

Indice Generale

2 Elettromagnetismo	69
2.1 Relatività ed elettromagnetismo	69
2.2 Formulazione covariante dell'elettromagnetismo. Quadripotenziale e quadricorrente	74
2.3 Tensore campo elettromagnetico	78
2.4 Invarianti del campo elettromagnetico	79
2.5 Equazioni di Maxwell-Lorentz in forma covariante	80
2.6 Tensore energia-impulso del campo elettromagnetico	81
2.7 APPENDICE: Formulazione Lagrangiana e Hamiltoniana per particelle e campi elettromagnetici	83
2.8 Le equazioni di Maxwell nei mezzi omogenei	85
2.9 Onde elettromagnetiche	86
2.9.1 Onde piane come soluzioni dell'equazione di d'Alembert	87
2.10 Onde piane monocromatiche	88
2.11 Linearità e principio di sovrapposizione. Sviluppo in onde piane	89
2.12 Onde elettromagnetiche piane	90
2.13 Pressione di radiazione	91
2.14 Onde e.m. piane monocromatiche	92
2.15 Stati di polarizzazione di un'onda e.m. monocromatica	93
2.16 Ottica geometrica - Riflessione e rifrazione di onde piane	95
2.16.1 Formule di Fresnel	97
2.17 Coefficienti di riflessione e di trasmissione	100
2.18 Effetti di polarizzazione - Angolo di Brewster	101
2.19 Riflessione totale	102
2.20 Campi di cariche in movimento	103

2.20.1 Le equazioni del campo in presenza di sorgenti - Funzione di Green	103
2.21 Formula di Kirchoff	106
2.22 Potenziali ritardati	107
2.23 Potenziali di Liénard-Wiechert	108
2.24 Deduzione dei campi dai potenziali	109
2.25 Potenziali e campi di una carica in moto uniforme	110
2.26 APPENDICE : Deduzione covariante dei campi dai potenziali	112
2.27 Irraggiamento. Potenza emessa da una carica accelerata	113
2.28 Potenza emessa da una carica : formulazione relativistica	114
2.29 Irraggiamento di dipolo	115
2.30 Potenza dissipata da acceleratori lineari e circolari	117
2.31 Radiazione di sincrotrone	119
2.32 Radiazione di Čerenkov	123
2.33 Perdite di energia di particelle cariche	125
2.33.1 Perdite di energia per collisioni	125
2.33.2 Perdite di energia per radiazione di frenaggio - Bremsstrahlung	128
2.34 Metodo dei fotoni virtuali	132
2.35 Reazione di radiazione	134
2.36 Larghezza di riga	135
2.37 Diffusione ed assorbimento in un oscillatore forzato	136
2.38 Diffusione su un sistema di cariche	140
2.39 Dispersione e assorbimento	142
2.39.1 Dispersione di onde e.m. in un mezzo isolante (dielettrico)	142
2.39.2 Dispersione anomala ed assorbimento	144
2.39.3 Relazioni di dispersione	145

Indice delle Figure

2.1	Cariche in movimento	72
2.2	Campo di una carica in moto uniforme	73
2.3	Riflessione e rifrazione	96
2.4	Onda riflessa ed onda rifratta	97
2.5	Polarizzazione parallela	98
2.6	Polarizzazione perpendicolare	99
2.7	Angolo di Brewster	101
2.8	Carica puntiforme in moto	108
2.9	Carica puntiforme in moto uniforme	111
2.10	Irraggiamento da accelerazione longitudinale	116
2.11	Distribuzione angolare per particella relativistica	117
2.12	Densità spettrale differenziale in angolo	121
2.13	Densità spettrale in funzione della frequenza	122
2.14	Radiazione Čerenkov	123
2.15	Perdita di energia per collisioni	126
2.16	Spettro energetico della radiazione emessa per collisione	128
2.17	Radiazione nel sistema di laboratorio	130
2.18	Densità spettrale dei quanti virtuali	133
2.19	Sezione d'urto totale di un oscillatore	138
2.20	In prossimità di una riga di assorbimento	145
2.21	Cammino di integrazione	146

Capitolo 2

Elettromagnetismo

2.1 Relatività ed elettromagnetismo

La formulazione relativistica dell'elettromagnetismo è *naturale*, in quanto fin dal principio le leggi di trasformazione relativistiche dei SR sono state dedotte sotto l'ipotesi che le equazioni di Maxwell fossero preservate in forma, e che la *carica elettrica* fosse *invariante* per trasformazioni di coordinate.

L'ipotesi dell'invarianza della carica totale racchiusa in ogni volume assegnato è considerata un *postulato* supplementare dell'elettromagnetismo. Essa ha un'importanza cruciale ed è incorporata esplicitamente nelle equazioni di Maxwell. La miglior evidenza sperimentale della validità del postulato sta nella natura elettricamente neutra della materia aggregata, verificabile con grandissima precisione in fisica atomica. Poiché all'interno dell'atomo gli elettroni si muovono con velocità medie parecchio maggiori alle velocità dei protoni, se la carica dipendesse dalla velocità gli atomi non potrebbero essere costantemente neutri, come invece risultano.

Per quanto detto, le leggi di trasformazione dei campi elettromagnetici per cambiamenti di SR si potrebbero dedurre in maniera formale. È tuttavia illuminante per la comprensione fisica dei fenomeni invertire l'ordine storico delle derivazioni e mostrare come un certo numero di effetti "magnetici" (forze tra cariche in movimento) risulti come conseguenza delle trasformazioni di Lorentz associate all'applicazione della legge di Coulomb (Gauss) per la determinazione del campo elettrico generato da cariche ferme e dalla invarianza della carica totale.

Ricaviamo innanzitutto la legge di trasformazione dei campi dall'analisi del comportamento di un condensatore piano in movimento. Se il moto avviene in direzione ortogonale alle piastre, e pertanto parallelo alla direzione del campo elettrico, la superficie attraversata dal flusso di \vec{E} , essendo ortogonale a \vec{v} , resta invariante. Pertanto applicando la legge di Gauss si ottiene la relazione

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}$$

dove \vec{E}' è il campo in SR', riferimento di quiete delle cariche. Se il moto invece avviene in direzione parallela alle piastre, ed ortogonale al campo elettrico, la densità di carica in SR è maggiore della densità in SR', secondo la relazione

$$\sigma = \gamma \sigma'$$

Pertanto, applicando la legge di Gauss da $E = 4\pi\sigma$ si ottiene

$$\vec{E}_{\perp} = \gamma \vec{E}'_{\perp}$$

In questo secondo caso, se analizziamo la forza che si esercita tra i due piani per unità di superficie, ed imponiamo che la legge di trasformazione delle forze perpendicolari al moto si applichi, otteniamo, ricordando anche la trasformazione delle superficie:

$$F = \frac{1}{\gamma} F' \quad \frac{dF}{dA} = \gamma \left(\frac{1}{\gamma} \frac{dF'}{dA'} \right) = \frac{dF'}{dA'}$$

Ma ricordando la legge delle forze nei condensatori

$$\frac{dF'}{dA'} = 4\pi\sigma'^2 \quad \frac{dF}{dA} = 4\pi\sigma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

Possiamo interpretare questo risultato in SR, conformemente alla teoria dell'elettromagnetismo, ricordando che un piano di cariche in moto genera un campo magnetico \vec{B} tale che

$$\vec{B} = \vec{B}_{\perp} \quad |\vec{B}| = 4\pi\sigma \frac{v}{c}$$

Questo campo agisce sulla corrente passante per il secondo piano carico e, conformemente alle leggi di Coulomb e Ampere:

$$\left. \frac{dF}{dA} \right|_{el} = \sigma |\vec{E}| \quad \left. \frac{dF}{dA} \right|_{mag} = -\sigma \frac{v}{c} |\vec{B}|$$

si ottiene la relazione

$$\frac{dF}{dA} = 4\pi\sigma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

che mostra che \vec{B} è generato dalla trasformazione relativistica di \vec{E}' :

$$\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{E}$$

Possiamo anche considerare più in generale le forze tra cariche puntiformi in movimento.

Consideriamo in SR, all'istante $t = 0$, una carica q_1 collocata in \vec{x} e dotata di velocità \vec{u} ed una carica q_2 all'origine con velocità $\vec{v} = (v, 0, 0)$. In SR' all'istante $t' = -\gamma \frac{vx}{c^2}$, q_1 ha la posizione \vec{x}' e la velocità \vec{u}' (determinate dalle trasformazioni di Lorentz) mentre q_2 è ferma.

La forza esercitata da q_2 su q_1 in SR' è semplicemente

$$\vec{F}' = q_1 q_2 \frac{\vec{x}'}{|\vec{x}'|^3} \quad |\vec{x}'| = \sqrt{\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2}$$

Un esercizio basato sulle trasformazioni di Lorentz per posizioni, velocità e forze ci permette di convertire questa relazione nella legge di forza per il riferimento SR:

$$\begin{aligned} F_x &= \gamma \frac{q_1 q_2}{|\vec{x}'|^3} \left[x + \frac{v}{c^2} (y u_y + z u_z) \right] \\ F_y &= \gamma \frac{q_1 q_2}{|\vec{x}'|^3} y \left(1 - \frac{v u_x}{c^2} \right) \\ F_z &= \gamma \frac{q_1 q_2}{|\vec{x}'|^3} z \left(1 - \frac{v u_x}{c^2} \right) \end{aligned}$$

Interpretiamo questi risultati in termini di forza di Lorentz

$$\vec{F} = q_1 \left(\vec{E} + \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{B} \right)$$

ottenendo rispettivamente dalle tre componenti di \vec{F}

$$\begin{aligned} E_x &= \gamma \frac{q_2}{|\vec{x}'|^3} x & B_x &= \gamma \frac{q_2}{|\vec{x}'|^3} \frac{v}{c} y & B_y &= -\gamma \frac{q_2}{|\vec{x}'|^3} \frac{v}{c} z \\ E_y &= \gamma \frac{q_2}{|\vec{x}'|^3} y & B_y &= 0 & B_z &= \gamma \frac{q_2}{|\vec{x}'|^3} \frac{v}{c} y \\ E_z &= \gamma \frac{q_2}{|\vec{x}'|^3} z & B_z &= -\gamma \frac{q_2}{|\vec{x}'|^3} \frac{v}{c} z & B_x &= 0 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la relazione

$$\left(\partial^\rho F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial^\mu F^{\rho\nu}\right) F_{\rho\nu} = 0$$

che discende dalle equazioni di Maxwell omogenee.

