tecnologie per la produzione d'energia elettrica (reattori nucleari) che per la realizzazione di ordigni esplosivi (bombe atomiche). Qualcosa su questi argomenti è riportato in Appendice

26.1 Fusione nucleare

Il grafico in figura [26.1](#) mostra un massimo attorno al valore $A \approx 56$, il ferro, cui segue una decrescita lenta per i nuclei più pesanti. Per i nuclei più leggeri del ferro la decrescita è più ripida cosicchè, ad eccezione dei nuclei "magici", i nuclei più leggeri risultano meno fortemente legati dei nuclei di taglia intermedia.

In base a ciò quindi, *fondendo* due nuclei leggeri per produrne uno più pesante si produce energia e il nucleo più pesante ottenuto è di conseguenza più fortemente legato. Si tratta di un processo opposto a quello di fissione e come per quest'ultimo l'energia rilasciata coincide con la differenza fra le energie di legame degli stati iniziale e finale. Il processo è detto *fusione nucleare*.

Perchè la fusione tra due nuclei possa aver luogo bisogna riuscire a vincere la repulsione coulombiana fra le loro cariche protoniche; l'energia potenziale coulombiana fra i due nuclei vale

$$U_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 (R_1 + R_2)} \quad (26.1)$$

con Z_1 e Z_2 i numeri atomici dei due nuclei di raggi R_1 ed R_2 . La quantità $(R_1 + R_2)$ rappresenta dunque la distanza classica di massimo avvicinamento possibile fra i due nuclei. Ricordando che si può porre $R = R_0 A^{1/3}$ si

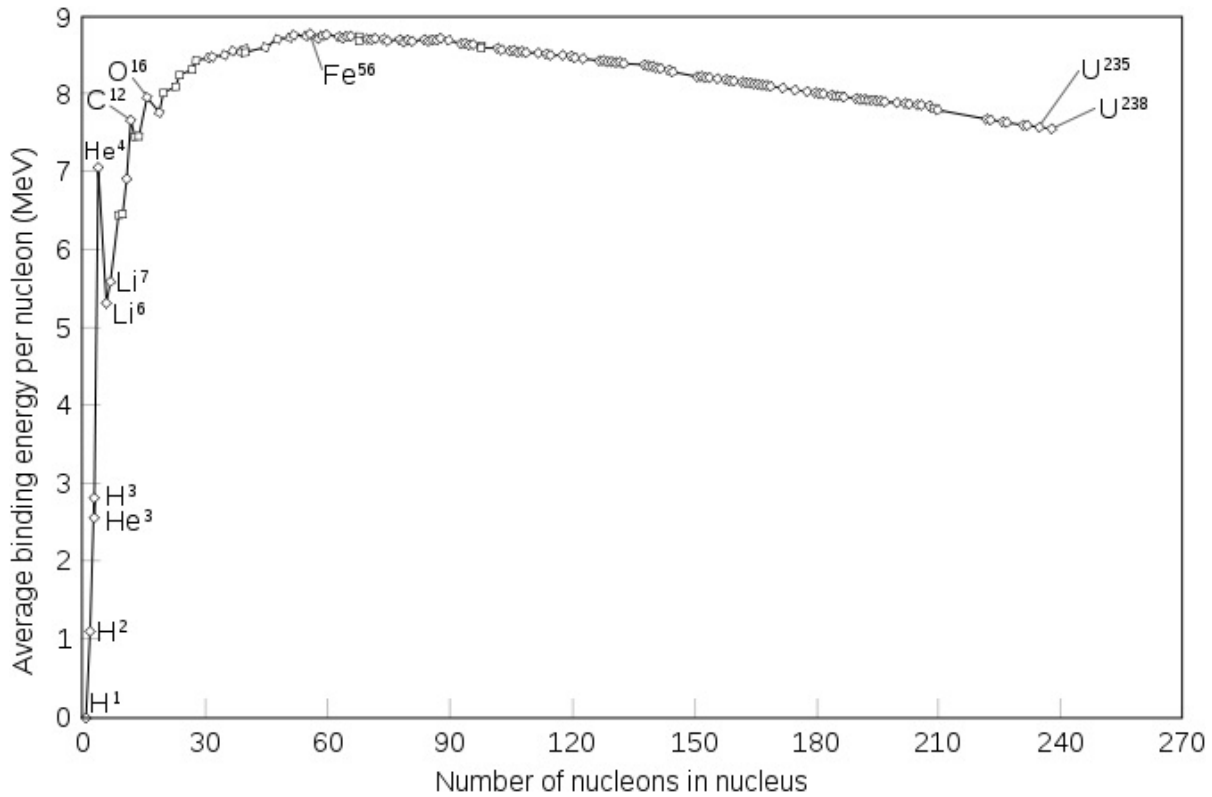


Figura 26.1: Energia media di legame per nucleone $|B/A|$, per la gran parte dei nuclei stabili.

