

# Indice Generale

<b>1</b>	<b>Teoria della relatività speciale</b>	<b>4</b>
1.1	Teorie matematiche e teorie fisiche . . . . .	4
1.2	Assiomi della fisica classica . . . . .	5
1.2.1	Assiomi generali . . . . .	5
1.2.2	Assiomi della Meccanica . . . . .	5
1.2.3	Assiomi dell'Elettrodinamica . . . . .	6
1.3	Aberrazione della luce stellare . . . . .	7
1.4	Effetto Doppler . . . . .	9
1.5	Esperimento di Fizeau . . . . .	10
1.6	Esperimento di Michelson-Morley . . . . .	11
1.7	Esperimento di Trouton-Noble . . . . .	13
1.8	Contrazione di Lorentz - Fitzgerald . . . . .	14
1.9	Costanza ed isotropia della velocità della luce . . . . .	15
1.9.1	Esperimento di Kennedy e Thorndike . . . . .	15
1.9.2	Teoria dell'emissione . . . . .	16
1.9.3	Esperimento di Farley . . . . .	17
1.10	I postulati della Teoria della Relatività Speciale . . . . .	18
1.11	Conseguenze matematiche e fisiche delle trasformazioni di Lorentz . . . . .	21
1.11.1	Relatività della simultaneità . . . . .	21
1.11.2	Contrazione dei corpi in movimento . . . . .	22
1.11.3	Dilatazione del tempo per orologi in movimento . . . . .	23
1.12	Alcuni esperimenti ideali . . . . .	23
1.12.1	Confronto di lunghezze perpendicolari al moto relativo . . . . .	24
1.12.2	Confronto di misure di intervalli di tempo . . . . .	24
1.12.3	Confronto di lunghezze parallele al moto relativo . . . . .	25

1.12.4	Differenze di fase nella sincronizzazione degli orologi . . .	25
1.13	Composizione relativistica delle velocità . . . . .	26
1.14	Trasformazione relativistica delle caratteristiche di un'onda . . .	27
1.15	Conferme della cinematica relativistica da esperimenti ottici . . .	28
1.15.1	Aberrazione della luce stellare . . . . .	28
1.15.2	Effetto Fizeau-Fresnel . . . . .	29
1.15.3	Effetto Doppler relativistico . . . . .	29
1.16	Altre conferme sperimentali : vita media dei mesoni $\mu$ . . . . .	31
1.17	Cinematica relativistica . . . . .	33
1.18	Paradosso dei gemelli . . . . .	36
1.19	Trasformazioni generali di Lorentz . . . . .	37
1.20	Dinamica relativistica . . . . .	40
1.21	Verifiche della variazione di massa con la velocità . . . . .	45
1.21.1	Esperienza di Bucherer . . . . .	45
1.21.2	Accelerazione di particelle cariche - Il ciclotrone . . . . .	48
1.22	Leggi di trasformazione di massa, impulso ed energia . . . . .	49
1.23	Leggi di trasformazione della forza . . . . .	50
1.24	Formulazione covariante . . . . .	51
1.25	Onde di De Broglie, particelle a massa nulla . . . . .	52
1.26	Equivalenza di massa ed energia . . . . .	53
1.27	Verifiche dell'equivalenza massa-energia . . . . .	55
1.27.1	Energia di legame dei nuclei . . . . .	55
1.27.2	Esperienza di Cockroft e Walton . . . . .	56
1.28	Cinematica dell'effetto Compton . . . . .	57
1.29	Cinematica dei decadimenti . . . . .	59
1.30	Cinematica della diffusione elastica . . . . .	61
1.31	Problemi d'urto: generalità . . . . .	63
1.32	Terzo principio della dinamica e relatività . . . . .	64

## Indice delle Figure

1.1	Aberrazione stellare I . . . . .	8
1.2	Aberrazione stellare II . . . . .	9
1.3	Esperimento di Fizeau . . . . .	11
1.4	Schema dell'esperimento di Michelson-Morley . . . . .	12
1.5	Esperimento di Trouton-Noble . . . . .	14
1.6	Misurazione di intervalli di tempo con orologi mobili . . . . .	23
1.7	Esperimento di Ives-Stilwell . . . . .	30
1.8	L'apparato di Rossi-Hall . . . . .	32
1.9	Il cono-luce e le linee d'universo . . . . .	34
1.10	Collisioni elastiche in riferimenti differenti . . . . .	41
1.11	L'esperienza di Bucherer I . . . . .	46
1.12	L'esperienza di Bucherer II . . . . .	47
1.13	Il ciclotrone . . . . .	48
1.14	L'energia di legame dei nuclei . . . . .	56
1.15	L'effetto Compton . . . . .	58

# Capitolo 1

## Teoria della relatività speciale

### 1.1 Teorie matematiche e teorie fisiche

In una teoria matematica si introducono *concetti primitivi* e *assiomi*. Le conseguenze della teoria si deducono mediante *teoremi*. Unico criterio di verità è la *coerenza interna*. Una teoria fisica è una teoria matematica corredata da un insieme di *prescrizioni operative* che mettono in relazione *enti* (primitivi o derivati) della teoria con *misure* effettuabili nella realtà.

Poiché le conseguenze della teoria si traducono in *predizioni* sul risultato di misure, al criterio della coerenza si aggiunge quello della *corrispondenza con l'esperienza*. Quando i risultati degli esperimenti non sono interpretabili all'interno di una teoria fisica, occorre modificare gli assiomi della teoria stessa.

A seguito dello straordinario sviluppo sperimentale del secolo XIX, gli assiomi della meccanica, che erano stati formulati da Newton alla fine del XVII secolo, sono stati modificati per riconciliare teoria ed esperimento:

1. Il problema del corpo nero e quello della struttura atomica hanno imposto la nozione di un'unità minima negli scambi di energia:  $h \neq 0 \rightarrow$  *meccanica quantistica*.
2. La non covarianza delle equazioni di Maxwell e la mancata evidenza per l'esistenza di un riferimento privilegiato hanno imposto la nozione di una velocità limite:  $c \neq \infty \rightarrow$  *meccanica relativistica*.

A queste rivoluzioni scientifiche andrebbe aggiunta la teoria della *relatività generale*.

N.B. La teoria classica **deve** continuare a valere negli opportuni limiti delle nuove teorie, perché in accordo con i risultati precedenti.

### 1.2 Assiomi della fisica classica

#### 1.2.1 Assiomi generali

- Esiste uno spazio assoluto tridimensionale (candidato il riferimento delle stelle fisse) invariante per rototraslazioni.
- Esiste il tempo assoluto (implicante simultaneità ed ordinamento assoluto) invariante per traslazioni temporali.

Da questi discende la *cinematica classica* dei moti assoluti e relativi.

#### 1.2.2 Assiomi della Meccanica

Concetti primitivi: massa, forza

- Principio d'inerzia:  $\vec{a} = 0$  per un corpo libero da influenze di altri corpi (definisce riferimento inerziale).
- $\vec{F} = m\vec{a}$
- Principio di azione e reazione.

Nella formulazione di Mach:

per ogni corpo esiste un coefficiente  $m$  tale che le interazioni binarie di corpi isolati da influenze esterne soddisfano

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = 0$$

questa relazione può essere usata per definire  $m, \vec{F}$ .

Dagli assiomi generali e della meccanica discende la *relatività galileiana*:

le leggi della meccanica sono invarianti rispetto al passaggio da un SR nello spazio assoluto ad un SR' che si muove di moto rettilineo uniforme rispetto ad esso.

Da esperienze meccaniche non é possibile decidere la velocità assoluta di un SR galileiano inerziale.

### Trasformazioni di Galileo

$$\begin{cases} \vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t \\ t' = t \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{x} = \vec{x}' + \vec{v}t' \\ t = t' \end{cases}$$

dove  $\vec{v}$  é la velocità relativa di SR' rispetto a SR.

Trasformazione delle velocità:

$$\frac{d\vec{x}'}{dt} = \frac{d\vec{x}}{dt} - \vec{v} \quad \text{ovvero} \quad \vec{u}' = \vec{u} - \vec{v} \Rightarrow \vec{a}' = \vec{a}$$

Invarianza delle leggi della meccanica:  $\vec{f}' = \vec{f}$

### 1.2.3 Assiomi dell'Elettrodinamica

Equazioni di Maxwell:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= 4\pi\rho && (\text{legge di Coulomb}) \\ \text{div } \vec{B} &= 0 && (\text{assenza di monopoli magnetici}) \\ \text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 && (\text{legge di Faraday}) \\ \text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} && (\text{legge di Ampere - Maxwell}) \end{aligned}$$

⇒ equazione di continuità:

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{conservazione della carica})$$

Le soluzioni delle equazioni di Maxwell nel vuoto ( $\rho = \vec{j} = 0$ ) sono onde propagantesi alla velocità  $c = 299792458 \text{ m/sec}$  nel SR in cui valgono le equazioni.

Le equazioni di Maxwell non sono invarianti per trasformazioni di Galileo.

Mentre gli assiomi della meccanica sembravano indebolire gli assiomi generali (impossibilità di determinare meccanicamente il SR dello spazio

assoluto) gli assiomi dell'elettrodinamica sembravano rafforzarli → teoria dell'etere o riferimento in quiete assoluta: SR in cui valgono le equazioni di Maxwell.

Esperimenti ottici dovrebbero essere in grado di individuare il sistema di riferimento dell'etere.

Consideriamo i seguenti esperimenti:

1. Aberrazione stellare
2. Effetto Doppler
3. Esperimento di Fizeau
4. Esperimenti di Michelson - Morley

### 1.3 Aberrazione della luce stellare

Bradley (1727/1728) notò una variazione nella posizione apparente delle stelle nel corso dell'anno.

L'origine del fenomeno sta nel fatto che la direzione osservata di un raggio di luce dipende dalla velocità relativa della terra rispetto alla sorgente luminosa (stella).

Supponendo che nel riferimento in cui la stella é in quiete la velocità del raggio sia  $\vec{c}$ , nel riferimento terrestre

$$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}$$

Sia  $\theta$  l'angolo tra la direzione di moto della terra e la posizione effettiva della stella e del raggio:  $\cos \theta = \hat{v} \cdot \hat{c}$

Sia  $\theta'$  l'angolo tra la direzione di moto e la posizione apparente  $\cos \theta' = \hat{v} \cdot \hat{c}'$   
Dalle relazioni

$$\begin{aligned} c' \sin \theta' &= c \sin \theta \\ c' \cos \theta' &= c \cos \theta - v \end{aligned}$$

risulta

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \frac{v}{c}}$$

Figura 1.1: Aberrazione stellare I

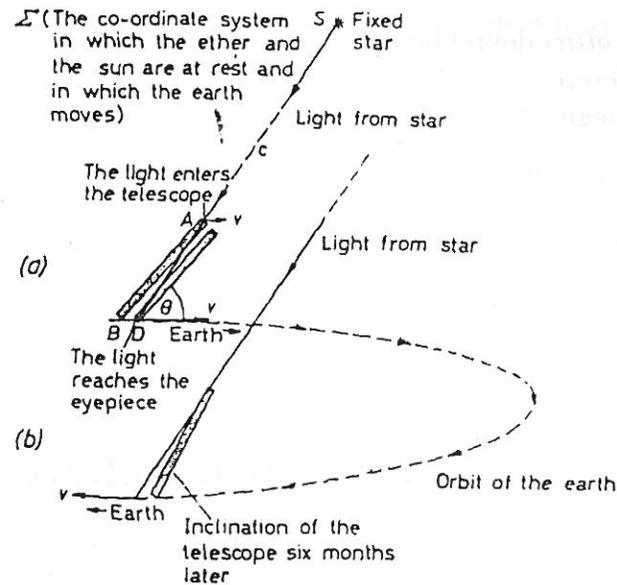


Figure 2.3. (a) The aberration of light from a fixed star illustrated in the co-ordinate system in which the ether is at rest. The telescope must be pointed in the direction AB such that the light entering the telescope at A reaches the eyepiece at D. (b) The inclination of the telescope has to be changed as the direction of the earth's velocity around the sun changes

e si può anche ricavare

$$\tan(\theta' - \theta) = \frac{\frac{v}{c} \sin \theta}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} \approx \frac{v}{c} \sin \theta \quad \text{per } v \ll c$$

Se nel corso dell'anno la terra si muove relativamente all'etere, ovvero se almeno in qualche periodo  $\vec{v} \neq 0$ , la posizione apparente delle stelle fisse cambia con le stagioni. È tuttavia facile convincersi che, all'ordine di  $v/c$ , stiamo soltanto osservando l'effetto del movimento *relativo* della terra rispetto alle stelle.

Figura 1.2: Aberrazione stellare II

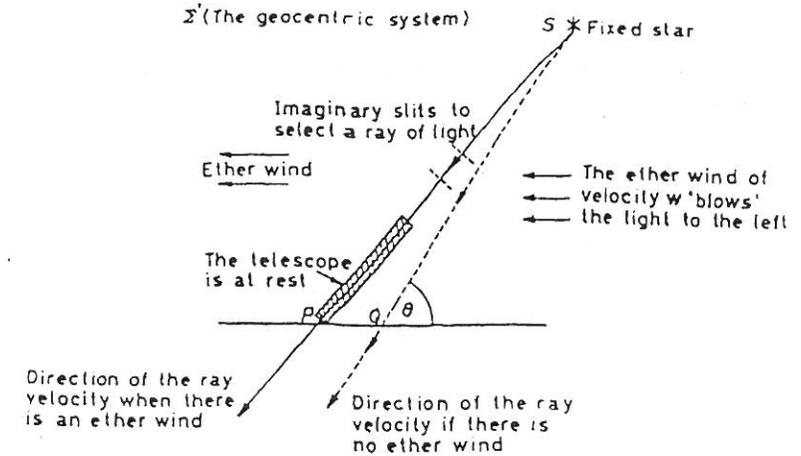


Figure 2.4. The aberration of light from a fixed star shown in the geocentric system. Due to the 'ether wind', the direction of the ray velocity changes from SQ to SP. The telescope must be pointed in the direction PS if the light is to enter the telescope in the direction of the telescope axis. Six months later, the 'ether wind' is in the opposite direction

## 1.4 Effetto Doppler

Consideriamo un'onda emessa in un riferimento in quiete rispetto all'etere e caratterizzata da frequenza  $\nu$  e lunghezza d'onda  $\lambda$ :

$$\lambda \nu = c$$

Consideriamo come essa appare ad un osservatore in moto con velocità  $\vec{v}$  rispetto all'etere, e sia  $\hat{n}$  il versore della direzione di propagazione dell'onda. La *fase* dell'onda è *invariante* per cambiamento di SR, pertanto vale

$$\begin{aligned} \Phi &= \nu(t - \frac{\vec{x} \cdot \hat{n}}{c}) = \nu'(t' - \frac{\vec{x}' \cdot \hat{n}}{c}) \\ \vec{x}' &= \vec{x} - \vec{v}t \\ t' &= t \end{aligned}$$

da cui le relazioni

$$\begin{cases} \frac{\nu}{c} = \frac{\nu'}{c'} & = \frac{1}{\lambda} \\ \nu'(1 + \frac{\vec{v} \cdot \hat{n}}{c}) & = \nu \end{cases} \text{ ovvero } \begin{cases} c' & = c - \vec{v} \cdot \hat{n} \\ \nu' & = \nu(1 - \frac{\hat{n} \cdot \vec{v}}{c}) \end{cases}$$

Quest'ultima relazione esprime la formulazione matematica dell'effetto Doppler classico: spostamento della frequenza delle onde osservate da un SR in movimento relativo rispetto alla sorgente, ed in particolare abbassamento della frequenza se l'osservatore si allontana dalla sorgente e viceversa.