Possiamo definire il *tensore degli sforzi di Maxwell* o *tensore energia-impulso elettromagnetico*

$$T^\mu{}_\rho = \frac{1}{4\pi} \left[F^{\mu\nu} F_{\nu\rho} + \frac{1}{4}\delta^\mu{}_\rho F^{\sigma\nu} F_{\sigma\nu} \right] \quad T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$$

che è un tensore simmetrico a traccia nulla: $T^\mu{}_\mu = 0$ e in termini del quale risulta:

$$f^\mu = -\partial_\nu T^\mu{}^\nu = -\partial_\rho T^{\mu\rho}$$

Studiamo le componenti di questo tensore:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{E^2+B^2}{8\pi} \\ T^{0i} &= \frac{S^i}{c} \quad \text{dove } \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \wedge \vec{B} \\ T^{ij} &= \frac{1}{4\pi} \left[-E_i E_j - B_i B_j + \frac{1}{2}\delta_{ij}(E^2 + B^2) \right] \end{aligned}$$

Scrivendo in componenti l'equazione per la quadriforza si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2+B^2}{8\pi} \right) + \text{div} \vec{S} + \vec{j} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{S^i}{c^2} + \partial_j T^{ij} + f^i &= 0 \end{aligned}$$

e integrando su tutto lo spazio, con l'ipotesi che i flussi si annullino all'infinito:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int dV \left(\frac{E^2+B^2}{8\pi} \right) + \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int dV \frac{S^i}{c^2} + \frac{d\vec{p}}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Possiamo interpretare queste equazioni come generalizzazioni dei *teoremi di conservazione di energia e impulso* a situazioni in cui sia presente un campo elettromagnetico, se definiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{e.m.} &= \int dV \left(\frac{E^2+B^2}{8\pi} \right) \\ \vec{P}_{e.m.} &= \int dV \frac{\vec{S}}{c^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{e.m.} &= \frac{E^2+B^2}{8\pi} \quad \text{densità di energia del campo e.m.} \\ \vec{p}_{e.m.} &= \frac{1}{c^2} \vec{S} \quad \text{densità di impulso del campo e.m., (vettore di Poynting } \vec{S}) \end{aligned}$$

\vec{S} è anche la *densità di flusso di energia* attraverso una superficie (energia che attraversa l'unità di superficie nell'unità di tempo).

In forma covariante, data una ipersuperficie di genere spazio dS_μ , possiamo definire il *quadrimpulso del campo e.m.*

$$P^\mu = \frac{1}{c} \int T^{\mu\nu} dS_\nu$$

N.B.: esiste un'ambiguità nella definizione di $T^{\mu\nu}$, che viene risolta imponendo che esista una rappresentazione del momento angolare del campo in termini del tensore energia-impulso anche a livello di densità locali, nel qual caso $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ e la forma che abbiamo determinato è unica.

2.7 APPENDICE: Formulazione Lagrangiana e Hamiltoniana per particelle e campi elettromagnetici

• Particella libera relativistica

Principio di minima azione:

$$\begin{aligned} S &= -m_0 c^2 \int_a^b d\tau \quad \text{unico invariante possibile} \\ &= -m_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}) dt \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}) &= -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ \vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} &= m_0 \gamma \vec{v} \quad \mathcal{E} = \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} = m_0 \gamma c^2 \end{aligned}$$

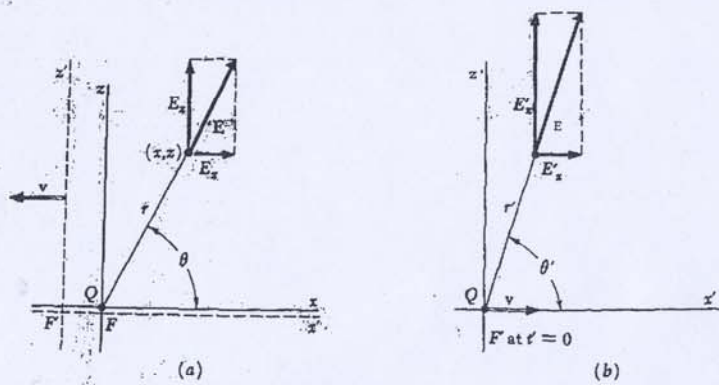
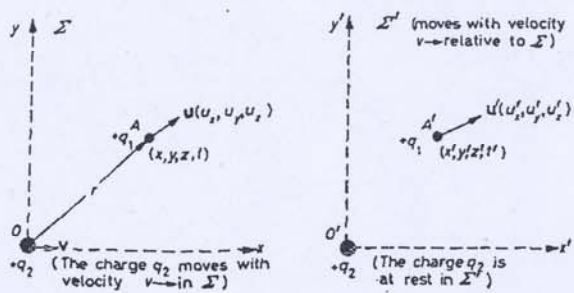
Nel formalismo quadridimensionale

$$p_\mu = -\partial_\mu S = m_0 U_\mu$$

e l'equazione di Hamilton-Jacobi ha la forma

$$\partial_\mu S \partial^\mu S = m_0^2 c^2$$

Figura 2.1: Cariche in movimento



Pertanto l'interpretazione è consistente se assumiamo le seguenti leggi per i campi generati da particelle cariche in movimento:

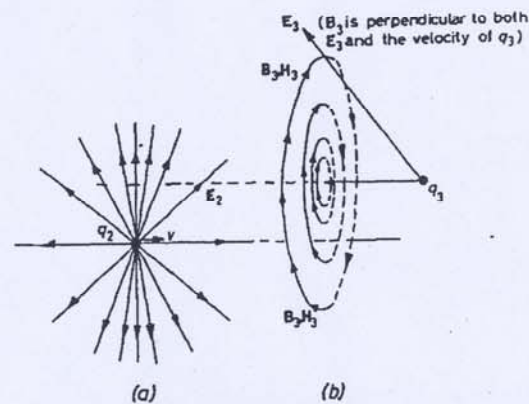
$$\vec{E} = \gamma \frac{q_2}{|\vec{x}|^3} \vec{x} \quad \vec{B} = \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{E}$$

Se richiamiamo la trasformazione delle coordinate $\gamma \vec{x} = \vec{x}'_{\parallel} + \gamma \vec{x}'_{\perp}$ otteniamo le trasformazioni relativistiche del campo di una carica puntiforme nella forma:

$$\vec{E}_{\parallel} \cong \vec{E}'_{\parallel} \quad \vec{E}_{\perp} = \gamma \vec{E}'_{\perp} \quad \vec{B} = \gamma \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{E}' = \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{E}$$

dove \vec{E}, \vec{B} sono i campi della carica in movimento ed \vec{E}' il campo della carica in quiete.

Figura 2.2: Campo di una carica in moto uniforme



2.2 Formulazione covariante dell'elettromagnetismo. Quadripotenziale e quadricorrente

Le relazioni di trasformazione che abbiamo trovato ci mostrano che i campi \vec{E} e \vec{H} non trasformano separatamente e non trasformano come le componenti spaziali di un quadrivettore.

Per formulare in maniera covariante le leggi della elettrodinamica risulta conveniente introdurre in primo luogo la nozione di quadripotenziale.

Scriviamo le equazioni di Maxwell:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned}$$

usando noti teoremi di calcolo differenziale, risolviamo la seconda equazione ponendo

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \vec{A} \text{ potenziale vettore}$$

per cui la terza equazione diventa

$$\operatorname{rot} \left[\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0$$

e può essere risolta da

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \Phi \text{ potenziale scalare}$$

Una fondamentale proprietà di questa parametrizzazione è l'invarianza di gauge.

Notiamo infatti che, sempre per i noti teoremi

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0 \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0$$

le seguenti trasformazioni di \vec{A} e Φ lasciano immutati \vec{E} , \vec{B}

$$\begin{aligned} \vec{A} &\rightarrow \vec{A} + \operatorname{grad} \Lambda \\ \Phi &\rightarrow \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \end{aligned}$$

dove Λ è una funzione scalare arbitraria delle coordinate e del tempo.

Sostituendo i potenziali nelle equazioni di Maxwell inomogenee e ricordando che $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta$ otteniamo

$$\begin{aligned} -\Delta \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} &= 4\pi\rho \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned}$$

ovvero con una semplice manipolazione, introducendo l'operatore d'Alembertiano $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ si ottiene

$$\begin{aligned} \square \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}) &= 4\pi\rho \\ \square \vec{A} + \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned}$$

Notiamo che l'invarianza di gauge ci permette di imporre una condizione locale (differenziale) sui potenziali \vec{A} e Φ .

In particolare scegliendo per Λ una soluzione dell'equazione

$$\square \Lambda^{(0)} = \operatorname{div} \vec{A}^{(0)} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial t}$$

le equazioni di Maxwell per i potenziali trasformati sono

$$\begin{aligned} \square \Phi &= 4\pi\rho \\ \square \vec{A} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned}$$

La condizione di gauge

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

si chiama *gauge di Lorentz*, e si mantiene per ogni Λ tale che $\square \Lambda = 0$

Studiamo le proprietà dell'operatore d'Alembertiano sotto trasformazioni di Lorentz.

È facile riconoscere, utilizzando la notazione covariante, che

$$\square \equiv \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \partial_\mu \partial^\mu$$

Pertanto sotto trasformazioni di Lorentz, poiché $\partial'_\mu = A^\nu{}_\mu \partial_\nu$ risulta

$$\eta^{\mu\nu} \partial'_\mu \partial'_\nu = \eta^{\mu\nu} A^{\mu'}{}_\mu \partial_{\mu'} A^{\nu'}{}_\nu \partial_{\nu'} = \eta^{\mu'\nu'} \partial_{\mu'} \partial_{\nu'}$$

e pertanto $\square' = \square$ e l'operatore d'Alembertiano é uno *scalare invariante di Lorentz*.

Studiamo le proprietà di trasformazione di ρ e \vec{j} per trasformazioni di Lorentz. Ricordiamo che la carica contenuta in un volume assegnato é invariante. Pertanto deve valere la relazione

$$\rho' d^3\vec{x}' = \rho d^3\vec{x}$$

Poiché sappiamo che $d^3\vec{x}' dt' = d^3\vec{x} dt$ ne consegue che ρ trasforma come dt , cioè come la coordinata temporale di un quadrivettore.

Per quanto riguarda la corrente, notiamo che

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = \rho \frac{d\vec{x}}{dt}$$

e poiché per quanto detto sopra ρ trasforma come $\frac{dt}{dt'}$ allora \vec{j} trasforma come $\frac{d\vec{x}}{dt'}$, ovvero come le componenti spaziali di un quadrivettore.

Possiamo pertanto introdurre il quadrivettore *quadr corrente*

$$j^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt} = \rho(c, \vec{v}) = (c\rho, \vec{j})$$

che rappresenta in forma covariante la densità di corrente e di carica elettrica.

É facile tradurre l'*equazione di continuità* (conservazione della carica elettrica) in una relazione covariante, notando che

$$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

diventa semplicemente

$$\frac{\partial}{\partial x^i} j^i + \frac{\partial}{\partial x^0} j^0 = \partial_\mu j^\mu = 0$$

L'annullamento di una quadridivergenza é la forma generale di un'equazione di conservazione in meccanica relativistica. Notiamo infatti che il teorema di Gauss in quattro dimensioni ha la forma

$$\int \partial_\mu V^\mu d^4x = \oint V^\mu dS_\mu$$

dove dS_μ é l'elemento di ipersuperficie di genere spazio.