ha

$$U_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R_0 (A_1^{1/3} + A_2^{1/3})} \quad (26.2)$$

Se si considera ad esempio un caso per cui $A_1 \approx A_2 \approx 2Z_1 \approx 2Z_2 = 8$, si ottiene $U_C \approx 4.8$ MeV, per l'ammontare di energia E che dovrebbe essere fornita ai due nuclei onde permettere loro di superare la barriera coulombiana. È una quantità d'energia relativamente ridotta che si può ottenere facilmente accelerando uno dei due nuclei con sistemi elettrostatici quali ad esempio acceleratori di Crockroft-Walton o Van de Graaff. Ciò che si ottiene però al momento dell'urto è che quasi tutti i nuclei interagiscono elasticamente; affinché la fusione abbia luogo è infatti anche necessario che i due nuclei permangano vicini per un certo tempo che può eccedere quello in gioco durante l'urto indotto da fasci accelerati, tranne nei rari casi in cui l'urto che si produce è centrale, ovvero ha luogo con parametro d'urto $b \simeq 0$.

Un modo che la natura ha trovato per ottenere le condizioni che favoriscono la fusione è di riscaldare a sufficienza una miscela "confinata" di nuclei onde fornire loro abbastanza energia termica da permettergli di superare la

barriera coulombiana, e ciò ha luogo nella formazione di una stella grazie all'intervento dell'interazione gravitazionale che "confina" e favorisce il "riscaldamento". Si può stimare la temperatura necessaria affinché la fusione possa aver luogo in una stella secondo quanto detto, ricordando il valore della costante k_B di Boltzmann ($k_B = 8.61673324 \times 10^{-11}$ MeV K⁻¹), da cui

$$T \simeq \frac{4.8}{k_B} \simeq 5.6 \times 10^{10} \text{ K} \quad (26.3)$$

che è però un valore molto superiore a quello tipicamente presente all'interno della maggior parte delle stelle che è dell'ordine di $10^7 \div 10^8$ K. Fu proprio questo semplice risultato che portò molti a rifiutare inizialmente l'idea di A. Eddington che l'energia delle stelle provenisse da reazioni di fusione nucleare al loro interno. Questo fatto rappresenta oltretutto anche uno degli ostacoli maggiori da superare per riuscire ad ottenere la fusione controllata in un reattore.

Le reazioni di fusione hanno in realtà luogo a temperature inferiori a quella stimata e ciò grazie alla combinazione di due fatti.

- Il primo e più importante è l'effetto tunnel, grazie al quale per ottenere la fusione non si deve necessariamente mettere in gioco un'energia superiore a quella dell'intera barriera coulombiana. Ricordando quanto detto a proposito del decadimento α , si ha che la penetrazione della barriera dipende da un certo numero di fattori il più importante dei quali è il fattore G di Gamow che dipende dalle velocità relative e che per due nuclei interagenti con numeri atomici Z_1 e Z_2 e masse m_1 ed m_2 , può essere scritto in funzione dell'energia E come

$$G(E) = \sqrt{\frac{E_G}{E}} \quad \text{con} \quad E_G = 2m_r c^2 (\pi\alpha Z_1 Z_2)^2 \quad (26.4)$$

dove α è la costante di struttura fine ed $m_r = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, cioè la massa ridotta del sistema dei due nuclei in procinto di fondersi.

La probabilità di attraversamento della barriera, e quindi di fusione tra i due nuclei, è proporzionale ad $e^{-G(E)}$, e quindi aumenta all'aumentare di E . Se la si considera ad esempio per la fusione di due protoni all'interno di una stella tipica alla temperatura di 10^7 K, si ha $E_G \simeq 490$ keV ed $E \simeq 1$ keV, da cui si ottiene una probabilità di fusione estremamente bassa, proporzionale ad $e^{-22} \simeq 10^{-9.55}$.

- Il secondo fatto che unitamente al primo rende ragione dei ratei di processi di fusione all'interno delle stelle, dipende dalla forma maxwelliana delle distribuzioni di energia al loro interno, per cui anche alle temperature di $10^7 \div 10^8$ K, vi sono comunque nuclei con energie cinetiche superiori a quella media della distribuzione, sulla coda alta della stessa e con valori quindi più adatti a favorire la fusione. È la

cooperazione tra questi due effetti che favorisce la fusione nucleare in una stella.