Piú in generale, se osservatore e sorgente sono entrambi in movimento rispetto all'etere, con velocità assolute  $\vec{v}_o$  e  $\vec{v}_s$ ,

$$\nu' = \nu \frac{(1 - \frac{\vec{v}_o \cdot \hat{n}}{c})}{(1 - \frac{\vec{v}_s \cdot \hat{n}}{c})} \approx \nu (1 - \frac{\hat{n} \cdot (\vec{v}_o - \vec{v}_s)}{c})$$

dove  $\vec{v}_o - \vec{v}_s$  è la velocità di allontanamento dell'osservatore dalla sorgente. Anche in questo caso all'ordine  $\vec{v}/c$  stiamo soltanto osservando l'effetto di un moto relativo.

## 1.5 Esperimento di Fizeau

L'esperienza di Fizeau (1851) riguarda la velocità della luce in un mezzo (omogeneo trasparente) in movimento.

Detto  $n$  l'indice di rifrazione del mezzo, se esso è in quiete rispetto all'etere la velocità della luce è  $u_0 = \frac{c}{n}$ . Se il mezzo è in movimento con velocità  $\vec{w}$  rispetto alla direzione di propagazione della luce, la velocità misurata della luce, a priori incognita, sarà  $u = u(w)$ .

I raggi di luce emessi da una stessa sorgente vengono sdoppiati in direzioni opposte lungo uno stesso cammino, che è percorso da acqua in movimento con velocità  $w$ , concorde con uno dei due versi di propagazione della luce. In generale, assumendo che siano sperimentalmente rilevanti soltanto gli effetti del primo ordine, poniamo

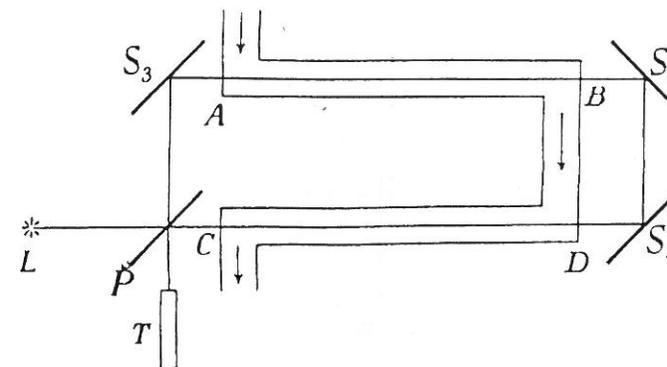
$$u(w) \cong \frac{c}{n} + \alpha \vec{w} \cdot \hat{n}$$

$\alpha$  coefficiente di trascinamento di Fresnel:  $\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}$ .

Se  $l$  è la lunghezza del cammino percorso attraverso l'acqua il tempo impiegato a percorrerlo è rispettivamente per i due raggi dato da

$$\tau_1 = \frac{l}{\frac{c}{n} - \alpha w} \quad \text{e} \quad \tau_2 = \frac{l}{\frac{c}{n} + \alpha w}$$

Figura 1.3: Esperimento di Fizeau



Risulta pertanto all'osservatore delle frange di interferenza una differenza di fase pari a

$$\Delta\Phi = \nu(\tau_1 - \tau_2) = l\nu \left[ \frac{1}{\frac{c}{n} - \alpha w} - \frac{1}{\frac{c}{n} + \alpha w} \right] = \frac{2l\nu}{c^2} \frac{n^2 \alpha w}{1 - \alpha^2 n^2 \frac{w^2}{c^2}}$$

$$\Delta\Phi \approx \frac{2l\nu}{c^2} (n^2 - 1)w$$

in accordo con l'esperimento.

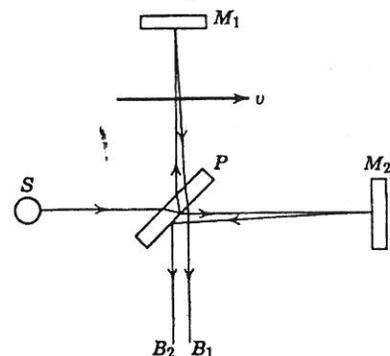
Ancora una volta stiamo trascurando effetti di ordine superiore al primo in  $w/c$  e  $v/c$ .

Varianti dell'esperimento: Hoek (1868); Mascart e Jamin (1874).

## 1.6 Esperimento di Michelson-Morley

(*Am. Journ. of Science* 34 (1881)333) Poiché tutti gli esperimenti che misurano effetti del primo ordine in  $v/c$  non sono in grado di svelare l'esistenza di un SR assoluto (etere) e per di piú come vedremo le predizioni della relatività einsteiniana coincidono a quest'ordine con quelle della relatività galileiana, occorre considerare effetti del secondo ordine in  $v/c$ , in grado di discriminare tra le differenti possibilità.

Figura 1.4: Schema dell'esperimento di Michelson-Morley



Il prototipo di tali esperienze è quella di Michelson (1881) e Michelson-Morley (1887).

Poiché la terra è in movimento rispetto al sole, almeno durante qualche periodo dell'anno dovrebbe essere in moto anche rispetto all'etere.

Supponiamo che l'apparato sia disposto in modo tale che  $\vec{v}$  (velocità della terra rispetto all'etere) sia diretta lungo l'asse 1. Calcoliamo la differenza dei tempi impiegati dalla luce a percorrere i due bracci:

$$T_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$T_2 = \frac{2l_2}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{in quanto } c' = \sqrt{c^2 - v^2}$$

Per un interferometro a bracci uguali  $l_1 = l_2$

$$\Delta\Phi = \nu(T_1 - T_2) = 2\frac{\nu l}{c} \left[ \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right] \approx \frac{\nu l}{c} \left( \frac{v}{c} \right)^2$$

Per un interferometro a bracci disuguali

$$\Delta\Phi = \frac{2\nu}{c} \left[ \frac{l_1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{l_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right]$$

e ruotando l'apparato di  $90^\circ$

$$\Delta\Phi' = \frac{2\nu}{c} \left[ -\frac{l_2}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{l_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right]$$

In entrambi i casi

$$\Delta\Phi - \Delta\Phi' = \frac{2\nu}{c} (l_1 + l_2) \left[ \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right] \approx \nu \frac{l_1 + l_2}{c} \left( \frac{v}{c} \right)^2 = \frac{l_1 + l_2}{\lambda} \left( \frac{v}{c} \right)^2$$

Nell'esperimento di Michelson e Morley la lunghezza del cammino ottico era di 11m,  $\lambda = 5.9 \cdot 10^{-7} m$ , e sappiamo che  $v \approx 30 km/s$ , per cui  $v/c \sim 10^{-4}$ . Pertanto l'effetto da rivelarsi corrispondeva a

$$\Delta\Phi - \Delta\Phi' \approx 0.37$$

e l'apparato era in grado di rivelare uno spostamento di frange ed uno sfasamento 100 volte più piccoli. Il risultato sperimentale fu totalmente negativo.

## 1.7 Esperimento di Trouton-Noble

(*Phil. Trans. Roy. Soc.* 202 (1903) 165 )

Un'altro esperimento teso ad evidenziare il movimento rispetto all'etere tramite un effetto dell'ordine di  $v^2/c^2$  si basa sull'idea che due cariche uguali ed opposte,  $+q$  e  $-q$ , connesse da un'asta rigida di lunghezza  $l$  ferma rispetto a terra, dovrebbero essere soggette ad una forza di tipo magnetico derivabile dalla legge di Biot-Savart e originata dal loro moto con velocità  $v$  rispetto all'etere, riferimento nel quale valgono esattamente le equazioni di Maxwell, che invece non varrebbero nei SR in movimento. Tale forza magnetica  $f = \frac{q^2 v^2}{l^2 c^2} \sin \theta$  originerebbe una coppia di intensità

$$M = \frac{q^2 v^2}{l^2 c^2} l \sin \theta \cos \theta$$

tendente a far ruotare l'apparato per portare la sbarra in una direzione perpendicolare a quella del moto assoluto.

L'esperimento non diede alcuna indicazione di una tale coppia.

L'ipotesi del *trascinamento dell'etere*, secondo la quale l'etere in prossimità della terra (o di corpi pesanti) si muoverebbe solidalmente alla terra stessa, può essere respinta sia sulla base di esperimenti terrestri che per inconsistenza con l'osservazione della luce stellare e con l'esperienza di Fizeau.

Figura 1.5: Esperimento di Trouton-Noble

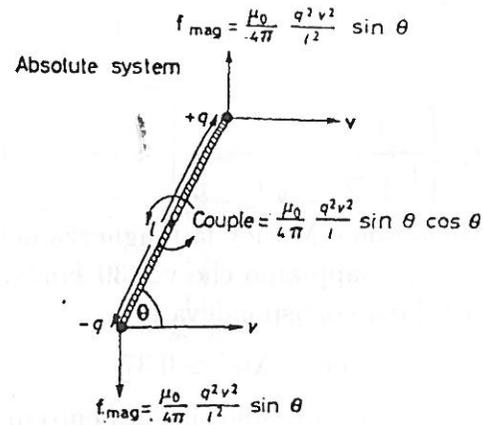


Figure 2.14. The Trouton-Noble experiment. The charges  $+q$  and  $-q$  are moving with velocity  $v$  relative to the absolute system in which it is assumed that Maxwell's equations must be applied. Relative to the absolute coordinate system the magnetic fields due to the moving charges give rise to a couple tending to rotate the apparatus in the anti-clockwise direction. No such couple was observed when the experiment was performed

## 1.8 Contrazione di Lorentz - Fitzgerald

Una possibile spiegazione del risultato nullo dell'esperienza di Michelson-Morley che non rinunciava al concetto di etere fu avanzata da Fitzgerald e Lorentz indipendentemente (1892).

Essi postularono che tutti gli oggetti materiali in moto rispetto all'etere si contraessero in funzione della velocità secondo la relazione

$$l(v) = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

lungo la direzione del moto.

In tal caso i tempi di percorrenza sarebbero uguali e non vi sarebbe alcuno sfasamento.

Lorentz giustificò teoricamente quest'ipotesi sulla base della teoria elettronica, assumendo che tutti i corpi materiali siano costituiti da particelle cariche elettricamente e tenute insieme esclusivamente da forze elettriche (*forza*

di Lorentz  $\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B})$ ). La trattazione di Lorentz permetteva anche di dimostrare la formula di Fresnel per il coefficiente di trascinamento  $\alpha$ .

Nel tentativo di determinare la forma che le equazioni di Maxwell avrebbero dovuto assumere in un riferimento in moto rispetto all'etere, Lorentz trovò che, al primo ordine in  $v/c$  ed introducendo un "tempo locale"

$$t' = t - \frac{vx}{c^2}$$

le equazioni di Maxwell nel nuovo riferimento mantenevano intatta la loro forma matematica.

Introducendo poi la contrazione di Lorentz-Fitzgerald nella teoria Lorentz trovò che, per le trasformazioni

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Le equazioni di Maxwell (con opportune trasformazioni dei campi) rimanevano inalterate in forma in tutti i SR inerziali (in moto nella direzione  $x$ ).

## 1.9 Costanza ed isotropia della velocità della luce

### 1.9.1 Esperimento di Kennedy e Thorndike

(*Phys.Rev.*42 (1932) 400)

L'esperimento di Michelson dimostra l'*isotropia* della velocità della luce ( $c$  non dipende dalla direzione del movimento della terra rispetto al sole o alle stelle fisse), ma ancora non permette di decidere della *costanza* di  $c$  in differenti SR. L'esperimento di Kennedy-Thorndike utilizza un interferometro di Michelson a bracci disuguali, come già discusso. Pertanto la differenza di fase fra i due percorsi è data da

$$\Delta\Phi = \frac{2\nu}{c} \Delta l$$

dove  $\Delta l = l_1 - l_2$  è la differenza tra le lunghezze dei bracci. Possiamo utilizzare questa relazione come definizione di  $c$  nel SR in cui si effettua l'esperimento:

$$c = 2\nu \frac{\Delta l}{\Delta\Phi}$$

Ipotizzando di poter mantenere costanti  $\nu$  e  $\Delta l$  per un lungo periodo (6 mesi) è possibile misurare  $c$  in momenti diversi del movimento della terra rispetto al sole.

Con la precisione dell'esperimento si sarebbe potuto misurare

$$\frac{\Delta c}{c} \geq .6 \cdot 10^{-8}$$

ossia con una precisione di circa 2 m/s.

Gli standard di lunghezza e di tempo nell'esperimento erano assicurati dal tenere la base dell'interferometro (monoblocco di quarzo) nel vuoto a temperatura costante entro 1/1000 di grado e riferirsi al periodo di vibrazione caratteristico di una linea spettrale del mercurio.

Il risultato dell'esperienza di Kennedy-Thorndike esclude la possibilità di una teoria dell'etere accompagnata da contrazione di Lorentz-Fitzgerald (ci sarebbe nei diversi periodi dell'anno un effetto misurabile) mentre è compatibile con una teoria in cui alla contrazione si accompagna un rallentamento degli orologi in movimento per un fattore di Lorentz (variante complicata e operativamente indistinguibile a questo livello dalla relatività ristretta).

### 1.9.2 Teoria dell'emissione

A partire dall'ipotesi di Ritz (1908) furono formulate le cosiddette teorie dell'emissione, che sono invece consistenti con tutti gli esperimenti discussi fino a questo punto.

In queste teorie modificando le equazioni di Maxwell inomogenee si ottiene che la velocità della luce è uguale a  $c$  soltanto quando viene misurata relativamente alla sorgente della luce stessa.

Queste teorie differiscono nelle loro predizioni sulla velocità della luce riflessa da uno specchio in movimento (teoria della sorgente originale, teoria della nuova sorgente o sorgente immagine e teoria balistica per cui la velocità diventa  $c$  rispetto allo specchio).

Tuttavia applicando queste teorie alle stelle binarie (che ruotano velocemente una intorno all'altra) si trova, nel caso più semplice (orbita circolare giacente su un piano passante per la terra) che, detto  $T$  il periodo vero di rotazione, i semiperiodi apparenti per stelle a distanza  $d$  dalla terra sarebbero rispettivamente  $\frac{T}{2} + \frac{2vd}{c^2 - v^2}$  per il tratto di orbita più vicino alla terra e  $\frac{T}{2} - \frac{2vd}{c^2 - v^2}$  per il tratto più lontano.

De Sitter osservò sperimentalmente che, se  $c' = c + kv_{st}$ , allora  $k < 0.002$ . A questa osservazione si applica tuttavia la critica di Fox, secondo il quale applicando il teorema di estinzione di Ewald e Oosen la velocità della luce ricevuta a terra è quella che la luce avrebbe in un mezzo rifrattivo stazionario. Infatti secondo questo teorema quando la luce dalla sorgente principale attraversa un mezzo rifrattivo (alone) essa è rapidamente sostituita da quella generata dalle sorgenti secondarie del mezzo (elettroni).