Pertanto se $\partial_\mu V^\mu = 0$ allora $\int V^\mu dS_\mu = \text{costante}$

e in particolare scegliendo $dS_\mu = d^3\vec{x}$ si ha

$$\int V^0 d^3\vec{x} = \text{costante}$$

A questo punto, notando che nelle equazioni di Maxwell per i potenziali il d'Alembertiano é scalare e le sorgenti formano un quadrivettore, la covarianza di Lorentz porta alla necessaria conclusione che anche i potenziali formano un quadrivettore, il *quadripotenziale*

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A})$$

per il quale le equazioni prendono la *forma covariante*

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

mentre la condizione di *gauge di Lorentz* ha la forma

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

Piú in generale, prima di avere fissato la condizione di gauge, avremmo potuto scrivere, sempre in forma covariante

$$\square A_\mu - \partial_\mu(\partial^\nu A_\nu) \equiv \partial^\nu[\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu] = \frac{4\pi}{c} j_\mu$$

Questa rappresentazione permette di riconoscere facilmente la proprietà di *invarianza di gauge*, che in forma covariante diventa

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \Lambda$$

Inoltre, prendendo la quadridivergenza dei due termini dell'equazione, si vede che il lato sinistro si annulla identicamente e pertanto l'*equazione di continuità*

$$\partial^\mu j_\mu = 0$$

é consistente con le equazioni di Maxwell.

N.B. Se si fissa la condizione di gauge, l'equazione di continuità si dimostra consistente con la condizione di gauge, come é banale osservare nel caso della

gauge di Lorentz.

Le proprietà del quadripotenziale sotto trasformazioni di Lorentz sono quelle solite dei quadrivettori:

$$A'^{\mu} = A^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}$$

Già da questa espressione potremmo dedurre le leggi di trasformazione dei campi (\vec{E}, \vec{B})

2.3 Tensore campo elettromagnetico

Abbiamo visto che a partire dai quadripotenziali risulta naturale introdurre un tensore antisimmetrico

$$F'_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$$

invariante per trasformazioni di gauge, che chiameremo il *tensore campo elettromagnetico*.

Analizziamo le componenti di questo tensore in un SR arbitrario

$$F'_{0i} = -F'_{i0} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = E_i \quad F'_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = -\varepsilon_{ijk} B_k$$

Pertanto il tensore campo elettromagnetico è la quantità covariante le cui componenti sono i campi elettrico e magnetico.

Possiamo ricavare le equazioni di trasformazione dei campi elettromagnetici direttamente dalla forma tensoriale

$$F'_{\mu\nu} = A_{\mu}{}^{\mu'} A_{\nu}{}^{\nu'} F'_{\mu'\nu'}$$

Se come al solito fissiamo l'attenzione su una trasformazione di Lorentz speciale, otteniamo le relazioni

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & E'_y &= \gamma \left(E_y - \frac{v}{c} B_z \right) & E'_z &= \gamma \left(E_z + \frac{v}{c} B_y \right) \\ B'_x &= B_x & B'_y &= \gamma \left(B_y + \frac{v}{c} E_z \right) & B'_z &= \gamma \left(B_z - \frac{v}{c} E_y \right) \end{aligned}$$

In forma vettoriale compatta possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel} & \vec{E}'_{\perp} &= \gamma \left(\vec{E}_{\perp} + \frac{v}{c} \wedge \vec{B} \right) \\ \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel} & \vec{B}'_{\perp} &= \gamma \left(\vec{B}_{\perp} - \frac{v}{c} \wedge \vec{E} \right) \end{aligned}$$

Se esiste un SR' in cui risulta $\vec{B}' = 0$ allora in ogni altro SR vale la relazione (vera anche per cariche in moto uniforme):

$$\vec{B} = \frac{v}{c} \wedge \vec{E} \quad \vec{E}_{\perp} = \gamma \vec{E}'_{\perp}$$

Se esiste un SR' in cui risulta $\vec{E}' = 0$ allora in ogni altro SR vale la relazione:

$$\vec{E} = -\frac{v}{c} \wedge \vec{B} \quad \vec{B}_{\perp} = \gamma \vec{B}'_{\perp}$$

2.4 Invarianti del campo elettromagnetico

Come sempre in teorie relativistiche, le quantità invarianti per trasformazioni di Lorentz rivestono un ruolo particolare.

Introduciamo in primo luogo il *tensore completamente antisimmetrico* di Ricci-Levi Civita

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \quad \text{con la convenzione } \varepsilon^{0123} = 1$$

L'invarianza di $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ risulta dalla condizione sul determinante delle trasformazioni di Lorentz:

$$\varepsilon'_{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} A_{\mu}{}^{\mu'} A_{\nu}{}^{\nu'} A_{\rho}{}^{\rho'} A_{\sigma}{}^{\sigma'} = (\det A) \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

Possiamo definire il *tensore duale* di un tensore antisimmetrico

$$F^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \quad (F^*_{\mu\nu})^* = -F_{\mu\nu}$$

Posto $F_{\mu\nu} = (\vec{E}, \vec{B})$ risulta $F^*_{\mu\nu} = (\vec{B}, -\vec{E})$.

Gli *invarianti del campo* si ottengono considerando le contrazioni degli indici tensoriali:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) \\ F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu} &= -4\vec{B} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

Pertanto le quantità $\vec{B}^2 - \vec{E}^2$ e $\vec{B} \cdot \vec{E}$ sono invarianti di Lorentz. In particolare, se il modulo dei campi elettrico e magnetico è lo stesso in un SR, lo sarà in tutti i SR:

$$\vec{B}^2 - \vec{E}^2 = 0 \quad \text{invariante}$$

Se i campi \vec{E} e \vec{B} sono ortogonali in un SR, lo saranno in tutti i SR:

$$\vec{B} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{invariante}$$

e in particolare se $\vec{B} \cdot \vec{E} = 0$, $|\vec{E}| \neq |\vec{B}|$ sarà sempre possibile trovare un sistema di riferimento in cui il campo è puramente elettrico ($|\vec{E}| > |\vec{B}|$) o puramente magnetico ($|\vec{E}| < |\vec{B}|$)

È possibile dimostrare che non ci sono altri invarianti.
In particolare $\det(F_{\mu\nu}) = (\vec{B} \cdot \vec{E})^2$.

2.5 Equazioni di Maxwell-Lorentz in forma covariante

L'introduzione del tensore campo elettromagnetico permette di riformulare le equazioni di Maxwell direttamente in termini del campo e in forma covariante:

- equazioni omogenee

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad \text{ovvero } \partial_\mu F^{*\mu\nu} = 0$$

- equazioni non omogenee

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

È possibile trascrivere in notazione covariante anche l'espressione della forza di Lorentz:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B} \right)$$

Notiamo infatti che a partire dal tensore campo si può costruire un vettore quadriforza:

$$F_\mu = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} U^\nu$$

che soddisfa automaticamente, per l'antisimmetria di $F_{\mu\nu}$, la condizione di ortogonalità $F_\mu U^\mu = 0$.

Pertanto l'espressione covariante

$$\frac{dP_\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} U^\nu = \frac{q}{m_0 c} F_{\mu\nu} P^\nu$$

è consistente con la condizione di $P_\mu P^\mu = m_0^2 c^2$ ed ha componenti spaziali

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B} \right) \quad \text{forza di Lorentz}$$

e come componente temporale

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{v}$$

che esprime la legge di conservazione dell'energia in un campo elettromagnetico.

2.6 Tensore energia-impulso del campo elettromagnetico

Scriviamo l'espressione della forza di Lorentz per unità di volume, ovvero la forza agente su una densità di carica:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dV dt} &= \rho \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B} \right) = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \wedge \vec{B} \\ \frac{d\mathcal{E}}{dV dt} &= \rho \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{j} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

È possibile introdurre una densità covariante di quadriforza

$$\frac{dP^\mu}{d^4x} \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dV dt}, \frac{d\vec{p}}{dV dt} \right) = f^\mu \quad f^\mu = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu$$

Utilizzando le equazioni di Maxwell per esprimere la relazione tra correnti e campo otteniamo la seguente rappresentazione per la densità di quadriforza:

$$f^\mu = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \partial^\rho F_{\rho\nu} = \frac{1}{4\pi} \partial^\rho \left[F^{\mu\nu} F_{\rho\nu} - \frac{1}{4} \delta^\mu_\rho F^{\sigma\nu} F_{\sigma\nu} \right]$$



2.17 Coefficienti di riflessione e di trasmissione

Le relazioni di Fresnel ci permettono di determinare le ampiezze delle onde incidenti e riflesse. Se siamo interessati a valutare i flussi di energia dobbiamo ricorrere al vettore di Poynting, del quale occorre valutare la media della componente lungo z .

$$I_{(i)} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \bar{E}_{(i)}^2 \cos \theta_i = \frac{cn_1}{4\pi\mu_1} |A|^2 \cos \theta_i$$

$$I_{(r)} = \frac{cn_1}{4\pi\mu_1} |R|^2 \cos \theta_r$$

$$I_{(t)} = \frac{cn_2}{4\pi\mu_2} |T|^2 \cos \theta_t$$

Si possono definire i coefficienti di riflessione e di trasmissione

$$\mathcal{R} = \frac{I_{(r)}}{I_{(i)}} = \frac{|R|^2}{|A|^2} \quad \mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$$

$$\mathcal{T} = \frac{I_{(t)}}{I_{(i)}} = \frac{\mu_1 n_2 \cos \theta_t}{\mu_2 n_1 \cos \theta_i} \frac{|T|^2}{|A|^2}$$

Di nuovo separiamo i contributi delle componenti parallele ed ortogonali al piano di incidenza. Posto $\frac{A_{\perp}}{A_{\parallel}} = \tan \alpha_i$ si trova

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\parallel} \cos^2 \alpha_i + \mathcal{R}_{\perp} \sin^2 \alpha_i$$

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\parallel} \cos^2 \alpha_i + \mathcal{T}_{\perp} \sin^2 \alpha_i$$

e valgono le relazioni $\mathcal{R}_{\parallel} + \mathcal{T}_{\parallel} = 1$ $\mathcal{R}_{\perp} + \mathcal{T}_{\perp} = 1$. Dal calcolo risulta, nel limite $\mu_1 = \mu_2$

$$\mathcal{R}_{\parallel} = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_t)}{\tan^2(\theta_i + \theta_t)} \quad \mathcal{R}_{\perp} = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}$$

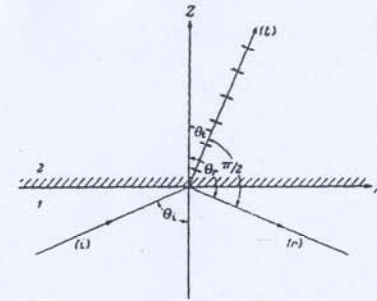
$$\mathcal{T}_{\parallel} = \frac{\sin 2\theta_i \sin 2\theta_t}{\sin^2(\theta_i + \theta_t) \cos^2(\theta_i - \theta_t)} \quad \mathcal{T}_{\perp} = \frac{\sin 2\theta_i \sin 2\theta_t}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}$$

Nel caso di incidenza normale abbiamo semplicemente

$$\mathcal{R} = \left(\frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1} \right)^2 \quad \mathcal{T} = \frac{4n_{12}}{(n_{12} + 1)^2}$$

Per $n_{12} \rightarrow 1$ $\theta_t \rightarrow \theta_i$ e correttamente $\mathcal{R} \rightarrow 0$, $\mathcal{T} \rightarrow 1$.