Si consideri la fusione fra due tipologie di nuclei a e b , presenti in equilibrio termico alla temperatura T , con densità n_a e n_b in un certo volume definito. Si supponga anche che T sia sufficientemente alta da far sì che i nuclei a e b costituiscano un *plasma* completamente ionizzato. Si assuma anche che le velocità delle due tipologie di nuclei siano distribuite secondo Maxwell-Boltzmann, per cui la probabilità che vi siano due nuclei con velocità relativa v compresa nell'intervallo $(v + dv)$ è data da

$$P(v) dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m_r}{kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^2 dv \quad (26.5)$$

con m_r la massa ridotta del sistema dei due nuclei.

Detta σ_{ab} la sezione d'urto del processo di fusione si ha dunque, per il rateo R_{ab} delle reazioni di fusione per unità di volume

$$R_{ab} = n_a n_b \langle \sigma_{ab} v \rangle \quad (26.6)$$

con le parentesi $\langle \rangle$ che indicano la media, ovvero

$$\langle \sigma_{ab} v \rangle \equiv \int_0^\infty \sigma_{ab} v P(v) dv \quad (26.7)$$

Tenendo conto che molte sezioni d'urto nucleari a bassa energia mostrano un andamento tipicamente proporzionale all'inverso dell'energia cinetica E del proiettile, e ricordando il ruolo dell'effetto tunnel, si può scrivere la sezione d'urto di fusione come

$$\sigma_{ab}(E) = S(E) \frac{1}{E} e^{-\left(\frac{E_G}{E}\right)^{1/2}} \quad (26.8)$$

dove $S(E)$ è una funzione lentamente variabile di E che esprime i dettagli dei meccanismi nucleari dell'interazione. ²

Sostituendo la [26.5](#) e la [26.8](#) nella [26.7](#) si ha, per il rateo delle reazioni di fusione per unità di volume

$$R_{ab} = n_a n_b \sqrt{\frac{8}{\pi m_r}} \left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty S(E) e^{\left[-\frac{E}{kT} - \sqrt{\frac{E_G}{E}}\right]} dE \quad (26.9)$$

Il fatto che $S(E)$ sia lentamente variabile con E implica che il ruolo dominante nell'integrando sia svolto dal termine esponenziale e ne risulta che il

²L'assunzione di lenta variabilità per $S(E)$ implica ad esempio che si esclude la presenza di risonanze.

termine Maxwelliano, calante con E , si combina con quello crescente con E dovuto all'effetto tunnel, dando luogo ad un massimo nell'integrando, detto *picco di Gamow*, in corrispondenza al valore

$$E = E_0 = \left[\frac{1}{4} E_G (kT)^2 \right]^{1/3} \quad (26.10)$$

Il processo di fusione può quindi aver luogo in corrispondenza del ristretto intervallo di energie $E_0 \pm \Delta E_0$, con

$$\Delta E_0 = \frac{4}{2^{1/3} \sqrt{3}} E_G^{1/6} (kT)^{5/6} \quad (26.11)$$

come mostrato in figura [26.2](#). Nel caso di due protoni che si fondono alla

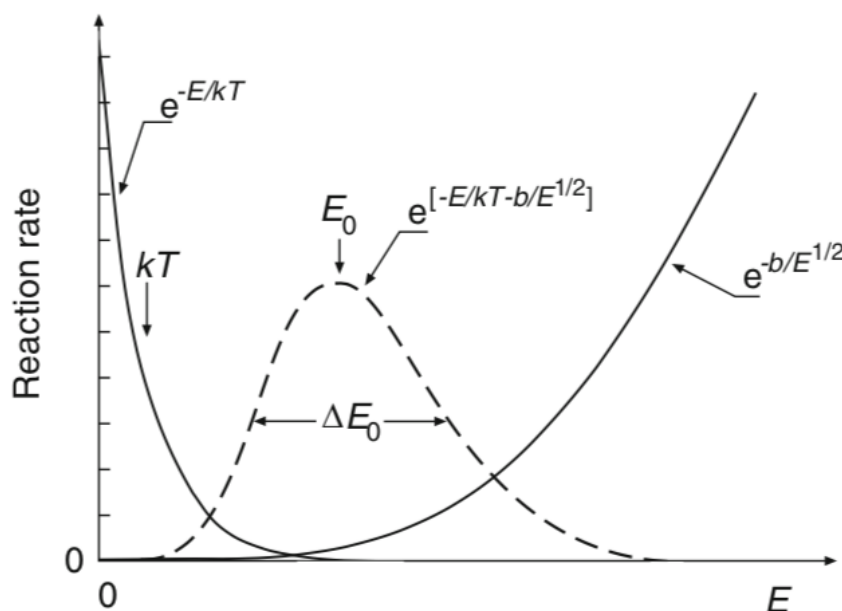
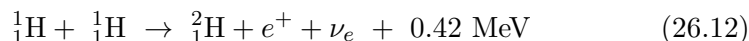


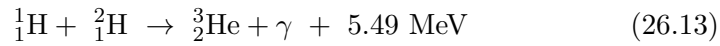
Figura 26.2: Picco di Gamow. In figura $b \equiv E_G$.

temperatura $T = 2 \times 10^7$ K (la temperatura interna del Sole è stimata essere $T_\odot \simeq 1.57 \times 10^7$ K), si ha $E_G = 493$ keV, $kT = 1.7$ keV, $E_0 = 7.2$ keV e $\Delta E_0 = 8.2$ keV.