### 1.9.3 Esperimento di Farley

(*Phys. Lett.* 12 (1964) 260)

Per completare il quadro sperimentale, accanto all'evidenza che la velocità della luce è isotropa nel SR della sorgente e il suo valore non dipende dal moto relativo del SR rispetto ad un (eventuale) riferimento dell'etere, resta da verificare la costanza di  $c$  per radiazione emessa da sorgenti in movimento. Questa verifica si può fare considerando il processo di decadimento del mesone  $\pi^0$ , che avviene secondo il modo

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$$

con un BR del 98.8%.

Misurando la velocità dei raggi  $\gamma$  prodotti da  $\pi^0$  in movimento rispetto al laboratorio è possibile verificare la costanza della velocità della luce nel SR del laboratorio.

I  $\pi^0$  sono prodotti al protosincrotrone del CERN con energie maggiori di 6 GeV (corrispondenti a velocità  $v/c = 0.99975$  secondo la teoria della relatività speciale).

I raggi  $\gamma$  sono rivelati mediante due rivelatori posti ad una distanza quasi uguale allo spazio percorso dalla luce nell'intervallo tra due impulsi del fascio, così da avere segnali quasi simultanei.

Parametrizzando  $c' = c + kv$  il risultato sperimentale è  $k = (-3 \pm 13) \cdot 10^{-5}$

La conclusione è che l'evidenza sperimentale favorisce l'ipotesi che la velocità della luce sia una costante indipendente dal SR e dalla velocità della sorgente emittente.

## 1.10 I postulati della Teoria della Relatività Speciale

Possiamo superare tutte le difficoltà precedenti riformulando ed estendendo il principio di relatività per includere il fatto che esistono in natura *infiniti riferimenti* in moto l'uno rispetto all'altro che sono indistinguibili tramite qualsiasi esperimento fisico (*meccanico o elettromagnetico*) effettuato in essi.

Formuliamo quindi il **Postulato di Relatività**:

1. esiste almeno un riferimento galileiano in cui vale la geometria euclidea, si può associare un tempo e definire la contemporaneità. Questo SR è un riferimento *completo* per i fenomeni fisici, e si può costruire la cinematica classica eccetto la cinematica dei moti relativi.
2. esistono (infiniti)<sup>3</sup> riferimenti privilegiati, tutti identici al primo, in moto l'uno rispetto all'altro di moto rettilineo uniforme ed *equivalenti* ai fini della descrizione delle leggi fisiche. È possibile stabilire la cinematica del moto relativo di questi riferimenti.

Stabiliamo le conseguenze di questo postulato senza per il momento fare appello alla costanza della velocità della luce o a un postulato dinamico (legge d'inerzia). Notiamo innanzitutto che le leggi di trasformazione

$$x'_i = f_i(x_i, t) \quad t' = f_0(x_i, t)$$

devono essere lineari ed invertibili.

Per la linearità è sufficiente l'ipotesi cinematica che il moto uniforme di un terzo SR appaia tale in entrambi i due SR che stiamo considerando.

Per l'isotropia dello spazio possiamo scegliere l'asse  $x$  come direzione del moto relativo e l'asse  $x'$  coincidente con l'asse  $x$ . Con argomenti cinematici possiamo sincronizzare al tempo  $t = t' = 0$  l'origine degli assi cartesiani dei due sistemi e dimostrare che si preserva l'ortogonalità. Analizzando le trasformazioni dei piani  $xz$ ,  $xy$  e quella del piano  $yz$  all'istante  $t = t' = 0$  possiamo ridurci a ricercare le trasformazioni lineari del tipo:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{10}t \\ y' = a_{22}y \\ z' = a_{33}z \\ t' = a_{01}x + a_{00}t \end{cases}$$

Consideriamo ora un punto solidale a SR' e avente  $x' = 0$ : gli osservatori in SR vedono il punto muoversi su una retta parallela a  $x$  e coincidere con un punto del piano  $yz$  al tempo  $t = 0$ . La legge oraria di questo moto è  $x = vt$ . Pertanto deve valere

$$0 = a_{11}vt + a_{10}t$$

ovvero

$$\begin{cases} x' = a_{11}(x - vt) \\ y' = a_{22}y \\ z' = a_{33}z \\ t' = a_{01}x + a_{00}t \end{cases}$$

dove le  $a_{ij}$  sono funzioni di  $v$ . Per continuità ed invertibilità  $a_{ii} > 0$  e per isotropia  $a_{ii}(-v) = a_{ii}(v)$

Deriviamo la legge di composizione delle velocità.

Per un moto  $x = x(t)$  si ottiene  $u = \frac{dx}{dt}$

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{a_{11}(u - v)}{a_{01}u + a_{00}}$$

Se invertiamo il moto del punto e il moto di SR' per isotropia ci aspettiamo che sia invertito anche il moto trasformato del punto, e pertanto

$$\frac{-a_{11}(-v)(u - v)}{-a_{01}(-v)u + a_{00}(-v)} = -u'$$

da cui usando i risultati precedenti

$$a_{00}(v) = a_{00}(-v) \quad \text{e} \quad a_{01}(v) = -a_{01}(-v)$$

Notiamo poi che il moto relativo di SR rispetto a SR' è un moto con velocità  $w = \phi(v)$  e per il principio di relatività  $v = \phi(w)$  da cui  $v = \phi(\phi(v))$  che se imponiamo la condizione derivante dall'isotropia  $\phi(-v) = -\phi(v)$ , implica  $\phi(v) = \pm v$

Analizzando il moto di un terzo SR rispetto ai primi due e scambiando il ruolo di SR" rispetto a SR' otteniamo che

$$v \leftrightarrow u \quad \text{implica} \quad u' \rightarrow \pm u'$$

ma la relazione di composizione delle velocità deve restare consistente, ovvero

$$\pm u' = \frac{a_{11}(u)(v-u)}{a_{01}(u)v + a_{00}(u)} = \pm \frac{a_{11}(v)(u-v)}{a_{01}(v)u + a_{00}(v)}$$

da cui si ricava facilmente che per ogni  $u, v$

$$\frac{a_{01}(v)}{a_{11}(v)}u + \frac{a_{00}(v)}{a_{11}(v)} = \pm \frac{a_{01}(u)}{a_{11}(u)}v \pm \frac{a_{00}(u)}{a_{11}(u)}$$

ovvero, posto in particolare  $u = 0$ ,

$$\frac{a_{00}(v)}{a_{11}(v)} = \pm 1 \quad \text{ma in particolare per } v = 0 \text{ il valore } \acute{e} \text{ } 1$$

Pertanto, come del resto intuitivamente ovvio,  $\phi(v) = -v$ .

Ricaviamo quindi le seguenti fondamentali relazioni:

$$a_{00} = a_{11} \quad ; \quad \frac{a_{11}(v)}{a_{01}(v)}v = k \quad \text{costante indipendente da } v$$

Con ragionamenti analoghi, ma molto piú semplici, si ricava  $y' = a_{22}(v)y$   
 $y = a_{22}(-v)y'$  da cui  $a_{22} = 1$  e analogamente  $a_{33} = 1$ . In conclusione

$$\begin{cases} x' = a_{11}(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = a_{11}\left(\frac{v}{k}x + t\right) \end{cases}$$

da cui anche  $x = \frac{x'+vt'}{a_{11}(1+\frac{v^2}{k})}$  ma per reciprocitá  $a_{11}(-v) = \frac{1}{a_{11}(v)(1+\frac{v^2}{k})}$  da cui  
 $a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^2}{k}}}$ .

La formula piú generale delle *trasformazioni di coordinate* sotto le sole ipotesi del Postulato di Relativitá, (e avendo scelto l'asse  $x$  come direzione del moto relativo) é dunque

$$\begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1+\frac{v^2}{k}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t+\frac{v}{k}x}{\sqrt{1+\frac{v^2}{k}}} \end{cases} \quad u' = \frac{u-v}{1+\frac{uv}{k}}$$

Notiamo che nel limite  $k \rightarrow \infty$  otteniamo le trasformazioni di Galileo: la cinematica classica é consistente con il postulato di relativitá.

Introduciamo quindi il *Postulato della costanza della velocità della luce* in tutti i sistemi di riferimento inerziali (e dell'indipendenza della velocità dalla sorgente). Richiediamo pertanto che la legge di trasformazione delle velocità risulti compatibile con la condizione  $c' = c$

$$c = \frac{c-v}{1+\frac{vc}{k}} \Rightarrow k = -c^2$$

## Trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \quad \text{ovvero, posto } \beta = \frac{v}{c} \quad \begin{cases} x' = \frac{x-\beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \frac{ct-\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

$$u' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$$

Si suole per comoditá introdurre anche la notazione  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

## Trasformazioni di Lorentz per sistemi con velocità relative qualunque

$$\begin{cases} \vec{x}'_{\parallel} = \gamma(\vec{x}_{\parallel} - \vec{v}t) \\ \vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp} \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{c^2}\right) \end{cases} \quad \text{o anche } \begin{cases} \vec{x}' = \vec{x} + (\gamma - 1)\frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{v^2}\vec{v} - \gamma\vec{v}t \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{c^2}\right) \end{cases}$$

## 1.11 Conseguenze matematiche e fisiche delle trasformazioni di Lorentz

### 1.11.1 Relativitá della simultaneitá

La quantitá cinematica fondamentale della meccanica relativistica é l'*evento*, individuato dalle sue tre coordinate spaziali e dalla sua coordinata temporale

in ciascun SR. La nozione classica (e "intuitiva") di simultaneità è strettamente legata alla nozione di tempo assoluto.

Se consideriamo due eventi che avvengono in due punti separati  $x_1$  e  $x_2$  in un sistema di riferimento SR, e allo stesso tempo  $t$  in quello stesso sistema di riferimento, e riesaminiamo gli stessi eventi in SR' che si muove con velocità  $v$ , troviamo che gli eventi suddetti avvengono in SR' rispettivamente ai tempi

$$t'_1 = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x_1) \quad t'_2 = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x_2) \quad \Rightarrow \quad t'_1 \neq t'_2 \quad \text{se } x_1 \neq x_2$$

Ci si può convincere della consistenza fisica di questo risultato con un'analisi operativa del concetto di simultaneità: mentre è possibile definire in maniera operativamente non ambigua la sincronizzazione degli orologi all'interno di un SR assegnato, usando segnali luminosi inviati da un "centro" arbitrario, la sincronizzazione non può essere mantenuta tra SR differenti.

### 1.11.2 Contrazione dei corpi in movimento

La contrazione dedotta da Lorentz e Fitzgerald a partire dalle leggi delle interazioni elettromagnetiche vale in realtà per qualunque corpo in movimento, indipendentemente dalle interazioni che lo tengono insieme, e soprattutto è una proprietà *relativa* (e non una contrazione assoluta rispetto all'etere).

Consideriamo un'asta a riposo nel riferimento SR' e sia  $l_0$  la sua lunghezza a riposo. Per definizione:

$$l_0 = x'_2 - x'_1$$

dove  $x'_1, x'_2$  sono le coordinate degli estremi dell'asta. Dalle trasformazioni di Lorentz risulta

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Definendo come lunghezza la distanza tra gli estremi *osservata ad un certo istante* nel riferimento SR, allora  $t_1 = t_2$  e

$$l = x_2 - x_1 = \sqrt{1 - \beta^2} l_0 < l_0$$

La lunghezza misurata di un corpo è massima nel SR in cui il corpo è in quiete rispetto all'osservatore. Quando il corpo si muove *si contrae* di un fattore  $\sqrt{1 - \beta^2}$  nella direzione del moto;  $l_0$  si chiama anche *lunghezza propria*.

Figura 1.6: Misurazione di intervalli di tempo con orologi mobili

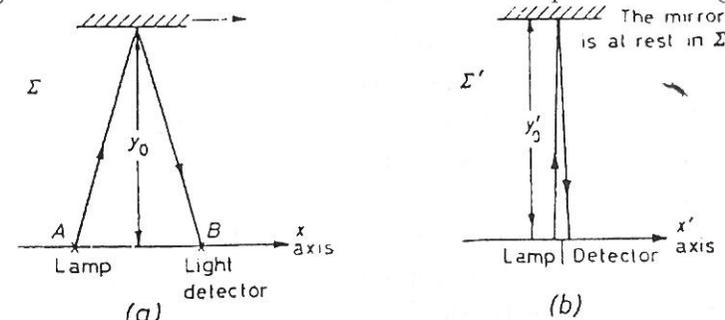


Figure 3.10. The measurement of a time interval in terms of the distance light travels in the time interval

### 1.11.3 Dilatazione del tempo per orologi in movimento

Un orologio in moto rispetto ad un osservatore appare più lento di un orologio fermo rispetto all'osservatore stesso.

Consideriamo un orologio fermo in  $x'_1$  e misuriamo un intervallo  $\Delta t_0$  tra due successive letture  $t'_1$  e  $t'_2$

$$\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$$

In SR due orologi diversi leggono rispettivamente

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{e} \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

I due orologi sono sincronizzati ma collocati in posizioni diverse per essere in coincidenza col moto di SR'. Quindi

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} > \Delta t_0$$

$\Delta t_0$  si chiama intervallo di *tempo proprio*.

### 1.12 Alcuni esperimenti ideali

(*Gedankenexperimente*)

### 1.12.1 Confronto di lunghezze perpendicolari al moto relativo

Due osservatori in moto relativo confrontano aste perpendicolari al moto all'istante della coincidenza degli assi. Gli osservatori sono in accordo sulla simultaneità delle osservazioni e, permettendo alle aste di lasciare un segno l'una sull'altra, possono accordarsi anche su quale delle due aste *appare* ad entrambi più corta.

Per il principio di relatività, aste che sarebbero uguali se poste nello stesso SR devono quindi apparire uguali in questo confronto, altrimenti uno dei due SR sarebbe privilegiato rispetto all'altro.

### 1.12.2 Confronto di misure di intervalli di tempo

Un osservatore in SR' invia un segnale luminoso ad uno specchio in modo che il segnale viaggi perpendicolarmente alla direzione del moto relativo. L'intervallo di tempo misurato tra partenza e ritorno del segnale è

$$\Delta t' = \frac{2y_0}{c}$$

Dal punto di vista di SR lo spazio percorso dal segnale è

$$L = 2\sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}$$

e quindi vale la relazione

$$\Delta t = \frac{2}{c}\sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2} \quad \text{ovvero} \quad \Delta t = \frac{2y_0}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Poiché dall'analisi precedente sappiamo che  $y_0 = y'_0$  risulta

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

che è l'espressione della dilatazione dei tempi.

### 1.12.3 Confronto di lunghezze parallele al moto relativo

Un osservatore in SR' osserva una distanza  $l_0$  in quiete nel riferimento SR passando a velocità  $v$  da un estremo all'altro. Il tempo impiegato nel passaggio, dal punto di vista di SR, è  $\Delta t = \frac{l_0}{v}$ . Il tempo (proprio) impiegato dal punto di vista di SR' è, per i risultati precedenti,  $\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - \beta^2}$ . Risulta pertanto

$$\Delta t' = \frac{l_0\sqrt{1 - \beta^2}}{v} = \frac{l'}{v}$$

in quanto il segmento è in moto con velocità  $v$  (in modulo) rispetto a SR'. Di conseguenza  $l' = l_0\sqrt{1 - \beta^2}$

### 1.12.4 Differenze di fase nella sincronizzazione degli orologi

Per la relatività della simultaneità gli orologi in moto, oltre che rallentati, appaiono anche sfasati in funzione della loro posizione secondo la formula

$$t = \gamma \left[ t' + \frac{v}{c^2} x' \right]$$

Esaminiamo il processo di sincronizzazione:

A e B sono fermi a distanza  $l'$  in SR'. La sincronizzazione avviene inviando un segnale dal punto medio tra A e B.