Figura 2.7: Angolo di Brewster



Illustrating the polarizing (Brewster's) angle.

2.18 Effetti di polarizzazione - Angolo di Brewster

Notiamo che poiché i coefficienti di riflessione e trasmissione sono differenti per polarizzazioni parallele od ortogonali al piano di incidenza, si avrà in generale un effetto sulla polarizzazione.

Quest'effetto è particolarmente evidente nel caso in cui $\tan(\theta_i + \theta_t) = \infty$, per cui risulta $\mathcal{R}_{\parallel} = 0$

Poiché questa condizione corrisponde a $\sin \theta_t = \cos \theta_i$ risulta così definito l'angolo di Brewster

$$\tan \theta_i^{(B)} = n_{12}$$

o angolo polarizzatore. Quando la luce incide secondo l'angolo di Brewster, nella componente riflessa è completamente assente la componente del campo elettrico parallela al piano di incidenza, ovvero la luce riflessa secondo l'angolo $\theta_i^{(B)}$ è polarizzata perpendicolarmente al piano di incidenza.

Una semplice interpretazione fisica si basa sul fatto che l'onda rifratta mette in vibrazione trasversale le cariche nel mezzo 2, e le cariche emettono trasversalmente, per cui non c'è flusso di radiazione nella direzione delle vibrazioni, che è appunto la direzione dell'onda riflessa: $\sin \theta_t = \cos \theta_i$.

Più in generale, il grado di polarizzazione dell'onda riflessa sarà misurato

dove abbiamo usato la relazione

$$\left(\partial^\rho F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial^\mu F^{\rho\nu}\right) F_{\rho\nu} = 0$$

che discende dalle equazioni di Maxwell omogenee.

Possiamo definire il *tensore degli sforzi di Maxwell* o *tensore energia-impulso elettromagnetico*

$$T^\mu{}_\rho = \frac{1}{4\pi} \left[F^{\mu\nu} F_{\rho\nu} + \frac{1}{4}\delta^\mu{}_\rho F^{\sigma\nu} F_{\sigma\nu} \right] \quad T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$$

che è un tensore simmetrico a traccia nulla: $T^\mu{}_\mu = 0$ e in termini del quale risulta:

$$f^\mu = -\partial_\nu T^\mu{}_\nu = -\partial_\rho T^{\mu\rho}$$

Studiamo le componenti di questo tensore:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{E^2+B^2}{8\pi} \\ T^{0i} &= \frac{S^i}{c} \quad \text{dove } \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \wedge \vec{B} \\ T^{ij} &= \frac{1}{4\pi} \left[-E_i E_j - B_i B_j + \frac{1}{2}\delta_{ij}(E^2 + B^2) \right] \end{aligned}$$

Scrivendo in componenti l'equazione per la quadriforza si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2+B^2}{8\pi} \right) + \text{div} \vec{S} + \vec{j} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{S^i}{c} + \partial_j T^{ij} + f^i &= 0 \end{aligned}$$

e integrando su tutto lo spazio, con l'ipotesi che i flussi si annullino all'infinito:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int dV \left(\frac{E^2+B^2}{8\pi} \right) + \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int dV \frac{S^i}{c} + \frac{d\vec{p}}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Possiamo interpretare queste equazioni come generalizzazioni dei *teoremi di conservazione di energia e impulso* a situazioni in cui sia presente un campo elettromagnetico, se definiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{e.m.} &= \int dV \left(\frac{E^2+B^2}{8\pi} \right) \\ \vec{P}_{e.m.} &= \int dV \frac{\vec{S}}{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{e.m.} &= \frac{E^2+B^2}{8\pi} \quad \text{densità di energia del campo e.m.} \\ \vec{p}_{e.m.} &= \frac{1}{c} \vec{S} \quad \text{densità di impulso del campo e.m., (vettore di Poynting } \vec{S}) \end{aligned}$$

\vec{S} è anche la *densità di flusso di energia* attraverso una superficie (energia che attraversa l'unità di superficie nell'unità di tempo).

In forma covariante, data una ipersuperficie di genere spazio dS_μ , possiamo definire il *quadrimpulso del campo e.m.*

$$P^\mu = \frac{1}{c} \int T^{\mu\nu} dS_\nu$$

N.B.: esiste un'ambiguità nella definizione di $T^{\mu\nu}$, che viene risolta imponendo che esista una rappresentazione del momento angolare del campo in termini del tensore energia-impulso anche a livello di densità locali, nel qual caso $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ e la forma che abbiamo determinato è unica.

2.7 APPENDICE: Formulazione Lagrangiana e Hamiltoniana per particelle e campi elettromagnetici

• Particella libera relativistica

Principio di minima azione:

$$\begin{aligned} S &= -m_0 c^2 \int_a^b d\tau \quad \text{unico invariante possibile} \\ &= -m_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}) dt \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}) &= -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ \vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} &= m_0 \gamma \vec{v} \quad \mathcal{E} = \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} = m_0 \gamma c^2 \end{aligned}$$

Nel formalismo quadridimensionale

$$p_\mu = -\partial_\mu S = m_0 U_\mu$$

e l'equazione di Hamilton-Jacobi ha la forma

$$\partial_\mu S \partial^\mu S = m_0^2 c^2$$

- Particella in un campo elettromagnetico

$$S = -m_0 c^2 \int_a^b d\tau - \frac{q}{c} \int_a^b A_\mu dx^\mu$$

da cui

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}, \vec{A}, \Phi) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - q\Phi$$

$$\vec{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = m_0 \gamma \vec{v} + \frac{q}{c} \vec{A} \quad \text{ovvero} \quad m_0 \gamma \vec{v} = \vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A}$$

$$\mathcal{H} = \vec{P} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} = m_0 \gamma c^2 + q\Phi \quad \text{ovvero} \quad m_0 \gamma c^2 = \mathcal{H} - q\Phi$$

da cui anche

$$\mathcal{H} = c \sqrt{\left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A}\right)^2 + m_0^2 c^2} + q\Phi$$

Nel formalismo quadridimensionale

$$\begin{aligned} P_\mu &= m_0 U_\mu + \frac{q}{c} A_\mu \\ (P_\mu - \frac{q}{c} A_\mu)^2 &= m_0^2 c^2 \end{aligned}$$

Dalle equazioni lagrangiane del moto si ricava l'espressione della forza di Lorentz:

$$m_0 \frac{dU_\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} U^\nu$$

- Lagrangiana del campo elettromagnetico

In una formulazione completamente covariante possiamo scrivere

$$\begin{aligned} S_{e.m.} &= -\frac{1}{16\pi c} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int dt \int dV (E^2 - B^2) \end{aligned}$$

Si può verificare che la variazione dell'azione totale

$$S = -m_0 c^2 \int d\tau - \frac{1}{c^2} \int d^4x A_\mu j^\mu - \frac{1}{16\pi c} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

produce non soltanto la forza di Lorentz ma anche le equazioni di Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

e che il tensore energia-impulso corrisponde alla definizione

$$T^{\mu\nu} = (\partial^\mu A^\rho) \frac{\partial \mathcal{L}_{e.m.}}{\partial (\partial_\nu A^\rho)} - \delta^{\mu\nu} \mathcal{L}_{e.m.} \quad \text{dove} \quad \mathcal{L}_{e.m.} = -\frac{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{16\pi}$$

dopo un'appropriata simmetrizzazione. A questo punto è anche possibile costruire il quadritensore momento angolare del campo elettromagnetico che, per $T^{\nu\mu} = T^{\mu\nu}$ è dato dall'espressione

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{c} \int (x^\mu T^{\nu\rho} - x^\nu T^{\mu\rho}) dS_\rho$$

2.8 Le equazioni di Maxwell nei mezzi omogenei

Consideriamo un mezzo omogeneo, non dispersivo, in quiete o in movimento molto lento rispetto alla velocità della luce. Possiamo allora introdurre i campi elettromagnetici nella materia definiti dalle relazioni

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \mu \vec{H} = \vec{B}$$

Le equazioni di Maxwell nei mezzi continui prendono la forma

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{D} &= 4\pi \rho & \text{div} \vec{B} &= 0 \\ \text{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 & \text{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned}$$

e continua a valere l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

È possibile generalizzare in maniera covariante queste relazioni al caso di mezzi in movimento.

La densità di energia del campo elettromagnetico diventa

$$\epsilon_{e.m.} = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{B}}{8\pi}$$

mentre il vettore di Poynting si generalizza a

$$S = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \wedge \vec{H}$$

cosicché vale la relazione

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Dalle equazioni di Maxwell nei mezzi continui, applicando il teorema di Gauss e il teorema della circuitazione, si ricavano le *condizioni al contorno* sui campi elettromagnetici per la transizione attraverso una *superficie di discontinuità*, che separa le regioni 1 e 2

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\parallel}^{(1)} &= \vec{E}_{\parallel}^{(2)} & \vec{B}_{\perp}^{(1)} &= \vec{B}_{\perp}^{(2)} \\ \vec{D}_{\perp}^{(1)} &= \vec{D}_{\perp}^{(2)} & \vec{H}_{\parallel}^{(1)} &= \vec{H}_{\parallel}^{(2)} \end{aligned}$$

(in assenza di cariche o correnti superficiali)

2.9 Onde elettromagnetiche

Le equazioni di Maxwell nei mezzi continui, in assenza di cariche libere e di correnti, prendono la forma:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 0 & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Possiamo anche ottenere la rappresentazione, valida per mezzi omogenei (non dispersivi) :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \operatorname{div} \vec{H} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

da cui anche, con semplici manipolazioni:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} + \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} &= 0 \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

e tramite la relazione $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta$

$$\frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \Delta \vec{H} = 0 \quad \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = 0$$

che é l'equazione di d'Alembert per la propagazione di *onde elettromagnetiche* in un mezzo continuo con velocità

$$w = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \quad \text{ovvero} \quad n = \sqrt{\varepsilon \mu}$$

La velocità w si determina, relativamente a c , grazie alla legge di rifrazione: dalla richiesta di continuità del fronte d'onda si ricava la condizione che le linee di intersezione di onda incidente e rifratta con la superficie di separazione dei mezzi viaggino alla stessa velocità

$$\frac{w_1}{\sin \theta_1} = \frac{w_2}{\sin \theta_2}$$

Ne segue la legge dei seni:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{w_1}{w_2} \equiv n_{12} \equiv \frac{n_2}{n_1}$$

e misurando n_{12} si ottengono le velocità.