Per tornare quindi all'energia prodotta in una stella, e considerando più precisamente il Sole, si ha che la quasi totalità dell'energia prodotta in esso proviene dal cosiddetto ciclo *protone-protone*, che ha più di un canale possibile, il principale dei quali, detto catena PP-I e illustrato in figura [26.3](#), inizia con la fusione di nuclei di idrogeno e la conseguente produzione di nuclei di deuterio



Il deuterio si fonde quindi con altro idrogeno e produce ${}^3_2\text{He}$



Infine due nuclei di ${}^3_2\text{He}$ si fondono e formano ${}^4_2\text{He}$

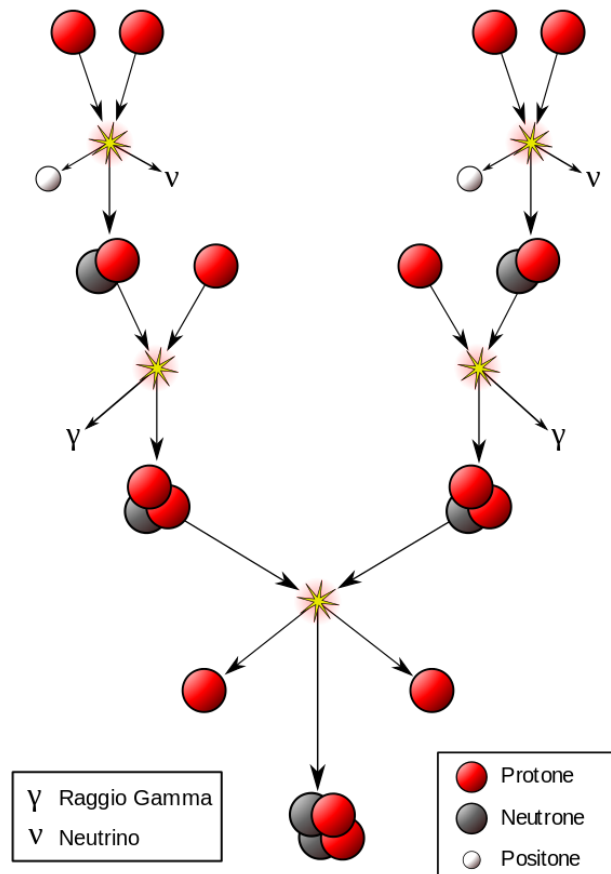
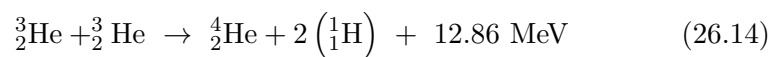


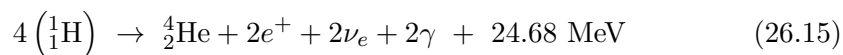
Figura 26.3: Catena PP-I



La notevole quantità d'energia rilasciata nel corso dell'ultima reazione di fusione è dovuta alla grande energia di legame dell' ${}^4_2\text{He}$.

La prima delle reazioni indicate, la [26.12](#), essendo dovuta all'interazione debole, procede con un rateo estremamente basso ed è questo il motivo della lunga *vita media* del Sole!

Il ciclo nella sua completezza può quindi essere descritto come



Dato il valore di T_{\odot} tutta la materia all'interno del Sole è ionizzata e costituisce un plasma. I positroni prodotti annichilano nel plasma con gli elettroni presenti rilasciando un'ulteriore energia di 1.02 MeV, per cui l'energia totale prodotta in ogni ciclo del tipo [26.15](#) ammonta a 26.72 MeV. Bisogna anche tener però conto che ogni neutrino che sfugge nello spazio porta via mediamente un'energia pari a 0.26 MeV. Ne risulta quindi che per ogni protone coinvolto nella catena PP-I vengono mediamente irraggiati 6.55 MeV. La catena PP-I non è però la sola, vi sono altri cicli di fusione che contribuiscono all'energia prodotta in una stella e di cui si tratterà più oltre, accennando alla nucleosintesi degli elementi nelle stelle.