Nel riferimento SR, la distanza tra A e B è  $l'\sqrt{1 - \beta^2}$ . A si muove nella direzione della sorgente del segnale, B se ne allontana, quindi A fissa l'orologio a zero *prima* di B (relatività della simultaneità). Fissiamo a  $t = 0$  l'emissione del segnale, allora

$$ct_A = \frac{l'}{2}\sqrt{1 - \beta^2} - vt_A \quad ct_B = \frac{l'}{2}\sqrt{1 - \beta^2} + vt_B$$

e lo sfasamento è

$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{l'}{2}\sqrt{1 - \beta^2} \left[ \frac{1}{c - v} - \frac{1}{c + v} \right] = l' \frac{v}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}$$

o anche, tenendo conto del rallentamento degli orologi in moto, nel riferimento SR gli orologi A e B appaiono sfasati di una quantità

$$\Delta t' = \frac{lv}{c^2}$$

Ruolo dell'osservatore in meccanica relativistica:

l'osservatore è un insieme di orologi distribuiti nello spazio, in quiete e sincronizzati.

### 1.13 Composizione relativistica delle velocità

Abbiamo già discusso il caso in cui le velocità siano dirette entrambe nella stessa direzione.

Nel caso più generale, consideriamo un movimento arbitrario nel riferimento SR, con legge orario

$$x_i = x(t) \quad u_i = \frac{dx}{dt}$$

Per effetto di una trasformazione di Lorentz otteniamo

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i(t) & u'_i &= \frac{dx'_i}{dt'} = \frac{dx_i}{dt} \frac{dt}{dt'} \\ t' &= t'(t) \end{aligned}$$

D'altronde differenziando le trasformazioni di Lorentz

$$\begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - v dt) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \\ dt' &= \gamma(dt - \frac{v}{c^2} dx) \end{aligned}$$

e pertanto risulta subito  $\frac{dt'}{dt} = \gamma(1 - \frac{vu_x}{c^2})$  da cui

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{vu_x}{c^2})} \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - \frac{vu_x}{c^2})}$$

Per il principio di relatività le relazioni inverse sono completamente simmetriche (come si verifica facilmente):

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + \frac{vu'_x}{c^2})} \quad u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + \frac{vu'_x}{c^2})}$$

Notiamo inoltre che vale

$$u'^2 = \frac{(u_x - v)^2 + (u_y^2 + u_z^2)(1 - \frac{v^2}{c^2})}{(1 - \frac{vu_x}{c^2})^2}$$

e si dimostra che  $u^2 \leq c^2$  implica  $u'^2 \leq c^2$ ; quindi resta anche verificato che la velocità della luce non cambia per cambiamento di sistema di riferimento.

Importante conseguenza:

$$\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \frac{1}{\gamma(1 - \frac{vu_x}{c^2})}$$

Si *postula* che nessun segnale possa propagarsi a velocità superiore a  $c$ .

### 1.14 Trasformazione relativistica delle caratteristiche di un'onda

Ricordiamo l'espressione della fase di un'onda piana che si propaga con velocità  $w$  e frequenza  $\nu$ , essendo  $\hat{n}$  la direzione normale al fronte dell'onda:

$$\Phi = \nu \left( t - \frac{\vec{x} \cdot \hat{n}}{w} \right)$$

La fase deve essere invariante per cambiamento di SR, pertanto

$$\nu \left( t - \frac{\vec{x} \cdot \hat{n}}{w} \right) = \nu' \left( t' - \frac{\vec{x}' \cdot \hat{n}'}{w'} \right)$$

e detto  $\alpha$  l'angolo fra la direzione del moto di SR' e il versore  $\hat{n}$  si ricavano dalle trasformazioni di Lorentz le relazioni

$$\begin{aligned} \gamma \nu \left( 1 - \cos \alpha \frac{v}{w} \right) &= \nu' \\ \nu \frac{\sin \alpha}{w} &= \nu' \frac{\sin \alpha'}{w'} \\ \gamma \nu \left( \frac{\cos \alpha}{w} - \frac{v}{c^2} \right) &= \nu' \frac{\cos \alpha'}{w'} \end{aligned}$$

da cui risolvendo

$$\begin{aligned} \nu' &= \nu \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \hat{n}}{w}\right) \gamma \\ \tan \alpha' &= \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \frac{vw}{c^2}} \\ w' &= \frac{w - \vec{v} \cdot \hat{n}}{\sqrt{1 - \frac{2wv}{c^2} \cos \alpha + \frac{w^2 v^2}{c^4} - \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{c^2}}} \end{aligned}$$

Notiamo che queste relazioni sono le stesse che avremmo ottenuto per la trasformazione di velocità e direzione di propagazione per una particella di velocità  $u = \frac{c^2}{w}$  e  $u' = \frac{c^2}{w'}$  rispettivamente nei due SR.

Quest'analogia è alla base dell'interpretazione di DeBroglie del comportamento ondulatorio delle particelle, cui è attribuita una velocità di fase pari a  $w = \frac{c^2}{u}$  dove  $u$  è la velocità ordinaria (o di gruppo).

Notiamo la coincidenza dei due valori nel caso  $u = w = c$ , nel qual caso risulta anche  $u' = w' = c$ .

Come in meccanica classica, la velocità di raggio di un'onda trasforma allo stesso modo delle velocità dei punti materiali.

## 1.15 Conferme della cinematica relativistica da esperimenti ottici

### 1.15.1 Aberrazione della luce stellare

Consideriamo l'effetto della luce emessa da una stella giacente nel piano  $xy$  su due osservatori in due SR inerziali in moto relativo lungo l'asse  $x$  con velocità relativa  $v$ . Sia  $\theta$  l'angolo di osservazione in SR e  $\theta'$  l'angolo in SR'. La direzione della luce cambia, ma non il modulo della velocità. Pertanto

$$\begin{aligned} u_x &= c \cos \theta & u_y &= c \sin \theta \\ u'_x &= c \cos \theta' & u'_y &= c \sin \theta' \end{aligned}$$

e pertanto

$$\tan \theta' = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \frac{v}{c}}$$

È facile verificare che al primo ordine in  $v/c$

$$\theta' - \theta \simeq \frac{v}{c} \sin \theta$$

in accordo con il risultato non relativistico a meno di effetti del secondo ordine.

### 1.15.2 Effetto Fizeau-Fresnel

Consideriamo un riferimento galileiano rispetto al quale il mezzo si muove con velocità  $\pm w$ , ed un secondo riferimento nel quale il mezzo è in quiete, e pertanto deve valere per la velocità della luce nel mezzo  $u' = \frac{c}{n}$ . Risulta allora

$$u = \frac{\frac{c}{n} \pm w}{1 \pm \frac{w}{nc}} = \frac{c}{n} \frac{(1 \pm n \frac{w}{c})}{(1 \pm \frac{w}{nc})} \simeq \frac{c}{n} \left[ 1 \pm \left(n - \frac{1}{n}\right) \frac{w}{c} \right] = \frac{c}{n} \pm \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) w$$

e quindi al primo ordine in  $w/c$  non soltanto è riprodotto il risultato classico, ma anche si può derivare cinematicamente il coefficiente di Fresnel  $\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}$ .

### 1.15.3 Effetto Doppler relativistico

Data una sorgente luminosa in quiete in SR, essa appare in movimento nel riferimento SR'.

Dall'analisi della trasformazione delle caratteristiche di un'onda ricaviamo nel caso di onde elettromagnetiche nel vuoto

$$\nu' = \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \hat{n}}{c}\right) \gamma \nu \quad \tan \alpha' = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \frac{v}{c}}$$

In particolare se l'onda è emessa nella direzione del moto di SR' risulta (*effetto Doppler longitudinale*)

$$\nu' = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \gamma \nu = \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c}\right)} \nu = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \nu$$

ovvero  $\Delta \nu \simeq -\frac{v}{c} \nu$  in accordo al primo ordine con il risultato classico.

Figura 1.7: Esperimento di Ives-Stilwell

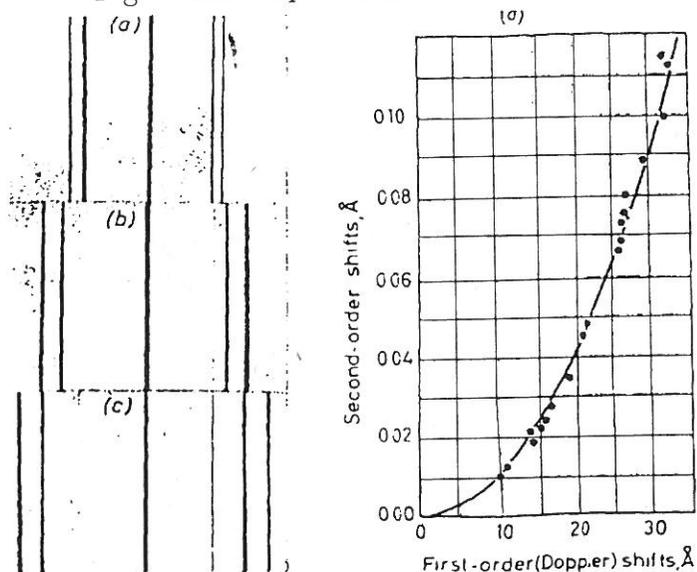


Figure 3.11. (a), (b) and (c) Typical spectra obtained by Ives and Stilwell. The spectra consist of central unsplit lines with 'symmetrically' placed lines on either side; the accelerating potential differences were (a) 7850, (b) 13702, and (c) 20755 V respectively; (d) the second-order shift:  $\lambda_m - \lambda' = \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \lambda'\right)$  is plotted against the first-order Doppler shift  $\Delta\lambda = (v/c)\lambda'$  for various accelerating potentials. It can be seen that the experimental points are in very good agreement with the predictions of the theory of special relativity, which are shown by the continuous line. (By courtesy of the Editor, Sci. Proc. Roy. Dublin Soc.)

therefore  $\lambda_m - \lambda' = \lambda' \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right] \approx \frac{v^2}{2c^2} \lambda'$  (3.92)

Table 3.1

Accelerating potential difference (V)	$\Delta\lambda = \frac{v}{c} \lambda' (\text{Å})$	$\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \lambda'$ calculated (Å)	$\lambda_m - \lambda'$ observed (Å)
26,735	25.82	0.0670	0.067
34,395	29.40	0.0859	0.090
40,190	31.93	0.1019	0.0995
42,260	32.50	0.1098	0.113

Notiamo invece che nel caso in cui il movimento sia perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda risulta

$$\nu' = \gamma \nu$$

(effetto Doppler trasversale)

Questo effetto, che è dell'ordine  $v^2/c^2$ , è completamente assente nella cinematica classica, e si riconduce semplicemente al fenomeno della dilatazione degli intervalli di tempo.

Per quanto riguarda le lunghezze d'onda, la loro legge di trasformazione discende direttamente dal postulato della costanza della velocità della luce:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad \lambda' = \frac{c}{\nu'}$$

La classica esperienza di verifica dell'effetto Doppler relativistico è dovuta a Ives e Stilwell (J. Opt. Soc. Amer. 28(1938)215).

L'analisi riguardava lo spostamento delle righe nello spettro di atomi di idrogeno in movimento ad alta velocità, sia per emissione a  $\theta = 0$  che a  $\theta = \pi$ . Classicamente  $\Delta\lambda = \pm \frac{v}{c} \lambda$ . Relativisticamente

$$\lambda_m \equiv \frac{\lambda_0 + \lambda_\pi}{2} = \frac{\gamma}{2} \lambda \left[ \left(1 - \frac{v}{c}\right) + \left(1 + \frac{v}{c}\right) \right] = \gamma \lambda$$

da cui

$$\lambda_m - \lambda \approx \frac{v^2}{2c^2} \lambda$$

mentre  $v/c$  viene ricavato direttamente, al primo ordine, da  $\Delta\lambda$ . Il risultato è in ottimo accordo con le previsioni relativistiche.

## 1.16 Altre conferme sperimentali : vita media dei mesoni $\mu$

(Rossi-Hall)

Secondo la legge dei decadimenti radioattivi, il numero di atomi radioattivi che sopravvive, nel riferimento di quiete degli atomi, a partire da un valore iniziale  $N_0$  dopo un tempo  $t'$  è

$$N = N_0 \exp -\frac{t'}{\tau_0}$$

dove  $\tau_0$  si chiama vita media dell'atomo (o della particella). Assumendo le trasformazioni di Lorentz per particelle in movimento deve valere

$$N = N_0 \exp -\frac{t}{\tau} \quad \text{dove } \tau = \gamma\tau_0$$

Figura 1.8: L'apparato di Rossi-Hall

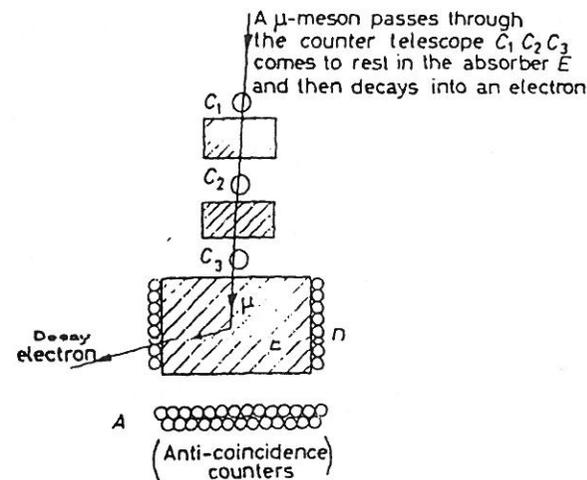


Figure 3.12. Schematic diagram of an apparatus suitable for measuring the lifetime of  $\mu$ -mesons at rest

Consideriamo ora il caso dei mesoni  $\mu$  presenti nella radiazione cosmica. La loro vita media a riposo può essere misurata arrestandoli in un contatore, poiché il tempo di arresto è molto minore della vita media. Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \tau_0 &\approx 2.197 \cdot 10^{-6} \text{ sec} \\ m_\mu &\approx 105.65 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Pertanto possiamo ricavare  $\tau$  dall'analisi del percorso medio dei  $\mu$  cosmici, che vengono prodotti dal decadimento dei mesoni  $\pi$  nell'alta atmosfera. Se, viaggiando ad una velocità  $v \approx c$  avessero vita media  $\tau_0$ , percorrerebbero in

media  $c\tau_0 \approx 660$  m prima di decadere e sarebbero virtualmente inosservabili. Se invece assumiamo  $\tau = \gamma\tau_0$  e notiamo che i valori medi di  $\gamma$  per i mesoni  $\mu$  al livello del mare sono di  $\sim 30$ , allora la distanza media percorsa vale  $\sim 20$  km e questo è consistente con la loro osservazione:  $\Delta x = \gamma v \tau_0$

Altre esperienze basate sullo studio in laboratorio dei decadimenti dei mesoni  $\pi$  confermano pienamente questi risultati.