2.9.1 Onde piane come soluzioni dell'equazione di d'Alembert

Ciascuna componente cartesiana del campo e.m. nel vuoto soddisfa l'equazione di d'Alembert:

$$\Delta f - \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Le più semplici soluzioni di questa equazione possono essere cercate nella forma $f(\vec{x}, t) = f(\vec{x} \cdot \hat{n}, t)$ dove \hat{n} é un versore arbitrario costante.

Risulta allora, posto $x = \vec{x} \cdot \hat{n}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

e introducendo le variabili $\xi = x - wt$ e $\eta = x + wt$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

La piú generale soluzione appartenente a questa classe é pertanto della forma

$$f(\vec{x}, t) = f_-(\xi) + f_+(\eta) = f_-(\vec{x} \cdot \hat{n} - wt) + f_+(\vec{x} \cdot \hat{n} + wt)$$

dove f_{\pm} sono funzioni arbitrarie di una sola variabile e rappresentano profili d'onda che si propagano inalterati con velocità $w\hat{n}$ e $-w\hat{n}$ rispettivamente assumendo valori costanti su ciascun piano ortogonale alla direzione \hat{n} : *onde piane*.

N. B. Un altro caso semplice interessante é quello delle *onde sferiche*: $f = f(r, t)$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) - \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(rf) = 0$$

$$f(r, t) = \frac{f_-(r - wt) + f_+(r + wt)}{r}$$

onde sferiche divergenti e convergenti.

2.10 Onde piane monocromatiche

Un caso particolare della soluzione generale precedente é quello in cui il campo in un punto dato é una funzione periodica del tempo:

$$f(\vec{x}, t) = |f_0| \cos \left[\omega \left(t - \frac{\vec{x} \cdot \hat{n}}{w} \right) + \delta \right] = \text{Re} \left\{ f_0 e^{i\omega \left(t - \frac{\vec{x} \cdot \hat{n}}{w} \right)} \right\}$$

Abbiamo introdotto tre parametri che caratterizzano questa soluzione:

$$\begin{array}{ll} \omega & \text{frequenza angolare} \\ |f_0| & \text{ampiezza} \\ \delta & \text{fase} \end{array}$$

Abbiamo le seguenti relazioni notevoli:

$$\begin{array}{llll} \nu & = & \frac{\omega}{2\pi} & \text{frequenza} \\ T & = & \frac{1}{\nu} & \text{periodo} \\ \lambda & = & wT = \frac{w}{\nu} = \frac{2\pi w}{\omega} & \text{lunghezza d'onda} \\ \vec{k} & = & \frac{\omega}{w} \hat{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{n} & \text{vettore d'onda} \end{array}$$

Notiamo che si può anche scrivere $|\vec{k}| = n \frac{\omega}{c}$ e piú in generale, in un mezzo dispersivo, $n = n(\omega)$.

Consideriamo ora un *pacchetto d'onde*, sovrapposizione di onde piane di differenti frequenze che viaggiano nella stessa direzione:

$$f(\vec{x}, t) = \int_0^{\infty} d\omega f_0(\omega) \exp i[\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}]$$

Supponendo che $f_0(\omega)$ sia una distribuzione stretta centrata intorno ad una frequenza $\tilde{\omega}$, i piani di fase costante si propagano con *velocità di fase*:

$$w_p = \frac{\tilde{\omega}}{k}$$

ma i piani di ampiezza costante (in particolare i piani di ampiezza massima) si propagano con *velocità di gruppo*:

$$w_g = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{\omega=\tilde{\omega}}$$

ricavata dalla condizione di massimo $t = \frac{\partial k}{\partial \omega} \hat{n} \cdot \vec{x}$.

2.11 Linearità e principio di sovrapposizione. Sviluppo in onde piane

La dipendenza delle equazioni di Maxwell dai campi e.m. é *lineare*: questo implica che la piú generale soluzione delle equazioni di Maxwell si ottiene come *sovrapposizione lineare* di soluzioni delle equazioni omogenee (piú eventualmente una soluzione particolare delle equazioni inomogenee, se siamo in presenza di sorgenti).

Possiamo utilizzare le *onde monocromatiche piane* come base nello spazio delle soluzioni; i teoremi dell'analisi di Fourier ci assicurano della completezza e dell'ortonormalizzabilità di questa base.

In generale in un mezzo dispersivo ($n = n(\omega)$) considerando sovrapposizioni di onde piane di differenti frequenze avremo differenti velocità di fase e quindi cambiamento della forma dei pacchetti d'onda. La velocità di propagazione dell'energia (velocità di gruppo) può anche essere molto diversa dalla velocità di fase.

Inoltre in un mezzo dissipativo si può avere un'attenuazione delle ampiezze dei pacchetti d'onda.

Notiamo la seguente proprietà dei pacchetti d'onda:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \bar{f}_0(k) \exp i[\omega(k)t - kx] & x &= \hat{n} \cdot \vec{x} \\ \bar{f}_0(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x, 0) \exp ikx \end{aligned}$$

Supponendo ora che il pacchetto abbia una distribuzione spaziale caratterizzata da una larghezza Δx (definita come deviazione quadratica media del valor medio di x per la distribuzione $|f(x, 0)|^2$) si può allora dimostrare che la distribuzione in impulso Δk , definita rispetto alla distribuzione $|\bar{f}_0(k)|^2$ obbedisce alla relazione

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$$

(relazione d'indeterminazione per i pacchetti d'onda)

Analogamente vale $\Delta t \Delta \omega \geq \frac{1}{2}$

2.12 Onde elettromagnetiche piane

Applicando i risultati precedenti alle equazioni per la propagazione di onde elettromagnetiche, otteniamo la classe di soluzioni corrispondenti ad onde piane dirette lungo \hat{n} :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}(\vec{x} \cdot \hat{n} - wt) \\ \vec{H} &= \vec{H}(\vec{x} \cdot \hat{n} - wt) \end{aligned}$$

Applicando operatori differenziali a questi campi, otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= -w \vec{E}' & \text{div } \vec{E} &= \hat{n} \cdot \vec{E}' & \text{rot } \vec{E} &= \hat{n} \wedge \vec{E}' \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= -w \vec{H}' & \text{div } \vec{H} &= \hat{n} \cdot \vec{H}' & \text{rot } \vec{H} &= \hat{n} \wedge \vec{H}' \end{aligned}$$

dove la differenziazione ' è intesa rispetto all'argomento ξ .

La sostituzione nelle equazioni di Maxwell porta alle relazioni:

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot \vec{E}' &= 0 & \hat{n} \cdot \vec{H}' &= 0 \\ \hat{n} \wedge \vec{E}' - \mu \frac{w}{c} \vec{H}' &= 0 & \hat{n} \wedge \vec{H}' - \epsilon \frac{w}{c} \vec{E}' &= 0 \end{aligned}$$

Trascurando la possibilità di un campo costante in tutto lo spazio queste relazioni possono essere integrate a dare

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \hat{n} \wedge \vec{H} & \vec{E} \cdot \hat{n} &= 0 \\ \vec{H} &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{n} \wedge \vec{E} & \vec{H} \cdot \hat{n} &= 0 \end{aligned}$$

Queste relazioni esprimono la *trasversalità* dei campi: \vec{E} e \vec{H} giacciono su un piano ortogonale alla direzione di propagazione e sono mutuamente ortogonali; inoltre

$$\sqrt{\mu} |\vec{H}| = \sqrt{\epsilon} |\vec{E}|$$

La densità di energia di un'onda piana soddisfa

$$\epsilon_{e.m.} = \frac{\epsilon}{4\pi} \vec{E}^2 = \frac{\mu}{4\pi} \vec{H}^2$$

mentre per il *vettore di Poynting* vale:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}| |\vec{H}| \hat{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \epsilon_{em} \hat{n} = w \epsilon_{em} \hat{n}$$

ovvero $\frac{S}{\epsilon_{em}} = \bar{w}$ velocità del flusso d'energia.

2.13 Pressione di radiazione

Un'importante applicazione del tensore energia-impulso di un'onda elettromagnetica piana è data dal calcolo della *pressione di radiazione*, ovvero della forza per unità di superficie che un'onda esercita incidendo su una parete (riflettente o assorbente).

La forza che agisce sull'unità di superficie è data dal flusso d'impulso che attraversa la superficie. Pertanto se T^{ij} sono le componenti spaziali del tensore energia-impulso, \hat{N} il vettore normale alla superficie ed \vec{f} la forza per unità di superficie vale la relazione

$$f^i = [T_{(i)}^{ij} + T_{(r)}^{ij}] N^j$$

dove (i) ed (j) indicano l'onda incidente e l'onda riflessa.

È facile convincersi che per un'onda piana propagante nel vuoto nella direzione \hat{n} valgono le relazioni

$$T^{00} = \frac{\vec{E}^2}{4\pi} = \epsilon_{e.m.} \quad T^{0i} = \epsilon_{e.m.} n^i \quad T^{ij} = \epsilon_{e.m.} n^i n^j$$

Risulta quindi

$$\vec{f} = \epsilon_{e.m.}^{(i)} \hat{n}^{(i)} (\hat{N} \cdot \hat{n}^{(i)}) + \epsilon_{e.m.}^{(r)} \hat{n}^{(r)} (\hat{N} \cdot \hat{n}^{(r)})$$

Ricordando la relazione tra angolo di incidenza ed angolo di riflessione $\hat{N} \cdot \hat{n}^{(i)} = -\hat{N} \cdot \hat{n}^{(r)} = \cos \theta$ e definendo il fattore di riflessione $R = \frac{\epsilon_{e.m.}^{(r)}}{\epsilon_{e.m.}^{(i)}}$ otteniamo

$$\begin{aligned} f_{\perp} &= \epsilon_{e.m.}^{(i)} (1 + R) \cos^2 \theta \\ f_{\parallel} &= \epsilon_{e.m.}^{(i)} (1 - R) \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

In particolare per onda incidente normalmente alla superficie e superficie perfettamente assorbente la pressione di radiazione é uguale alla densità di energia dell'onda.

2.14 Onde e.m. piane monocromatiche

Il caso dell'onda piana monocromatica é descritto da

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \text{Re}\{\vec{E}_0 \exp i[\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}]\} \\ \vec{H} &= \text{Re}\{\vec{H}_0 \exp i[\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}]\} \end{aligned}$$

con le relazioni

$$\begin{aligned} \vec{k} &= n(\omega) \frac{\omega}{c} \hat{n} \\ \epsilon \vec{E} &= -\frac{c}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{H} & \mu \vec{H} &= \frac{c}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} \\ \vec{k} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{k} \cdot \vec{H} &= 0 \end{aligned}$$

Si può anche introdurre il potenziale vettore, scegliendo la condizione di gauge $\Phi = 0$ e ponendo

$$\vec{A} = \text{Re}\{\vec{A}_0 \exp i[\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}]\}$$

da cui le relazioni

$$\vec{E}_0 = -i \frac{\omega}{c} \vec{A}_0 \quad \vec{H}_0 = -\frac{i}{\mu} \vec{k} \wedge \vec{A}_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{n} \wedge \vec{E}_0$$

Nel caso delle onde e.m. nel vuoto, vale $|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$. La combinazione $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$ non é altro che il prodotto scalare invariante $K_{\mu} x^{\mu}$, dove K^{μ} é il quadrivettore d'onda

$$K^{\mu} = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right) \quad K^{\mu} K_{\mu} = 0$$

e quest'ultima relazione discende subito dalla richiesta che

$$A^{\mu} = A_0^{\mu} \exp(+i K_{\nu} x^{\nu})$$

sia una soluzione dell'equazione delle onde

$$\partial_{\nu} \partial^{\nu} A^{\mu} = 0$$

N.B. : Si dimostra che l'ampiezza di un'onda piana monocromatica per trasformazioni di Lorentz trasforma come la frequenza:

$$\frac{|\vec{A}_0|}{\nu} = \frac{|\vec{A}'_0|}{\nu'}$$

e che anche l'energia totale di un treno d'onde trasforma allo stesso modo:

$$\frac{\epsilon_{e.m.}}{\nu} = \frac{\epsilon'_{e.m.}}{\nu'}$$

2.15 Stati di polarizzazione di un'onda e.m. monocromatica

Introduciamo nel piano ortogonale alla direzione di propagazione \hat{n} una coppia di versori mutuamente ortogonali \hat{e}_1, \hat{e}_2 che soddisfano

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 \cdot \hat{n} &= 0 & \hat{e}_2 \cdot \hat{n} &= 0 & \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 &= 0 \\ \hat{e}_2 &= \hat{n} \wedge \hat{e}_1 & \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 &= \hat{n} \end{aligned}$$

Una forma possibile per la soluzione generale che rappresenta un'onda piana monocromatica che propaga nella direzione $\hat{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ sará

$$\vec{E} = \text{Re}\{(\hat{e}_1 E_1 + \hat{e}_2 E_2) \exp i[\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}]\}$$

dove E_1 e E_2 sono numeri complessi arbitrari. Posto

$$e^{-2i\alpha} = \frac{E_1^2 + E_2^2}{|E_1^2 + E_2^2|}$$

$$e^{i\alpha} (\hat{e}_1 E_1 + \hat{e}_2 E_2) = \hat{e}'_1 E'_1 + i \hat{e}'_2 E'_2$$

dove E'_1 ed E'_2 sono per costruzione numeri reali, notiamo che quadrando l'ultima relazione si ottiene,

$$e^{2i\alpha}(E_1^2 + E_2^2) = |E_1^2 + E_2^2| = E_1'^2 - E_2'^2 + 2iE_1'E_2'\hat{e}_1' \cdot \hat{e}_2'$$

che implica l'ortogonalità dei nuovi versori :

$$\hat{e}_1' \cdot \hat{e}_2' = 0$$

Quindi la base primata è semplicemente una rotazione della base originaria nel piano ortogonale alla propagazione. Risulta allora

$$\vec{E} = \hat{e}_1'E_1' \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - \alpha) \pm \hat{e}_2'E_2' \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - \alpha)$$

Pertanto nel caso più generale $E'_1 \neq E'_2$ il vettore campo elettrico descrive un'ellisse nel piano perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda, con semiassi lungo \hat{e}_1' , \hat{e}_2' .

N.B. Alcuni utili corollari di questo risultato si ottengono ponendo $E_1 = |E_1|e^{i\delta_1}$, $E_2 = |E_2|e^{i\delta_2}$ e chiamando ψ l'angolo di rotazione tra gli assi (\hat{e}_1 , \hat{e}_2) e gli assi (\hat{e}_1' , \hat{e}_2'). Allora

$$\begin{aligned} |E_1|^2 + |E_2|^2 &= E_1'^2 + E_2'^2 \\ (|E_1|^2 - |E_2|^2) \tan 2\psi &= 2|E_1||E_2| \cos(\delta_1 - \delta_2) \\ \pm 2E_1'E_2' &= 2|E_1||E_2| \sin(\delta_1 - \delta_2) \end{aligned}$$

Un'onda di questo tipo si dice *polarizzata ellitticamente*.

Esistono alcuni casi particolari molto importanti. Quando $E'_1 = E'_2$, allora risulta anche $|E_1| = |E_2|$ e l'angolo ψ è arbitrario : l'onda si dice *polarizzata circolarmente*, con le convenzioni

$$\begin{aligned} \text{onda circolare destra} \quad \vec{E}_0 &\sim \hat{e}_1 + i\hat{e}_2 = e^{i\psi}(\hat{e}_1' + i\hat{e}_2') \\ \text{onda circolare sinistra} \quad \vec{E}_0 &\sim \hat{e}_1 - i\hat{e}_2 = e^{i\psi}(\hat{e}_1' - i\hat{e}_2') \end{aligned}$$

N.B. Usando onde polarizzate circolarmente descritte da pacchetti di estensione finita nelle direzioni perpendicolari al moto

$$\vec{E}(\vec{x}, t) \simeq [E_0(x, y)(\hat{e}_1 \pm i\hat{e}_2) + \frac{i}{k}(\frac{\partial E_0}{\partial x} \pm i\frac{\partial E_0}{\partial y})\hat{e}_3]e^{ikz - \omega t}$$

si può dimostrare che il *momento angolare* dei pacchetti d'onda,

$$\vec{l} = \frac{\vec{x}}{4\pi c} \wedge (\vec{E} \wedge \vec{H})$$

soddisfa la relazione

$$L_z = \pm \frac{\mathcal{E}_{e.m.}}{\omega}$$

ed è diretto lungo la direzione del moto (*elicità del fotone*).

Consideriamo infine il caso in cui solo una componente E' (per definitezza E'_1) è diversa da zero : in questo caso l'onda si dice *polarizzata linearmente*. Questo caso corrisponde a $\delta_1 = \delta_2 = -\alpha$ $\tan \psi = \frac{E_2}{E_1}$. La base per gli stati di polarizzazione lineare è (\hat{e}_1 , \hat{e}_2). Per gli stati di polarizzazione circolare si usa la base (\hat{e}_+ , \hat{e}_-) dove $\hat{e}_\pm = \hat{e}_1 \pm i\hat{e}_2$.

2.16 Ottica geometrica - Riflessione e rifrazione di onde piane

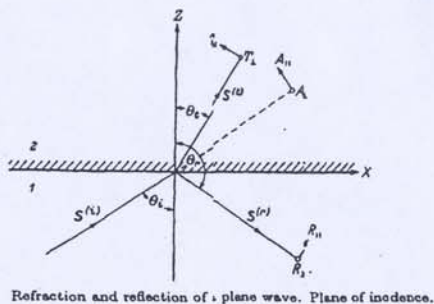
Quando un'onda piana arriva alla superficie di separazione di due mezzi omogenei dotati di proprietà ottiche differenti, si divide in due onde : *onda riflessa* (r) e *onda rifratta*, o trasmessa (t). L'esistenza di queste due onde, sperimentalmente ben nota, discende nella teoria elettromagnetica dalla necessità di soddisfare tutte le condizioni al contorno.

Possiamo separare l'analisi delle proprietà cinematiche, i.e. leggi degli angoli, dall'analisi delle proprietà dinamiche, ovvero dell'intensità di onda riflessa e rifratta e degli effetti su fase e polarizzazione. Mentre le proprietà cinematiche dipendono solo dalla natura ondulatoria del fenomeno, le proprietà dinamiche sono legate alla trasversalità dei campi delle onde e.m. e alla forma delle condizioni al contorno.

Definiamo la cinematica introducendo il piano definito dalla direzione di incidenza dell'onda $\vec{k}_{(i)}$ e dalla normale \hat{N} al piano di separazione dei due mezzi. Scegliamo \hat{N} lungo l'asse z e \vec{k} nel piano xz , *piano d'incidenza*. Risulta subito per simmetria che anche $\vec{k}_{(r)}$ e $\vec{k}_{(t)}$ si trovano nel piano d'incidenza. Posto

$$\vec{E}_{(i)} = \vec{E}_0^{(i)} e^{i(\omega t - \vec{k}^{(i)} \cdot \vec{x})} \quad \vec{H}_{(i)} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \frac{\vec{k}^{(i)}}{|\vec{k}^{(i)}|} \wedge \vec{E}^{(i)}$$

Figura 2.3: Riflessione e rifrazione



Refraction and reflection of a plane wave. Plane of incidence.

risulta

$$\vec{E}_{(r)} = \vec{E}_0^{(r)} e^{i(\omega t - \vec{k}^{(r)} \cdot \vec{x})} \quad \vec{H}_{(r)} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \frac{\vec{k}^{(r)}}{|\vec{k}^{(r)}|} \wedge \vec{E}_{(r)}$$

$$\vec{E}_{(t)} = \vec{E}_0^{(t)} e^{i(\omega t - \vec{k}^{(t)} \cdot \vec{x})} \quad \vec{H}_{(t)} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \frac{\vec{k}^{(t)}}{|\vec{k}^{(t)}|} \wedge \vec{E}_{(t)}$$

e valgono le relazioni

$$k^{(i)} = k^{(r)} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} = n_1 \frac{\omega}{c}$$

$$k^{(t)} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} = n_2 \frac{\omega}{c}$$

Le variazioni spaziali e temporali di tutti i campi devono essere le stesse sul piano di separazione dei due mezzi. Pertanto

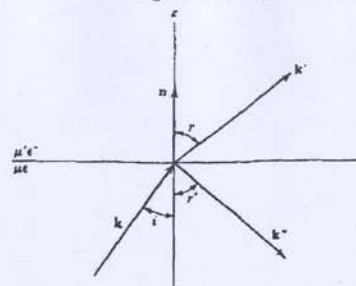
$$(\vec{k}^{(i)} \cdot \vec{x})_{z=0} = (\vec{k}^{(r)} \cdot \vec{x})_{z=0} = (\vec{k}^{(t)} \cdot \vec{x})_{z=0}$$

che conferma la complanarità dei tre vettori e permette di ricavare le relazioni cinematiche

$$k^{(i)} \sin \theta_i = k^{(r)} \sin \theta_r = k^{(t)} \sin \theta_t$$

Di conseguenza risultano le ben note leggi

Figura 2.4: Onda riflessa ed onda rifratta



Incident wave k strikes plane interface between different media, giving rise to a reflected wave k^r and a refracted wave k^t .

- $\sin \theta_i = \sin \theta_r \Rightarrow \theta_i = \theta_r$
- $\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{k^{(i)}}{k^{(t)}} = \frac{n_2}{n_1}$ legge di Snell

È fondamentale notare che nel caso in cui $n_2 > n_1$ ossia il primo mezzo è otticamente più denso, la rifrazione è possibile solo per $\sin \theta_i \leq n_{12}$. Per $\theta_i \geq \arcsin n_{12}$ si ha il fenomeno della *riflessione totale*.