## 1.17 Cinematica relativistica

Consideriamo la più generale trasformazione omogenea di coordinate (omogeneità significa  $O=O'$  a  $t=0$ ). Questa trasformazione sarà esprimibile nella forma lineare:

$$x'_i = \sum_{k=0}^3 A_{ik} x_k$$

dove abbiamo introdotto  $x_0 = ct$ .

Consideriamo quindi un evento nel sistema SR, caratterizzato dall'insieme di valori  $(x_0, \vec{x})$ , e l'evento visto nel sistema SR', e caratterizzato da  $(x'_0, \vec{x}')$ . Esiste una particolare classe di eventi, che consiste nel passaggio di un fronte d'onda e.m. emesso all'origine degli assi all'istante  $t = t' = 0$ , e per la quale sappiamo che vale:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 = x_0^2$$

ma anche:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 = x_0'^2$$

Se ora consideriamo un evento arbitrario, per esso vale:

$$s^2 = x_0^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

$$s'^2 = x_0'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

Allora ad ogni insieme di variabili che rende  $s^2 = 0$  corrisponde un insieme che rende  $s'^2 = 0$ , e poiché la connessione è lineare e deve valere il principio di relatività risulta:  $s'^2 = s^2$ .  $s$  è una quantità che non cambia per trasformazioni di Lorentz e si chiama *intervallo* tra l'evento  $(x_0, \vec{x})$  e l'evento origine  $(O, \vec{O}')$ . Infatti possiamo verificare che la forma più generale delle trasformazioni di coordinate che abbiamo derivato dal postulato di relatività è consistente con l'invarianza di  $\vec{x}^2 + kt^2$  che si riduce al precedente con la

scelta  $k = -c^2$ .

In formulazione differenziale, se consideriamo l'intervallo fra due eventi infinitesimamente vicini troviamo la relazione:

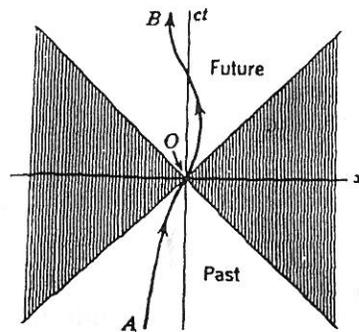
$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds'^2$$

$ds^2$  è una "distanza" nello "spazio" a quattro dimensioni in cui le coordinate sono  $(x_0, \vec{x})$  (Spazio di Minkowski).

$ds^2$  però non condivide con la distanza ordinaria la proprietà di definitezza del segno. Risulta infatti che  $ds^2$  può anche essere negativo, e  $ds^2 = 0$  non implica la coincidenza degli eventi.

Il luogo dei punti tali che  $s^2 = 0$  è una ipersuperficie, detta *cono-luce*, che divide lo spazio di Minkowski in tre regioni disconnesse. Notiamo che è possibile rappresentare graficamente tale spazio associando una coordinata ordinaria alla direzione  $x_0$ . In particolare è utile analizzare gli eventi sul piano  $x - ct$ . Su questo piano il cono-luce è rappresentato da due rette passanti per l'origine ed orientate a  $\frac{\pi}{4}$  rispetto gli assi coordinati. Le superfici a  $s^2 = \text{costante}$  sono iperboli asintotiche al cono-luce.

Figura 1.9: Il cono-luce e le linee d'universo



This is the world line of a system and the light cone. The unshaded interior of the cone represents the past and the future, while the shaded region outside the cone is called "elsewhere." A point inside (outside) the light cone is said to have a time-like (space-like) separation from the origin.

Notiamo che gli eventi la cui separazione soddisfa  $ds^2 > 0$  godono della proprietà  $\left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| < c$  e pertanto esiste un SR', in moto con velocità  $\frac{d\vec{x}}{dt}$  rispetto

a SR, in cui gli eventi appaiono avvenire nella stessa posizione a tempi diversi. Gli eventi in questione possono quindi essere collegati da un segnale fisicamente possibile e quindi da un rapporto di causa ed effetto (uno dei due eventi avviene prima dell'altro in tutti i SR ammissibili).

Viceversa se vale  $ds^2 < 0$  allora  $\left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| > c$ , ma scegliendo un riferimento in moto con velocità  $\frac{d\vec{x}}{dt} \frac{c^2}{\left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right|^2} < c$  è possibile avere  $dt' = 0$ . Pertanto esiste un SR' nel quale gli eventi sono simultanei. Non è possibile tra di essi una relazione causale.

Nel caso limite  $ds^2 = 0$  i due eventi sono collegabili solamente con un segnale che viaggi alla velocità della luce.

Le relazioni di tutti gli eventi possibili con un evento dato possono pertanto essere raggruppate nel modo seguente:

- Eventi tali che  $ds^2 \geq 0$  e  $dt < 0$ : si trovano nel cono-luce inferiore e costituiscono il *passato* dell'evento dato.
- Eventi tali che  $ds^2 < 0$ : si trovano fuori dal cono-luce e costituiscono il *presente* ovvero l'*altrove* (insieme degli eventi ininfluenti e su cui non è possibile influire)
- Eventi tali che  $ds^2 \geq 0$  e  $dt > 0$ : si trovano nel cono-luce superiore e costituiscono il *futuro* di un evento.

Consideriamo ora un "punto materiale" (*particella*) in movimento con legge oraria  $\vec{x} = \vec{x}(x_0)$  in un SR dato.

In SR', nel quale la particella è istantaneamente in quiete deve valere:

$$d\vec{x}' = 0 \quad dt' = d\tau$$

Per l'invarianza di  $ds^2$  risulta allora:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2$$

ovvero ricordando  $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ , velocità istantanea:

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Definiamo  $d\tau$  come la variazione infinitesima della quantità  $\tau$ , *tempo proprio*

della particella in questione. il  $d\tau$  é un *invariante relativistico*, ossia non dipende dalla scelta di SR.

La rappresentazione grafica sul piano  $x - ct$  delle leggi orarie di una particella é una linea continua che si definisce *linea dell'universo* della particella stessa.

Poiché  $\left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| < c$ , la linea dell'universo di una particella si trova sempre *all'interno del cono-luce* che può essere definito relativamente a ciascuno dei punti della linea d'universo stessa.

## 1.18 Paradosso dei gemelli

Consideriamo due orologi A e B di cui uno fermo in un SR inerziale (Terra) e l'altro fermo in un SR' (razzo) in moto rispetto al primo con velocità  $v$ . Le posizioni e i tempi dei due orologi coincidono quando essi si trovano all'origine degli assi  $O = O'$  al tempo  $t=t'=0$ . l'orologio in moto raggiunge un terzo orologio solidale con SR al tempo  $t_T = \gamma t_R$ . Notiamo che per definizione  $t_R$  é il tempo proprio dell'orologio che ha viaggiato. Se ora l'orologio cambia la direzione del suo movimento e, sempre a velocità  $v$ , ritorna a terra, all'istante della coincidenza con la posizione iniziale, il tempo segnato dall'orologio in movimento é  $2t_R$  mentre quello dell'orologio in quiete é  $2\tau = 2t_R\gamma$ .

Questo é il paradosso degli orologi.

L'apparente violazione del principio di Relatività é spiegata dal fatto che uno solo dei due orologi rimane sempre fermo nello stesso SR, mentre l'altro, al momento dell'inversione di rotta, cambia da SR' ad SR" (fisicamente subisce un'accelerazione e pertanto la sua "storia" non é assimilabile a quella di un osservatore inerziale.

Il fattore  $\gamma$  che compare tra  $t_T$  e  $t_R$  é lo stesso che per la dilatazione dei tempi, per l'effetto Doppler trasversale o per la relazione tra tempo proprio e tempo di SR. Il risultato di questo calcolo può essere riprodotto nell'ambito della relatività generale senza introdurre alcuna singolarità nella traiettoria e corrisponde ad un effetto fisico *vero* che può essere misurato ad esempio in esperimenti con aerei in volo concorde o discorde con la rotazione della terra (e quindi con velocità di rotazione "assolute" differenti) (Hafele e Keating, 1971).

In generale si può applicare la relazione:

$$\Delta\tau = \int_{\tau(t_1)}^{\tau(t_2)} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt \leq \Delta t = t_2 - t_1$$

## 1.19 Trasformazioni generali di Lorentz

Consideriamo la piú generale trasformazione di Lorentz omogenea:

$$x'_i = \sum_{k=0}^3 A_{ik} x_k$$

ed imponiamo la condizione di invarianza dell'intervallo:

$$\sum_{i,j} \eta_{ij} x'_i x'_j = \sum_{i,j,k,l} \eta_{ij} A_{ik} A_{jl} x_k x_l = \sum_{k,l} \eta_{kl} x_k x_l$$

dove  $\eta_{ij}$  é una matrice diagonale ad autovalori (1, -1, -1, -1).

Poiché la relazione deve valere per ogni scelta di  $x_k$ , la piú generale trasformazione di Lorentz deve soddisfare:

$$\sum_{i,j} \eta_{ij} A_{ik} A_{jl} = \eta_{kl}$$

Questa condizione é molto simile a quella che vale per il gruppo delle rotazioni euclidee in quattro dimensioni  $O(4)$ ; in realtà si tratta in questo caso di un gruppo di trasformazioni in uno spazio complesso a 3+1 dimensioni.

Notiamo che la condizione fissa il modulo, ma non il segno del determinante della matrice  $A_{ik}$ : le trasformazioni a determinante 1 si dicono *trasformazioni proprie*. Considerando il caso del determinante -1 é possibile includere le *riflessioni* (trasformazioni di parità) tra le trasformazioni di Lorentz. Le trasformazioni ad assi paralleli e velocità parallela ad uno degli assi che abbiamo visto fin'ora si dicono *trasformazioni speciali*.

La matrice  $A_{ik}$  definisce la proprietà di trasformazione di un vettore nello spazio di Minkowski: il *quadrivettore*.

Introduciamo la notazione standard: indici greci per la quantità a quattro componenti, convenzione della somma sugli indici ripetuti, indici covarianti e controvarianti per indicare la somma con la metrica di Minkowski:  $\eta_{\mu\nu}$ .

Un vettore che si trasforma come il vettore delle coordinate  $x^\mu$  è un *vettore controvariante*:

$$x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu = A_\nu^\mu x^\nu$$

Un vettore che trasforma come la derivata vettoriale  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  è un *vettore covariante*:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = A_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

Notiamo la proprietà delle trasformazioni di Lorentz:

$$A_\nu^\mu A_{\mu'}^\nu = \delta_{\mu'}^\mu \quad \text{delta di Kronecker}$$

In particolare valgono le proprietà del tensore metrico:

$$\eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho$$

e il tensore metrico alza ed abbassa gli indici:

$$V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu \quad \eta_{\mu\nu} A_{\mu'}^\mu A_{\nu'}^\nu = \eta_{\mu'\nu'}$$

Si può definire un *prodotto scalare* (invariante):

$$\eta_{\mu\nu} V^\mu W^\nu = V_\nu W^\nu = V^\mu W_\mu$$

ed in particolare  $x_\mu x^\mu$  è l'intervallo.

Si possono definire tensori di rango più elevato (*quadrivettori*) con proprietà di trasformazione del tipo:

$$T'^{\mu\nu} = A_{\mu'}^\mu A_{\nu'}^\nu T^{\mu'\nu'}$$

con ovvie generalizzazioni.

Contrazioni tra indici di tensori producono tensori di rango più basso. Ad esempio:

$T^{\mu\nu} V_\nu$  è un vettore controvariante.

La condizione  $\det A_\nu^\mu = 1$  implica che lo Jacobiano dei cambiamenti di coordinate è 1 e pertanto l'*elemento di volume*  $d^4x$  è invariante.

Il principio di relatività applicato alla dinamica può tradursi nella richiesta che le leggi della fisica abbiano la stessa forma nei differenti SR, ovvero che essi ammettono una *formulazione covariante* in termini di quadrivettori e

quadrivettori.

Completiamo l'analisi della cinematica relativistica utilizzando le nozioni fin qui introdotte per definire *quadrivelocità* e *quadraccelerazione*. A tal fine osserviamo che, essendo  $dx^\mu$  un quadrivettore infinitesimo controvariante e  $d\tau$  (variazione di tempo proprio) una quantità invariante per trasformazioni di Lorentz, è possibile definire il quadrivettore quadrivelocità:

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

vettore tangente alla linea d'universo di una particella la cui equazione oraria può essere scritta  $x^\mu = x^\mu(\tau)$ .

Proprietà fondamentale della quadrivelocità:

$$U_\mu U^\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{ds^2}{(d\tau)^2} = c^2$$

Ricordando che  $\frac{dt}{d\tau} = \gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$  è facile ottenere le componenti di  $U_\nu$ :

$$U^\mu \equiv (\gamma c, \gamma \vec{u})$$

dove  $\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt}$  è la velocità ordinaria della particella.

In modo del tutto analogo si può definire il quadrivettore quadraccelerazione:

$$A^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \quad A_\mu U^\mu = 0$$

la quadraccelerazione è ortogonale alla quadrivelocità.

È possibile ottenere la rappresentazione in componenti della quadraccelerazione nella forma:

$$A^\mu \equiv \left( \gamma^4 \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{c}, \gamma^2 \vec{a} + \gamma^4 \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{c} \frac{\vec{u}}{c} \right)$$

Dalla formula di trasformazione dei quadrivettori

$$U'^\mu = A_\nu^\mu U^\nu$$

è facile riottenere le relazioni di composizione relativistica.

Un'altra quantità covariante è il *quadrivettore d'onda*  $K^\mu$ . Scrivendo la fase (invariante) come  $\Phi = K_\mu X^\mu$  risulta  $K^\mu \equiv (\frac{\nu}{c}, \frac{\nu \hat{n}}{w})$  e  $K_\mu K^\mu = 0$  per un'onda luminosa nel vuoto  $w = c$ .

## 1.20 Dinamica relativistica

La dinamica newtoniana è inconsistente con la relatività di Einstein perché le sue leggi sono invarianti sotto trasformazioni di Galileo e non di Lorentz. Un'altra, e per certi aspetti più profonda, difficoltà è legata all'idea di azione a distanza, presente ad esempio nella teoria di Newton della gravitazione e incompatibile in relatività con il principio di azione e reazione a causa della relatività della simultaneità.

Per determinare le necessarie modificazioni potremmo studiare le interazioni elettromagnetiche (le eq. di Maxwell sono covarianti di Lorentz) o più semplicemente analizzare i processi d'urto, per i quali non si pone un problema di simultaneità.

Procediamo euristicamente considerando la collisione elastica di due sfere uguali, prima nel riferimento simmetrico in cui esse si muovono con velocità uguali ed opposte, poi in un riferimento in cui la sfera A si muove perpendicolarmente al piano di collisione.

Nel riferimento simmetrico SR, assumendo la sola invarianza per parità e inversioni temporali della dinamica, il processo sarà descritto dalle relazioni:

$$\vec{u}_A + \vec{u}_B = 0 \quad \vec{U}_A + \vec{U}_B = 0$$

e dalle:

$$u_{xA} = U_{xA} \quad u_{yA} = -U_{yA}$$

$$u_{xB} = U_{xB} \quad u_{yB} = -U_{yB}$$

Il riferimento SR', per ipotesi, si muove con velocità:  $V = u_{xA} = -u_{xB}$  rispetto al riferimento SR.