2.16.1 Formule di Fresnel

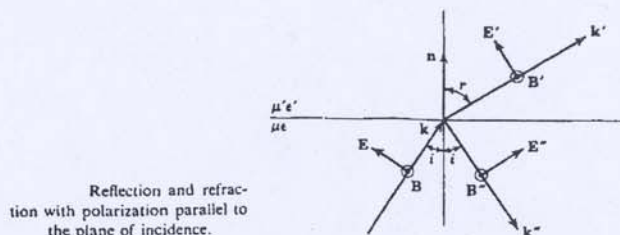
Per determinare la dinamica occorre imporre le condizioni alla frontiera. Conviene separare in ogni vettore le componenti parallele e normali al piano di incidenza, e scrivere quindi

$$E_x^{(i)} = -A_{\parallel} \cos \theta_i \quad E_y^{(i)} = A_{\perp} \quad E_z^{(i)} = A_{\parallel} \sin \theta_i$$

$$H_x^{(i)} = -A_{\perp} \cos \theta_i \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \quad H_y^{(i)} = -A_{\parallel} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \quad H_z^{(i)} = A_{\perp} \sin \theta_i \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}$$

e le formule corrispondenti per i campi riflessi e trasmessi.

Figura 2.5: Polarizzazione parallela



Reflection and refraction with polarization parallel to the plane of incidence.

Le condizioni alla frontiera richiedono la continuità delle componenti tangenziali di \vec{E} e \vec{H} , ovvero

$$\begin{aligned} E_x^{(i)} + E_x^{(r)} &= E_x^{(t)} & E_y^{(i)} + E_y^{(r)} &= E_y^{(t)} \\ H_x^{(i)} + H_x^{(r)} &= H_x^{(t)} & H_y^{(i)} + H_y^{(r)} &= H_y^{(t)} \end{aligned}$$

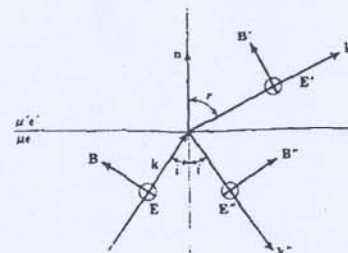
La condizione sulle componenti normali di \vec{B} e \vec{D} è automaticamente soddisfatta grazie alla legge di Snell. Per sostituzione diretta otteniamo

$$\begin{aligned} \cos \theta_i (A_{\parallel} - R_{\parallel}) &= \cos \theta_t T_{\parallel} \\ \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (A_{\parallel} + R_{\parallel}) &= \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} T_{\parallel} \\ \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (A_{\perp} - R_{\perp}) \cos \theta_i &= \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} T_{\perp} \cos \theta_t \\ A_{\perp} + R_{\perp} &= T_{\perp} \end{aligned}$$

Pertanto il comportamento delle componenti del campo ortogonali al piano di incidenza è indipendente dal comportamento delle componenti che giacciono nel piano di incidenza. Risolvendo si ottiene

$$R_{\parallel} = \frac{\mu_2 \sin 2\theta_i - \sin 2\theta_t}{\sin 2\theta_t + \mu_2 \sin 2\theta_i} A_{\parallel} \rightarrow \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} A_{\parallel}$$

Figura 2.6: Polarizzazione perpendicolare



Reflection and refraction with polarization perpendicular to the plane of incidence.

$$\begin{aligned} T_{\parallel} &= 2 \frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} \frac{\sin 2\theta_i}{\sin 2\theta_t + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sin 2\theta_i} A_{\parallel} \rightarrow \frac{2 \cos \theta_i \sin \theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} A_{\parallel} \\ R_{\perp} &= \frac{1 - \frac{\mu_1 \tan \theta_i}{\mu_2 \tan \theta_t}}{1 + \frac{\mu_1 \tan \theta_i}{\mu_2 \tan \theta_t}} A_{\perp} \rightarrow -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} A_{\perp} \\ T_{\perp} &= \frac{2}{1 + \frac{\mu_1 \tan \theta_i}{\mu_2 \tan \theta_t}} A_{\perp} \rightarrow \frac{2 \cos \theta_i \sin \theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t)} A_{\perp} \end{aligned}$$

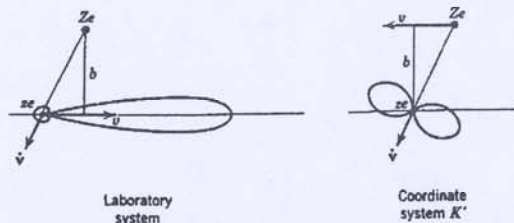
dove il limite è riferito al caso $\mu_1 = \mu_2$, e vale normalmente per le frequenze ottiche, per le quali $\mu_1 \approx \mu_2 \approx 1$.

Notiamo che nel caso di incidenza normale, per il quale non ha senso parlare di piano di incidenza, risultano in entrambi i casi (parallelo e ortogonale) le relazioni

$$\begin{aligned} |R| &= \frac{n_{12} \frac{\mu_1}{\mu_2} - 1}{n_{12} \frac{\mu_1}{\mu_2} + 1} A \rightarrow \frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1} A \\ |T| &= \frac{2}{n_{12} \frac{\mu_1}{\mu_2} + 1} A \rightarrow \frac{2}{n_{12} + 1} A \end{aligned}$$

N.B. la fase dell'onda trasmessa è sempre uguale a quella dell'onda incidente, mentre la fase dell'onda riflessa può differire di π .

Figura 2.17: Radiazione nel sistema di laboratorio



Radiation emitted during relativistic collisions viewed from the laboratory (nucleus at rest) and the frame K' (incident particle essentially at rest).

Possiamo definire una *sezione d'urto di radiazione*:

$$\chi(\omega) = \int I(\omega, b) 2\pi b db$$

e imponendo al solito $b_{min} \approx \frac{q_1 q_2}{Mv^2}$ $b_{max} \approx \frac{v}{\omega}$ otteniamo:

$$\chi(\omega) = \frac{16}{3} \left(\frac{q_1^2}{Mc^2} \right)^2 \frac{q_2^2}{c} \left(\frac{c}{v} \right)^2 \ln \frac{\lambda M v^3}{q_1 q_2 \omega} \quad \lambda \approx 1.123 = 2e^{-\gamma_B}$$

e la condizione $b_{max} > b_{min}$ impone, nel caso classico, un limite alla frequenza:

$$(\omega_{max})^{cl} \sim \frac{Mv^3}{q_1 q_2}$$

L'estensione al caso quantistico si ottiene al solito ponendo $b_{min} = \frac{\hbar}{Mv}$ ed ottenendo:

$$\chi(\omega) = \frac{16}{3} \left(\frac{q_1^2}{Mc^2} \right)^2 \frac{q_2^2}{c} \left(\frac{c}{v} \right)^2 \ln \frac{\lambda M v^3}{\hbar \omega}$$

da cui anche $(\omega_{max})^q \sim \frac{Mv^2}{\hbar}$.

In realtà dalla conservazione dell'energia risulta $\omega_{max} = \frac{Mv^2}{2\hbar}$.

Un calcolo quantistico più raffinato che tiene conto automaticamente della conservazione dell'energia porta alla *formula di Bethe-Heitler*:

$$\chi(\omega) = \frac{16}{3} \left(\frac{q_1^2}{Mc^2} \right)^2 \frac{q_2^2}{c} \left(\frac{c}{v} \right)^2 \ln \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2} M v^2} + \sqrt{\frac{1}{2} M v^2 - \hbar \omega} \right)^2}{\hbar \omega}$$

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{16}{3} N \left(\frac{q_2^2}{\hbar c} \right) \frac{Z^4 e^4}{Mc^2}$$

trascurabile rispetto alle perdite per collisione per $v \ll c$: $O(\alpha = \frac{e^2}{\hbar c})$, (calcolato per nuclei $q_2 = Z'e$).

Effetti relativistici: il calcolo può essere effettuato nel SR' in cui la particella incidente è ferma e i nuclei si muovono verso di essa con velocità $v \approx c$. In questo SR' il processo radiativo può essere trattato non relativisticamente, con la sola specifica $b_{max} \approx \frac{v}{\omega'}$.

Pertanto:

$$\chi'(\omega') = \frac{16}{3} \left(\frac{q_1^2}{Mc^2} \right)^2 \frac{q_2^2}{c} \left(\frac{c}{v} \right)^2 \ln \frac{\lambda \gamma M v^2}{\hbar \omega'}$$

La sezione d'urto di radiazione è un invariante di Lorentz $\chi(\omega) = \chi'(\omega')$ per cui basta conoscere la relazione Doppler relativistica:

$$\omega = \gamma \omega' \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta' \right)$$

e sfruttando la simmetria intorno a $\theta' = \frac{\pi}{2}$ in SR' dovuta alla trasversalità dell'accelerazione in SR' , otteniamo $\omega = \gamma \omega'$:

$$\chi(\omega) = \frac{16}{3} \left(\frac{q_1^2}{Mc^2} \right)^2 \frac{q_2^2}{c} \left(\frac{c}{v} \right)^2 \ln \frac{\lambda \gamma^2 M v^2}{\hbar \omega} \quad 0 < \omega < (\gamma - 1) \frac{Mc^2}{\hbar} \sim \gamma \frac{Mc^2}{\hbar}$$

Se adesso andiamo a calcolare la perdita di energia per radiazione di frenaggio nel limite $v \rightarrow c$, anche tenendo conto dello schermaggio elettronico del nucleo, otteniamo:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{16}{3} N \left(\frac{q_2^2}{\hbar c} \right) \frac{Z^4 e^4}{Mc^2} \ln \left(\frac{192 \lambda M}{m_e (Z')^{\frac{1}{3}}} \right) \gamma \quad q_2 = Z'e$$

2.17 Coefficienti di riflessione e di trasmissione

Le relazioni di Fresnel ci permettono di determinare le ampiezze delle onde incidenti e riflesse. Se siamo interessati a valutare i flussi di energia dobbiamo ricorrere al vettore di Poynting, del quale occorre valutare la media della componente lungo z .

$$I_{(i)} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \bar{E}_{(i)}^2 \cos \theta_i = \frac{cn_1}{4\pi\mu_1} |A|^2 \cos \theta_i$$

$$I_{(r)} = \frac{cn_1}{4\pi\mu_1} |R|^2 \cos \theta_r$$

$$I_{(t)} = \frac{cn_2}{4\pi\mu_2} |T|^2 \cos \theta_t$$

Si possono definire i coefficienti di riflessione e di trasmissione

$$\mathcal{R} = \frac{I_{(r)}}{I_{(i)}} = \frac{|R|^2}{|A|^2} \quad \mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$$

$$\mathcal{T} = \frac{I_{(t)}}{I_{(i)}} = \frac{\mu_1 n_2 \cos \theta_t}{\mu_2 n_1 \cos \theta_i} \frac{|T|^2}{|A|^2}$$

Di nuovo separiamo i contributi delle componenti parallele ed ortogonali al piano di incidenza. Posto $\frac{A_{\parallel}}{A} = \tan \alpha_i$ si trova