Applichiamo le trasformazioni di Lorentz alle velocità, ottenendo:

$$u'_{xA} = U'_{xA} = 0 \quad u'_{yA} = U'_{yA} = \gamma(v) u_{yA}$$

$$u'_{xB} = U'_{xB} = -\frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \quad u'_{yB} = -U'_{yB} = \gamma(v) u_{yB} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

Formalmente la conservazione dell'impulso SR si scrive:

$$m'_A \vec{u}'_A + m'_B \vec{u}'_B = m'_A \vec{U}'_A + m'_B \vec{U}'_B$$

Figura 1.10: Collisioni elastiche in riferimenti differenti

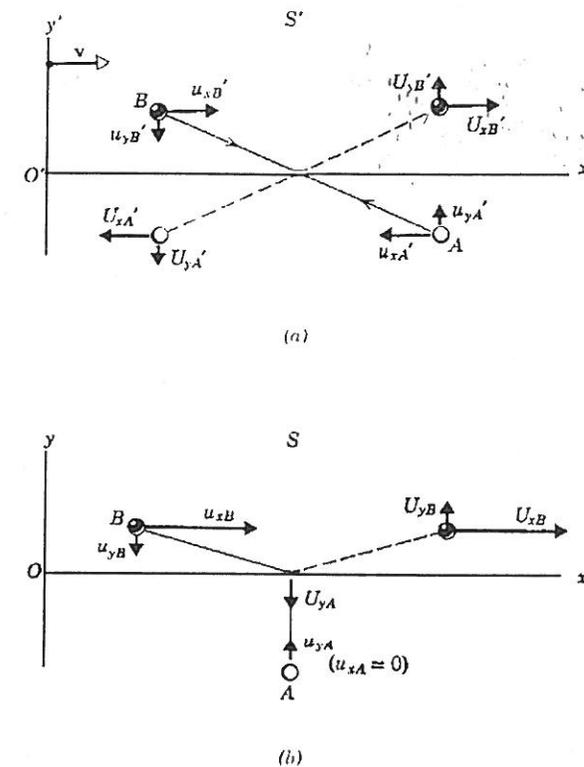


Fig. 3-1. A particular elastic collision as viewed by (a) observer S' and (b) observer S. Here, small letters ( $u$ ) refer to before the collision, capital letters ( $U$ ) refer to after the collision. The subscripts ( $A$  and  $B$ ) denote the particle and ( $x$  and  $y$ ) the component. The values in  $S'$  are primed, those in  $S$  are not.

La componente  $x$  della legge di conservazione è comunque soddisfatta, ma per la componente  $y$  deve valere:

$$m'_A u'_{yA} + m'_B u'_{yB} = 0$$

ovvero

$$\gamma(v) \left( m'_A u_{yA} + m'_B u_{yB} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \right) = 0 \quad \text{e vale} \quad u_{yA} + u_{yB} = 0$$

Pertanto, poiché classicamente  $m'_A = m'_B = m_0$  massa inerziale, la conservazione dell'impulso è incompatibile con la dipendenza classica dalla massa inerziale a riposo e dalla velocità.

Notiamo tuttavia che valgono le relazioni:

$$\gamma'_A \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u'^2_A + v'^2_A}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma^2 \frac{u^2_{YA}}{c^2}}}$$

$$\gamma'_B \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u'^2_B + v'^2_B}{c^2}}} = \frac{1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma^2 \frac{u^2_{YB}}{c^2}}}$$

Pertanto la richiesta che valga in SR' la conservazione dell'impulso lungo  $y$  può essere riportata alla forma:

$$\frac{m'_A}{\gamma'_A} \frac{u_{YA}}{\sqrt{1 - \gamma^2 \frac{u^2_{YA}}{c^2}}} + \frac{m'_B}{\gamma'_B} \frac{u_{YB}}{\sqrt{1 - \gamma^2 \frac{u^2_{YB}}{c^2}}} = 0$$

ovvero:

$$\frac{m'_A}{\gamma'_A} - \frac{m'_B}{\gamma'_B} = 0$$

che ammette come unica soluzione  $m'_A = \gamma'_A m_0$  se imponiamo che la relazione classica valga nel limite  $u_Y \rightarrow 0$ .

Possiamo quindi mantenere invariata in forma la legge classica della conservazione dell'impulso se introduciamo il concetto di *massa propria*, o *massa a riposo*  $m_0$  di una particella, che è il valore della massa nel riferimento in cui è in quiete, e il concetto di *massa relativistica*  $m(v)$ , dipendente dalla velocità della particella rispetto a SR e legata alla massa a riposo dalla relazione:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

L'impulso di una particella è allora:

$$\vec{P} = m(v)\vec{v} = m_0\gamma\vec{v}$$

Notiamo che la massa relativistica può essere interpretata come una misura dell'inerzia di una particella. Pertanto il fatto che  $m(v)$  cresca rapidamente

con  $v$  e tenda ad infinito nel limite  $v \rightarrow c$  può dare una spiegazione "intuitiva" dell'irraggiungibilità della velocità della luce per particelle materiali.

Introduciamo ora la legge relativistica delle forze:

$$\vec{F} \equiv \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} (m_0\gamma\vec{v}) = m_0\gamma\vec{a} + m_0\vec{v}\frac{d\gamma}{dt}$$

e grazie alla relazione  $\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}$  otteniamo anche:

$$\vec{F} = m \left[ \vec{a} + \vec{v} \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \gamma^2 \right]$$

Deriviamo il teorema relativistico dell'energia:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{x} = d\mathcal{E}$$

assumendo come *definizione* di  $\mathcal{E}$ :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = m\gamma^2\vec{v} \cdot \vec{a} = m_0c^2 \frac{d\gamma}{dt}$$

In conclusione, scegliendo di porre a zero la costante di integrazione, si ottiene:

$$\mathcal{E} = m_0c^2\gamma = m(v)c^2$$

Pertanto anche nel limite non relativistico  $v \ll c$   $\mathcal{E}$  differisce dall'energia cinetica classica  $\frac{1}{2}m_0v^2$  per una quantità  $\mathcal{E}_0 = m_0c^2$  che viene chiamata *energia a riposo*. L'energia relativistica  $\mathcal{E}$  è una misura diretta della massa inerziale (relativistica) di una particella, e tende a infinito per  $v \rightarrow c$ . È facile ricavare una relazione integrale ed una differenziale tra energia ed impulso valide in tutti i sistemi di riferimento:

$$\mathcal{E}^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \quad \mathcal{E} = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^4}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\vec{p}} = c^2 \frac{\vec{p}}{\mathcal{E}} = \vec{v}$$

Si può anche riformulare la relazione tra forza ed accelerazione nelle forme:

$$\vec{F} = m\vec{a} + \vec{v} \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c^2}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} - \vec{v} \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{mc^2}$$

In generale  $\vec{F}$  ed  $\vec{a}$  non sono parallele. Un caso semplice è il caso di  $\vec{F}$  parallela a  $\vec{v}$ , e quindi ad  $\vec{a}$ , secondo la relazione

$$F_{\parallel} = m_0 \gamma^3 a_{\parallel}$$

La quantità  $m_{\parallel} = m_0 \gamma^3$  è chiamata *massa longitudinale*. Un altro caso semplice si ha per  $\vec{F}$  perpendicolare a  $\vec{v}$ , per cui  $\vec{F}$  risulta parallela ad  $\vec{a}$  con la relazione:

$$F_{\perp} = m_0 \gamma a_{\perp}$$

La quantità  $m_{\perp} = m_0 \gamma$  è chiamata *massa trasversa*. Notiamo in questo caso che, poiché  $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ , risulta  $v^2$  costante e pertanto la massa trasversa è un invariante del moto. Come illustrazione delle leggi relativistiche di forza consideriamo il moto di una particella soggetta alla forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B})$$

nei due casi particolari di campo elettrico costante e campo magnetico costante.

Nel campo elettrico costante:

$$q\vec{E} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

e assumendo la velocità iniziale nella direzione del campo  $\vec{E}$

$$q \frac{E}{m_0} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{qE}{m_0} t + \frac{v_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \quad v_0 = v(t=0)$$

Scegliendo  $v_0 = 0$  otteniamo:

$$v = \frac{qE}{m_0} t \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{qEt}{m_0 c} \right)^2}}$$

e scegliendo  $x(t=0) = 0$  otteniamo:

$$x = \frac{m_0 c^2}{qE} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{qEt}{m_0 c} \right)^2} - 1 \right]$$

In un diagramma  $x-t$  questa equazione oraria è rappresentata da un'iperbole, e per questo motivo questo tipo di moto è detto *moto iperbolico*. Per  $\frac{qEt}{m_0} \ll c$  è facile ricavare il risultato classico:

$$x \simeq \frac{1}{2} \left( \frac{qE}{m_0} \right) t^2$$

Il caso di campo magnetico costante corrisponde alla situazione:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{v} &= 0 & \vec{a} \cdot \vec{v} &= 0 \\ q \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \end{aligned}$$

Il moto è elicoidale, esattamente come nel caso classico. Il raggio dell'elica è determinato dalla condizione di uguaglianza tra forza ed accelerazione centripeta, trattando la massa trasversa come una costante:

$$\frac{mv_{\perp}^2}{R} = \frac{q}{c} v_{\perp} B \quad R = \frac{mv_{\perp} c}{qB} = \frac{p_{\perp} c}{qB}$$

La frequenza di girazione è data da:

$$\omega = \frac{v_{\perp}}{R} = \frac{qB}{mc}$$

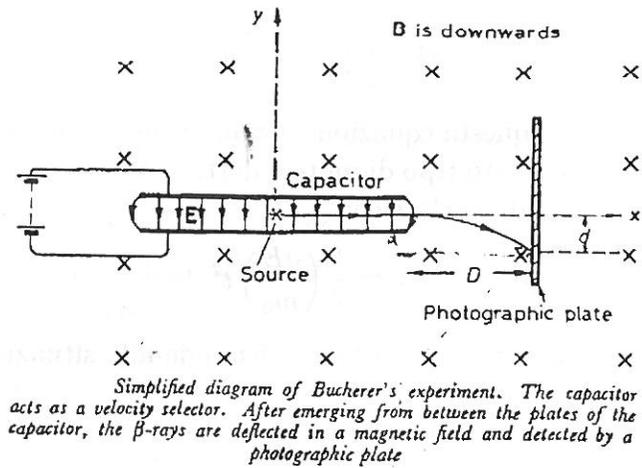
## 1.21 Verifiche della variazione di massa con la velocità

### 1.21.1 Esperienza di Bucherer

(*Annalen der Physik* 28 (1909) 513)

Elettroni dal decadimento  $\beta$  di particelle radioattive (radio) passano tra i piatti di un condensatore all'interno del quale c'è un campo  $\vec{E}$  perpendicolare al moto iniziale degli elettroni. Il condensatore agisce come selettore di

Figura 1.11: L'esperienza di Bucherer I



velocità, in quanto è immerso in un campo magnetico  $\vec{B}$  perpendicolare ad  $\vec{E}$  e al moto degli elettroni.

Soltanto gli elettroni dotati di velocità  $\frac{v}{c} = \frac{E}{B}$  essendo soggetti a forze uguali ed opposte non vengono deflessi ed escono dal condensatore. A questo punto il moto diventa circolare ed è possibile misurarne il raggio R.

Dalle relazioni tra raggio, massa (inerziale) e carica otteniamo:

$$\frac{e}{m} = \frac{E c^2}{R B^2}$$

L'analisi dei risultati è consistente con :

$$\frac{e}{m_0} = 1.7588196 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{Kg}^{-1} = 0.527281 \cdot 10^{18} \text{ esu} \cdot \text{gr}^{-1}$$

e con:  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Stiamo postulando l'invarianza di  $e$  (Maxwell).

Figura 1.12: L'esperienza di Bucherer II

BUCHERER'S RESULTS

$u/c$	$e/m (= u/rB)$ in coul/kg	$\frac{e}{m_0} (= \frac{e}{m \sqrt{1 - u^2/c^2}})$ in coul/kg
(Measured)	(Measured)	(Computed)
0.3173	$1.661 \times 10^{11}$	$1.752 \times 10^{11}$
0.3787	$1.630 \times 10^{11}$	$1.761 \times 10^{11}$
0.4281	$1.590 \times 10^{11}$	$1.760 \times 10^{11}$
0.5154	$1.511 \times 10^{11}$	$1.763 \times 10^{11}$
0.6870	$1.283 \times 10^{11}$	$1.767 \times 10^{11}$

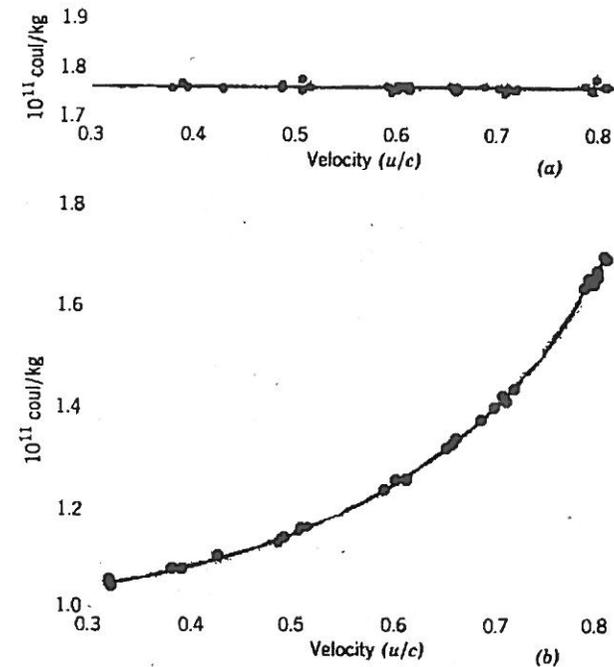
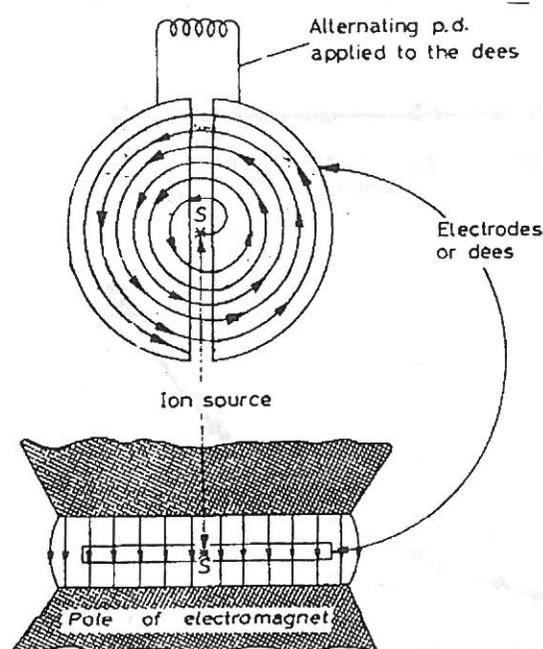


Fig. 3-4. Experimental verification of the relativistic mass formula. Experimental points are shown for  $u/c$  ranging from 0.32 to 0.82. (a) The ratio  $e/m_0 = e/m \sqrt{1 - u^2/c^2}$ . (b) The ratio  $m/m_0 = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ .

### 1.21.2 Accelerazione di particelle cariche - Il ciclotrone

La dipendenza  $m(v)$  é rilevante per il problema dell'accelerazione di particelle cariche. Il piú semplice acceleratore é il *ciclotrone* costituito da due cavitá semicircolari piatte poste tra i poli di un elettromagnete e separate da una regione nella quale é creato un campo elettrico, mentre all'interno delle cavitá (conduttrici) non c'è campo. Particelle cariche prodotte al centro del sistema, entrano nelle cavitá sotto la spinta di  $\vec{E}$ , compiono percorsi semicircolari per effetto di  $\vec{B}$  ed emergono nella regione intermedia nella quale  $\vec{E}$  nel frattempo é stato invertito.

Figura 1.13: Il ciclotrone



Pertanto le cariche vengono nuovamente accelerate e il loro moto complessivo é una spirale sempre piú larga percorsa con frequenza  $\omega = \frac{qB}{mc}$ . Poiché dopo ogni semiperiodo il modulo della velocità cambia,  $\omega$  non può essere assunta come costante, ma deve essere modulata come  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \omega_0$  dove  $\omega_0 =$

$\frac{qB}{m_0 c}$  se si vuole mantenere il moto in fase col cambiamento di segno di  $\vec{E}$ . La macchina che lavora modulando la frequenza si chiama *sincrociclotrone* (sincrotrone) e può arrivare ad accelerare elettroni fino ad energia di 400 MeV. Ricordiamo che l'unità di misura eV si ottiene dal prodotto della carica di un elettrone per la d.d.p. di 1 Volt e vale pertanto  $1 \text{ eV} = 1.602177 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ . In queste unità la massa a riposo dell'elettrone vale  $0.510999 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$ .

### 1.22 Leggi di trasformazione di massa, impulso ed energia

Consideriamo una particella la cui massa a riposo sia  $m_0$  e la cui velocità sia  $\vec{u}$  in SR ed  $\vec{u}'$  in SR', in moto con velocità  $\vec{v}$  rispetto a SR. Valgono le relazioni per la massa relativistica:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}}$$

ed inoltre abbiamo dimostrato la relazione :

$$\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma(v) \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c^2}\right)} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

Possiamo quindi stabilire la legge di trasformazione della massa relativistica per cambiamenti di SR:

$$m' = m \gamma(v) \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c^2}\right)$$

e l'inversa:

$$m = m' \gamma(v) \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2}\right)$$

Chiaramente questa relazione permette di ricavare immediatamente la legge di trasformazione relativistica dell'energia:

$$\mathcal{E}' = \gamma (\mathcal{E} - \vec{v} \cdot \vec{p})$$

Dalle definizioni, e dalle leggi di trasformazione delle velocità, si ricavano le leggi di trasformazione dell'impulso:

$$P'_x = m'u'_x = m\gamma \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c^2}\right) \left(\frac{u_x - v}{1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2}}\right) = m\gamma(u_x - v) = \gamma \left(P_x - \frac{v\mathcal{E}}{c^2}\right)$$

$$P'_y = m'u'_y = m\gamma \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c^2}\right) \frac{1}{\gamma} \left(\frac{u_y}{1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2}}\right) = mu_y = P_y \text{ e } P'_z = P_z$$

e le relazioni inverse si ottengono dal principio di relatività.

Notiamo che vale l'importante conseguenza:

$$\frac{\mathcal{E}'^2}{c^2} - P'^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - P^2 = m_0^2 c^2$$

Notiamo inoltre che le relazioni dedotte per le trasformazioni di Lorentz speciali sono del tutto analoghe alle corrispondenti relazioni per le trasformazioni delle coordinate.

La generalizzazione a trasformazioni di Lorentz generali è pertanto completamente equivalente come vedremo.

### 1.23 Leggi di trasformazione della forza

Le leggi di trasformazione della forza possono essere dedotte da quelle dell'impulso imponendo l'invarianza in forma delle equazioni del moto:

$$\vec{F}' = \frac{d\vec{P}'}{dt'} = \frac{d\vec{P}'}{dt} \frac{dt}{dt'}$$

dove  $\vec{P}'$  è funzione di  $(\vec{P}, \mathcal{E})$  e possiamo utilizzare le relazioni:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u} \quad \frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c^2}\right)}$$

Per trasformazioni di Lorentz speciali si ottiene:

$$F'_x = \frac{F_x - \frac{v}{c^2} \vec{u} \cdot \vec{F}}{1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2}} \quad F'_y = \frac{F_y}{\gamma \left(1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2}\right)} \quad F'_z = \frac{F_z}{\gamma \left(1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2}\right)}$$

In meccanica relativistica il concetto di forza non ha un significato indipendente dal sistema di riferimento.

Anche l'espressione della potenza ha una sua legge di trasformazione:

$$\vec{F}' \cdot \vec{u}' = \frac{\vec{F} \cdot \vec{u} - \vec{F} \cdot \vec{v}}{1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2}}$$

È interessante osservare che per una particella istantaneamente in quiete nel riferimento SR', poiché  $u' = 0$ , valgono le relazioni:

$$F_x = F'_x \quad F_y = \frac{1}{\gamma} F'_y \quad F_z = \frac{1}{\gamma} F'_z$$

E pertanto la forza nel riferimento di quiete istantanea è più grande che in un qualunque altro sistema di riferimento.

### 1.24 Formulazione covariante

È facile convincersi che i risultati precedenti possono essere formulati in maniera compatta e covariante introducendo la nozione di *quadrimpulso*:

$$\mathcal{P}^\mu = m_0 U^\mu$$

Le componenti del quadrimpulso sono  $(m_0 \gamma c, m_0 \gamma \vec{u})$  ovvero  $\mathcal{P}^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{P}\right)$  e vale l'invarianza del prodotto scalare:

$$\mathcal{P}_\mu \mathcal{P}^\mu = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m_0^2 c^2$$

e la legge di trasformazione dei vettori controvarianti:

$$\mathcal{P}'^\mu = A^\mu_\nu \mathcal{P}^\nu$$

Derivando rispetto al tempo proprio possiamo introdurre la nozione di *quadriforza*:

$$\mathcal{F}^\mu = \frac{d\mathcal{P}^\mu}{d\tau} = m_0 A^\mu$$

e per la rappresentazione in componenti si ottiene:

$$\mathcal{F}^\mu = \left(\gamma \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c}, \gamma \vec{F}\right)$$

Notiamo che la quarta componente dell'equazioni del moto ha la forma:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\mathcal{E}}{c} \right) = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathcal{E}}{c} \right) = \gamma \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c} \text{ ovvero } \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u}$$

e quindi esprime il teorema dell'energia.

Le leggi di trasformazione della forza si deducono dalle leggi di trasformazione della quadriforza:

$$\mathcal{F}'^\mu = A^\mu_\nu \mathcal{F}^\nu$$

Notiamo la fondamentale proprietà della quadriforza:

$$\mathcal{F}^\mu U_\mu = 0$$

Piú in generale, poiché vale:

$$\mathcal{F}^\mu U_\mu = c^2 \frac{dm_0}{d\tau}$$

si può estendere la nozione di forza ai sistemi a massa variabile.

## 1.25 Onde di De Broglie, particelle a massa nulla

Abbiamo visto che il quadrimpulso  $\mathcal{P}^\mu = \left( \frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{P} \right)$  e il quadrivettore d'onda  $K^\mu = \left( \frac{\nu}{c}, \frac{\nu \hat{n}}{w} \right)$  con  $w = \nu \lambda$  obbediscono alle stesse leggi di trasformazione. E' pertanto possibile da un punto di vista formale associare in maniera invariante all'impulso di una particella un vettore d'onda, detto *onda di De Broglie*, e generalizzare quindi alle particelle e ai loro impulsi le relazioni di Plank tra energia e frequenza di un quanto di luce  $\mathcal{E} = h\nu$ .

Stabiliamo la relazione:

$$\mathcal{P}^\mu = hK^\mu \quad h \text{ invariante relativistico}$$

da cui in componenti:

$$\mathcal{E} = h\nu \quad \vec{P} = h \frac{\nu}{w} \hat{n} = \frac{h}{\lambda} \hat{n}$$

Si ottengono da queste le fondamentali relazioni:

$$\lambda = \frac{h}{P} \quad w = \frac{\mathcal{E}}{P} = \frac{c^2}{v} \quad \text{velocità di fase}$$

Un caso limite particolarmente interessante é quello in cui il quadrivettore d'onda corrisponde ad un'onda elettromagnetica ovvero  $w = c$ . Inoltre poiché  $K_\mu K^\mu = 0$  risulta corrispondentemente  $\mathcal{P}_\mu \mathcal{P}^\mu = 0$ . Di conseguenza, nel quadro dell'interpretazione di De Broglie (e quindi nel quadro della meccanica quantistica), alla propagazione di un'onda elettromagnetica si può pensare associata la propagazione di una *particella a massa propria nulla* (fotoni che viaggiano necessariamente alla *velocità della luce*):

$$\mathcal{E} = Pc = h\nu$$

## 1.26 Equivalenza di massa ed energia

Come, in meccanica classica, la definizione di centro di massa di un sistema di particelle e l'analisi delle sue proprietà dinamiche, ci permettono di convincerci della fondatezza (consistenza) della nozione primitiva di *punto materiale*, allo stesso modo dobbiamo convincerci che é possibile definire in maniera consistente massa, energia e impulso di un sistema complesso (questo in quanto non possiamo definire "a priori" la natura "elementare" di un sistema).

In particolare dovremo convincerci che la relazione tra massa ed energia di una singola particella si generalizza:

- Ad includere l'energia cinetica interna di un sistema di particelle nella definizione di massa propria del sistema.
- Ad includere qualsiasi altro tipo di energia nella definizione stessa di massa propria.

Consideriamo dapprima un sistema di particelle libere e definiamo impulso ed energia tramite:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{P}^{(i)} \quad \mathcal{E} = \sum_{i=1}^n \mathcal{E}^{(i)}$$

Per linearità le proprietà di trasformazione di  $(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{P})$  sono quelle dei quadriimpulsi.

La legge di conservazione di  $(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{P})$  include tutti i processi di urto elastico.

Consideriamo l'invariante  $\frac{\mathcal{E}}{c} - \vec{P}^2$  e notiamo che, dalla relazione:

$$\frac{1}{c^2} \left( \sum_i \mathcal{E}^{(i)} \right)^2 \equiv \left( \sum_i \sqrt{\vec{P}^{2(i)} + m_0^{2(i)} c^2} \right)^2 \geq \left( \sum_i \vec{P}^{(i)} \right)^2 + \left( \sum_i m_0^{(i)} \right)^2 c^2$$

risulta:

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \vec{P}^2 \geq c^2 \left( \sum_i m_0^{(i)} \right)^2$$

Se pertanto assegniamo un valore  $\vec{v} = c^2 \frac{\vec{P}}{\mathcal{E}}$  alla velocità del centro di massa del sistema ed un valore:

$$M_0 = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \vec{P}^2} = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

alla massa propria del sistema, risulta  $M_0 \geq \sum_i m_0^{(i)}$

La richiesta di definire velocità e massa propria di un sistema di particelle in totale analogia con quanto fatto per una singola particella, ci forza ad assumere che la massa propria di un sistema è in generale maggiore della somma delle masse proprie delle sue parti, e la differenza  $M_0 - \sum_i m_0^{(i)}$ , che è l'energia cinetica interna del sistema, contribuisce alla massa inerziale dello stesso.

Passiamo ora a considerare il caso di una collisione completamente inelastica di due particelle (o di due sistemi). Per semplicità consideriamo particelle identiche di massa propria  $m_0$  e dotate di velocità uguali ed opposte  $\vec{u}_A = -\vec{u}_B$  nel riferimento SR in cui, collidendo, finiscono per trovarsi in quiete con la massa propria  $M_0$ , sulla quale per ora non facciamo ipotesi.

Nel riferimento SR' in moto con velocità  $\vec{v} = \vec{u}_A$  rispetto ad SR le velocità delle particelle prima dell'urto si otterranno dalle trasformazioni di Lorentz (per moti collineari):

$$\vec{u}'_A = 0 \quad \vec{u}'_B = \frac{\vec{u}_B - \vec{v}}{1 - \frac{\vec{u}_B \cdot \vec{v}}{c^2}}$$

mentre la velocità delle particelle composta dopo l'urto è  $-\vec{v}$ .

Le masse relativistiche delle particelle in SR' sono:

$$m'_A = m_0 \quad m'_B = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} = m_0 \frac{1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad M'_0 = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Vogliamo imporre la conservazione dell'impulso in SR', quindi:  $m'_B \vec{u}'_B = -M'_0 \vec{v}$  da cui si deduce  $M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  La massa a riposo della particella

composta risultante non è uguale alla somma delle massa a riposo delle particelle originarie, ma è maggiore in misura proporzionale all'energia cinetica presente prima della collisione e scomparsa a seguito della collisione stessa. Infatti  $M_0 = 2m(v)$ .

Vale quindi la *conservazione dell'energia totale*. Questa implica a sua volta la *conservazione della massa relativistica*.

Massa ed energia sono equivalenti: la relazione  $\mathcal{E} = Mc^2$  esprime il fattore di conversione tra le unità di misura dell'energia e le unità di misura della massa (inerziale). Se per un qualunque motivo cambia l'energia totale di un sistema, cambia anche la sua massa inerziale secondo la relazione:  $\Delta M = \frac{\Delta \mathcal{E}}{c^2}$ .

Notiamo che la variazione di energia può essere dovuta a qualsiasi causa: interazione con un campo esterno, assorbimento di calore (energia termica), emissione di energia sotto forma di radiazione.

## 1.27 Verifiche dell'equivalenza massa-energia

### 1.27.1 Energia di legame dei nuclei

I nuclei sono formati da protoni e neutroni tenuti insieme da forze attrattive. Sulla base di quanto detto, alla risultante energia potenziale negativa dovrebbe essere associata una "massa inerziale negativa" o difetto di massa:

$$\Delta m = Zm_H + (A - Z)m_n - M_{Z,A}$$

dove  $M_{Z,A}$  è la massa del nucleo di numero atomico  $Z$  e numero di nucleoni  $A$ ,  $m_H$  la massa del protone ed  $m_n$  la massa del neutrone.

Conservazione dell'energia:

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + m'_e c^2 \quad m'_e = \frac{m_e}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

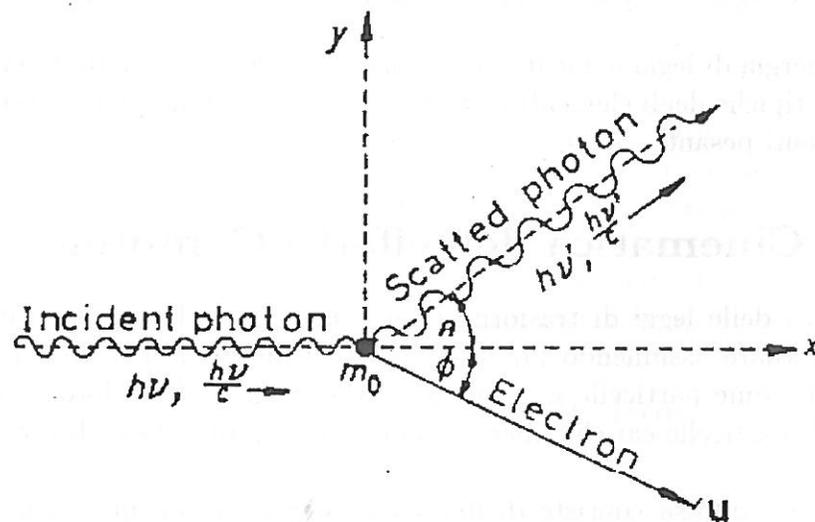
conservazione dell'impulso:

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + m'_e u \cos \phi$$

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \theta - m'_e u \sin \phi$$

dove  $\phi$  é l'angolo di rinculo dell'elettrone e  $u$  la sua velocità.

Figura 1.15: L'effetto Compton



*The Compton effect. A photon of energy  $h\nu$  and momentum  $h\nu/c$  is incident on a stationary electron of rest mass  $m_0$ . After collision a photon has energy  $h\nu'$  (which is less than  $h\nu$ ) and momentum  $h\nu'/c$ . The electron recoils with velocity  $u$*

Eliminando  $\phi$  che non é osservabile si ottiene un sistema di due equazioni nelle variabili  $\nu'$ ,  $\theta$ :

$$m_e'^2 u^2 = \left(\frac{h}{c}\right)^2 [\nu^2 - 2\nu\nu' \cos \theta + \nu'^2]$$

$$m_e'^2 c^2 = \left[\frac{h}{c}(\nu - \nu') + m_e c\right]^2$$

da cui introducendo le variabili  $\lambda = \frac{c}{\nu}$   $\lambda' = \frac{c}{\nu'}$  e risolvendo si ottiene la relazione:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad \frac{h}{m_e c} = .0242631 \text{ \AA} \quad 1 \text{ \AA} = 10^{-10} m$$

Questa dipendenza di  $\Delta\lambda$  dall'angolo  $\theta$  fu verificata sperimentalmente. N.B. anche fenomeni come l'aberrazione della luce stellare e l'effetto Doppler sono spiegati perfettamente dal modello fotonico.

## 1.29 Cinematica dei decadimenti

Quando particelle instabili decadono, in quiete o in moto, la dinamica dei processi di decadimento puó essere interpretata in termini delle leggi di conservazione (relativistiche) dell'impulso e dell'energia.

Il caso piú semplice é quello del decadimento a due corpi, per il quale gli esempi piú semplici sono:

$$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$$

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$$

$$K^\pm \rightarrow \pi^\pm + \pi^0$$

oltre a numerosi decadimenti (elettromagnetici e deboli) degli adroni piú pesanti.

In generale siano  $M, m_1$  ed  $m_2$  le masse a riposo della particella instabile e dei prodotti di decadimento. Nel riferimento di quiete di  $M, m_1$  ed  $m_2$  per la conservazione dell'impulso sono emessi con impulsi uguali ed opposti:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0$$

mentre per la conservazione dell'energia deve valere:

$$Mc^2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$$

e pertanto deve essere  $M \geq m_1 + m_2$ . Devono valere inoltre le relazioni:

$$\mathcal{E}_1 = c\sqrt{\vec{P}_1^2 + m_1^2 c^2} \quad \mathcal{E}_2 = c\sqrt{\vec{P}_2^2 + m_2^2 c^2}$$

E' facile risolvere il sistema di equazioni ottenendo:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} c^2 \quad \mathcal{E}_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M} c^2$$

Una semplice soluzione basata sull'uso dei quadri-vettori é la seguente:

$$P_A = P - P_B \Rightarrow P_A^2 = P^2 + P_B^2 - 2P_B \cdot P \Rightarrow 2P \cdot P_B = (M^2 + m_B^2 - m_A^2)c^2$$

ma nel riferimento in quiete  $P \cdot P_B = M\mathcal{E}_B$ .

Si dimostra anche che per il modulo dell'impulso nel riferimento di quiete vale:

$$|\vec{P}_1| = |\vec{P}_2| = \frac{Mc}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{m_1 + m_2}{M}\right) \left(1 - \frac{m_1 - m_2}{M}\right) \left(1 + \frac{m_1 + m_2}{M}\right) \left(1 + \frac{m_1 - m_2}{M}\right)}$$

Casi particolari interessanti sono:

1.  $m_1 = m_2 = 0$

In questo caso  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \frac{M}{2} c^2 = |\vec{P}| c$ .

Questa é la cinematica dei decadimenti di due fotoni ( $\pi_0$  parapositronio)

2.  $m_2 = 0$

In questo caso  $\mathcal{E}_1 = \frac{M^2 + m_1^2}{2M} c^2$   $\mathcal{E}_2 = \frac{M^2 - m_1^2}{2M} c^2 = |\vec{P}| c$ .

Questa é la cinematica dei decadimenti elettromagnetici con emissione di un fotone e dei decadimenti deboli con emissione di un neutrino.

3.  $m_1 = m_2$

In questo caso  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \frac{M}{2} c^2$  e  $|\vec{P}| = \frac{M}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} c$  da cui anche

$$|\vec{v}| = c^2 \frac{|P|}{\mathcal{E}} = c \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}}$$

Nel cosiddetto *riferimento del laboratorio* la particella che decade si muove con velocità  $\vec{v}$ . Le energie dei prodotti di decadimento sono legate ai valori nel riferimento di quiete da una trasformazione di Lorentz:

$$\mathcal{E}'_i = \gamma(\mathcal{E}_i + VP_i \cos \theta)$$

$$\gamma(\mathcal{E}_i - VP_i) \leq \mathcal{E}'_i \leq \gamma(\mathcal{E}_i + VP_i)$$

dove  $\cos \theta$  é l'angolo di emissione rispetto a  $\vec{V}$  nel riferimento in quiete.

Supponiamo che la *distribuzione* dei prodotti di decadimento sia *uniforme* ed *isotropa* nel riferimento di quiete e vale:

$$dN = \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2} d\cos \theta$$

Differenziando l'equazione di trasformazione si ottiene allora nel riferimento del laboratorio:

$$dN_L = \frac{1}{2\gamma V P_i} d\mathcal{E}'_i$$

ovvero che la distribuzione é *uniforme in energia*.

In generale la relazione tra  $d\mathcal{E}'_i$  e  $d\cos \theta'_i$  é molto complicata.

### 1.30 Cinematica della diffusione elastica

Viene adottata adesso la convenzione  $c = 1$ .

Il piú elementare processo d'urto é quello elastico a due corpi di masse  $m_1$  e  $m_2$ . Stiamo assumendo che valgano la conservazione dell'energia e dell'impulso, ed inoltre le masse a riposo delle due particelle non variano a seguito della collisione (elasticità).

In notazione covariante:

$$P_1 + P_2 = P'_1 + P'_2 \quad P_1^2 = P_1'^2 = m_1^2 \quad P_2^2 = P_2'^2 = m_2^2$$

In componenti vale:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2 \quad \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2$$

Possiamo introdurre il *riferimento del centro di massa*, in moto rispetto al laboratorio con velocità:

$$\vec{V}_c = \frac{\vec{P}_1 + \vec{P}_2}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2} \quad \gamma_c = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{\sqrt{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2 - (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)^2}}$$

La quantità:

$$\mathcal{E}_c = \sqrt{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2 - (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)^2} = \sqrt{(P_1 + P_2)^2}$$

è l'energia del centro di massa, ed è invariante di Lorentz.

Usando i quadri-vettori e le loro proprietà è possibile ottenere le espressioni invarianti delle grandezze misurate nel riferimento del centro di massa:

$$\mathcal{E}_{ic} = \frac{(P_1 + P_2) \cdot P_i}{\mathcal{E}_c} \quad |\vec{P}_{ic}| = \sqrt{\frac{[(P_1 + P_2) \cdot P_i]^2 - \mathcal{E}_c^2 m_i^2}{\mathcal{E}_c^2}}$$

da cui, in analogia con i risultati per il decadimento a due corpi, si ottiene:

$$\mathcal{E}_{1c} = \frac{\mathcal{E}_c^2 + m_1^2 - m_2^2}{2\mathcal{E}_c} \quad \mathcal{E}_{2c} = \frac{\mathcal{E}_c^2 + m_2^2 - m_1^2}{2\mathcal{E}_c}$$

$$|\vec{P}_{ic}| = \frac{\mathcal{E}_c}{2} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{m_1 + m_2}{\mathcal{E}_c}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{\mathcal{E}_c}\right)^2\right]}$$

Possiamo anche introdurre il riferimento del laboratorio, nel quale una delle particelle (es.  $m_2$ ) è ferma. Abbiamo, sempre usando gli invarianti, le seguenti relazioni:

$$\mathcal{E}_{1L} = \frac{P_1 \cdot P_2}{m_2} = \frac{m_1}{\sqrt{1 - V_{rel}^2}} \quad P_{1L} = \frac{\sqrt{(P_1 \cdot P_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{m_2}$$

$$V_{rel} = \sqrt{1 - \frac{m_1^2 m_2^2}{(P_1 P_2)^2}} = \frac{\sqrt{(\vec{V}_1 - \vec{V}_2)^2 - (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)^2}}{1 - \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}$$

Si ottengono le seguenti relazioni tra laboratorio e centro di massa:

$$\mathcal{E}_c = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2\mathcal{E}_{1L}m_2}$$

$$V_c = \frac{P_{1L}}{\mathcal{E}_{1L} + m_2} \quad \gamma_c = \frac{\mathcal{E}_{1L} + m_2}{\mathcal{E}_c}$$

$$\mathcal{E}_{1c} = \frac{m_1^2 + m_2 \mathcal{E}_{1L}}{\mathcal{E}_c} \quad \mathcal{E}_{2c} = \frac{m_2^2 + m_2 \mathcal{E}_{1L}}{\mathcal{E}_c} \quad |\vec{P}_{ic}| = \frac{m_2 P_{1L}}{\mathcal{E}_c}$$

Il processo di diffusione nel riferimento del centro di massa consiste semplicemente in un cambiamento di direzione degli impulsi, che restano uguali in modulo ed opposti in verso.

Nel riferimento del laboratorio energie ed impulsi finali si ottengono usando le equazioni invarianti:

$$m_1^2 + P_1 P_2 = P_1 P'_1 + P_2 P'_1 \quad m_2^2 + P_1 P_2 = P_2 P'_2 + P_1 P'_2$$

da cui si ricava:

$$\mathcal{E}'_{2L} = \frac{(\mathcal{E}_{1L} + m_2)^2 + P_{1L}^2 \cos^2 \theta_{2L}}{(\mathcal{E}_{1L} + m_2)^2 - P_{1L}^2 \cos^2 \theta_{2L}} m_2 \quad P'_{2L} = \frac{2(\mathcal{E}_{1L} + m_2)P_{1L} \cos \theta_{2L}}{(\mathcal{E}_{1L} + m_2)^2 - P_{1L}^2 \cos^2 \theta_{2L}} m_2$$

Analogamente si ottiene ( $\sin \theta_{1L} \leq \frac{m_2}{m_1}$ ):

$$\mathcal{E}'_{1L} = \frac{(\mathcal{E}_{1L} + m_2)(\mathcal{E}_{1L} m_2 + m_1^2) \pm P_{1L}^2 \cos \theta_{1L} \sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \theta_{1L}}}{(\mathcal{E}_{1L} + m_2)^2 - P_{1L}^2 \cos^2 \theta_{2L}}$$

$$P'_{1L} = \frac{P_{1L} \cos \theta_{1L} (\mathcal{E}_{1L} m_2 + m_1^2) \pm P_{1L} (\mathcal{E}_{1L} + m_2) \sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \theta_{1L}}}{(\mathcal{E}_{1L} + m_2)^2 - P_{1L}^2 \cos^2 \theta_{2L}}$$

### 1.31 Problemi d'urto: generalità

Notiamo innanzitutto che per il più generale processo d'urto la descrizione cinematica delle due particelle in collisione, nel riferimento del centro di massa e in quello del laboratorio, ripete la discussione del caso presentato sull'urto elastico. Il numero dei gradi di libertà dello stato finale dipende dal numero  $n$  di particelle prodotte, e tenendo conto delle relazioni tra energia ed impulso delle singole particelle e delle leggi di conservazione di impulso ed energia i gradi di libertà risulteranno essere  $3n - 4$ .

Il numero dei parametri necessari a descrivere la dinamica è tuttavia ridotto ulteriormente dall'invarianza per rotazioni intorno all'asse di collisione. In pratica quando le particelle prodotte sono due basterà specificare un angolo di diffusione. Nel caso di processi non elastici un parametro importante è la soglia di reazione:

$$\Delta M = \sum_{i=1}^n m^{(i)} - (m_1 + m_2)$$

dove  $m^{(i)}$  sono le masse delle  $n$  particelle finali. Se  $\Delta M > 0$  la reazione non avverrà fintanto che non ci sarà sufficiente energia cinetica a disposizione. La condizione perché ciò accada è semplicemente:

$$\mathcal{E}_c \geq m_1 + m_2 + \Delta M = \mathcal{E}_{th} \quad \text{energia di soglia}$$

Nel riferimento del laboratorio questo si traduce nella relazione:

$$\mathcal{E}_{1L}^{(th)} - m_1 = \Delta M \left[ 1 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{\Delta M}{2m_2} \right]$$

dove soltanto l'ultimo termine è puramente relativistico.

### 1.32 Terzo principio della dinamica e relatività

Consideriamo il caso più generale di due corpi materiali soggetti a mutua interazione.

Classicamente la conservazione dell'impulso discendeva in questo caso dal principio di azione e reazione. Tuttavia nel caso relativistico tutti i segnali hanno velocità di propagazione finita, pertanto l'affermazione che due corpi risentono di forze uguali e contrarie non può essere vera in tutti i sistemi di riferimento, per la relatività della simultaneità, ad eccezione del caso di forze di contatto (urti).

L' unica maniera corretta di uscire dal problema è quella di ammettere che tutte le interazioni a distanza tra particelle siano mediante dei campi che si propagano con velocità finita, cosicché l'interazione tra particelle e campo è *locale* e quindi avviene contemporaneamente in tutti i sistemi di riferimento. Così pure sono fenomeni locali le interazioni del campo con se stesso che ne producono la propagazione (onde).

Se ai campi associamo impulso ed energia (o meglio densità locali di impulso ed energia) siamo in grado di soddisfare le leggi di conservazione di energia ed impulso generalizzando tutti i risultati precedenti.

## Bibliografia

- [1] C. Møller. *The Theory of Relativity*, Oxford University Press, 1952.
- [2] W. G. V. Rosser. *An Introduction to the Theory of Relativity*, Butterworths, 1964.
- [3] R. Resnick. *Introduction to Special Relativity*, Wiley, 1968.
- [4] E. F. Taylor. & J.A. Wheeler. *Spacetime Physics*, Freeman, 1966.
- [5] R. Hagedorn. *Relativistic Kinematics*, Benjamin, 1964
- [6] L. Landau & E. Lifshitz. *Theorie des champs*, Mir 1970
- [7] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*, Wiley 1962