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\parallel} \cos^2 \alpha_i + \mathcal{R}_{\perp} \sin^2 \alpha_i$$

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\parallel} \cos^2 \alpha_i + \mathcal{T}_{\perp} \sin^2 \alpha_i$$

e valgono le relazioni $\mathcal{R}_{\parallel} + \mathcal{T}_{\parallel} = 1$ $\mathcal{R}_{\perp} + \mathcal{T}_{\perp} = 1$. Dal calcolo risulta, nel limite $\mu_1 = \mu_2$

$$\mathcal{R}_{\parallel} = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_t)}{\tan^2(\theta_i + \theta_t)} \quad \mathcal{R}_{\perp} = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}$$

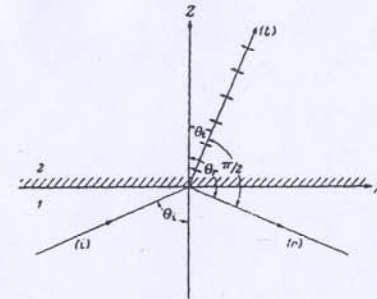
$$\mathcal{T}_{\parallel} = \frac{\sin 2\theta_i \sin 2\theta_t}{\sin^2(\theta_i + \theta_t) \cos^2(\theta_i - \theta_t)} \quad \mathcal{T}_{\perp} = \frac{\sin 2\theta_i \sin 2\theta_t}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}$$

Nel caso di incidenza normale abbiamo semplicemente

$$\mathcal{R} = \left(\frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1} \right)^2 \quad \mathcal{T} = \frac{4n_{12}}{(n_{12} + 1)^2}$$

Per $n_{12} \rightarrow 1$ $\theta_t \rightarrow \theta_i$ e correttamente $\mathcal{R} \rightarrow 0$, $\mathcal{T} \rightarrow 1$.

Figura 2.7: Angolo di Brewster



Illustrating the polarizing (Brewster's) angle.

2.18 Effetti di polarizzazione - Angolo di Brewster

Notiamo che poiché i coefficienti di riflessione e trasmissione sono differenti per polarizzazioni parallele od ortogonali al piano di incidenza, si avrà in generale un effetto sulla polarizzazione.

Quest'effetto è particolarmente evidente nel caso in cui $\tan(\theta_i + \theta_t) = \infty$, per cui risulta $\mathcal{R}_{\parallel} = 0$

Poiché questa condizione corrisponde a $\sin \theta_t = \cos \theta_i$ risulta così definito l'angolo di Brewster

$$\tan \theta_i^{(B)} = n_{12}$$

o angolo polarizzatore. Quando la luce incide secondo l'angolo di Brewster, nella componente riflessa è completamente assente la componente del campo elettrico parallela al piano di incidenza, ovvero la luce riflessa secondo l'angolo $\theta_i^{(B)}$ è polarizzata perpendicolarmente al piano di incidenza.

Una semplice interpretazione fisica si basa sul fatto che l'onda rifratta mette in vibrazione trasversale le cariche nel mezzo 2, e le cariche emettono trasversalmente, per cui non c'è flusso di radiazione nella direzione delle vibrazioni, che è appunto la direzione dell'onda riflessa: $\sin \theta_t = \cos \theta_i$.

Più in generale, il grado di polarizzazione dell'onda riflessa sarà misurato

da

$$P = \frac{\mathcal{R}_{\parallel} - \mathcal{R}_{\perp}}{\mathcal{R}_{\parallel} + \mathcal{R}_{\perp}}$$

e dipenderá dall'angolo di incidenza dell'onda e.m..

Questo fenomeno é alla base della realizzazione dei piú elementari *polarizzatori* (doppia rifrazione in cristalli di calcite o quarzo).

2.19 Riflessione totale

Discutiamo il caso in cui $n_1 > n_2$ e $\sin \theta_i \geq n_{12}$. In tal caso, secondo la legge di Snell, non ci può essere onda rifratta: *riflessione totale*

Se consideriamo la formula per il coseno dell'angolo di trasmissione troviamo

$$\cos \theta_t = i \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{n_{12}^2} - 1}$$

e sostituendo nel fattore di fase dell'onda piana risulta

$$\exp i[\omega t - \vec{k}^{(t)} \cdot \vec{x}] = \exp i[\omega t - \frac{\omega x}{n_2 w_2} \sin \theta_i] \exp(-\frac{\omega z}{w_2} \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{n_{12}^2} - 1})$$

e quest'espressione corrisponde ad un'onda che propaga lungo la superficie di separazione dei due mezzi (nella direzione x) attenuandosi esponenzialmente in funzione della distanza z dalla superficie (*onda evanescente*).

L'ordine di grandezza della penetrazione é $\frac{\omega}{w_2} = \frac{\lambda_2}{2\pi}$, ovvero l'ordine di una lunghezza d'onda.

Si può calcolare la media temporale della componente normale del vettore di Poynting all'interno del mezzo 2 e trovare che essa vale zero. Pertanto $\mathcal{R}_{\parallel} = \mathcal{R}_{\perp} = 1$ $\mathcal{T}_{\parallel} = \mathcal{T}_{\perp} = 0$. Il calcolo può essere effettuato anche a partire dalle relazioni di Fresnel, che si riducono a

$$R_{\parallel} = A_{\parallel} e^{i\delta_{\parallel}} \quad R_{\perp} = A_{\perp} e^{i\delta_{\perp}}$$

Nel caso di riflessione totale le fasi delle componenti della luce riflessa cambiano in maniera differente. Pertanto in generale per riflessione totale luce polarizzata linearmente diventa polarizzata ellitticamente. In particolare sfruttando una doppia riflessione totale si può ottenere luce polarizzata circolarmente (*rombo di Fresnel*).

2.20 Campi di cariche in movimento

2.20.1 Le equazioni del campo in presenza di sorgenti - Funzione di Green

Finora abbiamo considerato le equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti, ovvero la *propagazione* di onde elettromagnetiche. La *produzione* di onde elettromagnetiche, invece, é legata alla presenza di cariche accelerate in qualche punto dello spazio (per invarianza di Lorentz cariche in moto rettilineo uniforme possono produrre solo campi trasformati di campi statici).

Abbiamo visto che le equazioni di Maxwell per i potenziali in presenza di sorgenti prendono la forma:

$$\begin{aligned} -\Delta \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{A}) &= 4\pi \rho \\ \square \vec{A} + \text{grad}(\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned}$$

Introduciamo una nuova condizione di gauge, la *gauge di Coulomb* o *gauge trasversa*:

$$\text{div} \vec{A} = 0$$

In questa gauge la prima equazione si riduce a

$$-\Delta \Phi = 4\pi \rho$$

e ne conosciamo la *soluzione* nella forma

$$\Phi(\vec{x}, t) = \int \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 \vec{x}'$$

(*potenziale di Coulomb istantaneo* dovuto alla densità di carica $\rho(\vec{x}, t)$).

Dalla soluzione, usando l'equazione di continuità, otteniamo

$$\text{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\text{grad} \int \frac{\text{div}' \vec{j}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 \vec{x}'$$

Possiamo decomporre la corrente in parte longitudinale e parte trasversa:

$$\vec{j} = \vec{j}_l + \vec{j}_t$$

$$\text{rot } \vec{j}_i = 0 \quad \text{div } \vec{j}_i = 0$$

e grazie alla relazione

$$\Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$$

si può dimostrare che vale

$$\vec{j}_i = -\frac{1}{4\pi} \text{grad} \int \frac{\text{div}' \vec{j}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 \vec{x}' \equiv \frac{1}{4\pi} \text{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\vec{j}_i = \frac{1}{4\pi} \text{rot rot} \int \frac{\vec{j}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 \vec{x}'$$

L'equazione per il potenziale vettore diventa pertanto

$$\square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_i$$

N.B. In assenza di cariche libere $\vec{j} = \vec{j}_i$ $\Phi = 0$ e per i campi valgono le relazioni

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad , \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

In generale, quando dobbiamo risolvere l'equazione di D'Alembert in presenza di sorgenti

$$\square f(\vec{x}, t) = 4\pi s(\vec{x}, t)$$

è utile trovare la *funzione di Green* dell'equazione, definita come soluzione dell'equazione

$$\square G(\vec{x}, t, \vec{x}', t') = 4\pi \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t')$$

con le appropriate condizioni al contorno.

Se conosciamo $G(\vec{x}, t, \vec{x}', t')$ allora semplicemente

$$f(\vec{x}, t) = \int d^3 \vec{x}' dt' G(\vec{x}, t, \vec{x}', t') s(\vec{x}', t')$$

Per determinare G passiamo alla rappresentazione di Fourier (espansione in onde monocromatiche piane):

$$G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \int d^3 \vec{k} d\omega \tilde{G}(\vec{k}, \omega) e^{i\omega(t-t')} e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}$$

$$(2\pi)^4 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t') = \int d^3 \vec{k} d\omega e^{i\omega(t-t')} e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}$$

e l'equazione di d'Alembert diventa

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2\right) \tilde{G}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{4\pi^3}$$

$$\tilde{G}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{4\pi^3} \frac{1}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Per riottenere $G(\vec{x} - \vec{x}', t - t')$ dobbiamo dare una prescrizione sul modo di aggirare la singolarità situata in $\omega = c\sqrt{\vec{k}^2} = \pm ck$. Vogliamo che la prescrizione realizzi la condizione fisica di causalità, ovvero

1. $G = 0$ per $t < t'$
2. G rappresenta onde uscenti per $t > t'$

L'integrale di Cauchy nel piano complesso ω è un integrale su un contorno chiuso che include l'asse reale ed un semicerchio all'infinito scelto in modo tale da soddisfare

$$\text{Re}(i\omega(t-t')) < 0$$

Per soddisfare la prima condizione è sufficiente spostare i poli infinitesimalmente nel semipiano $\text{Re}(i\omega) < 0$:

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{1}{4\pi^3} \int d^3 \vec{k} d\omega \frac{e^{i\omega(t-t')} e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}}{\vec{k}^2 - \frac{1}{2}(\omega - i\epsilon)^2}$$

Integrando in $d\omega$ si ottiene, per $t > t'$

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{c}{2\pi^2} \int d^3 \vec{k} e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \frac{\sin ck(t-t')}{k}$$

ed integrando sugli angoli

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{2c}{\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \int_0^\infty dk \sin k |\vec{x} - \vec{x}'| \sin ck(t-t')$$

Ora è facile riconoscere che per l'ortogonalità dei seni

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)$$

Funzione di Green ritardata

L'effetto osservato al punto \vec{x} al tempo t è dovuto ad una causa avvenuta ad un tempo precedente $t' = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}$ nel punto \vec{x}' . Il ritardo è dovuto al tempo impiegato dal segnale a percorrere, alla velocità della luce, l'intervallo $|\vec{x} - \vec{x}'|$.

Effettuando l'integrazione su t' si ottiene finalmente

$$f(\vec{x}, t) = \int d^3\vec{x}' \frac{s(\vec{x}', t' = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad \text{soluzione ritardata}$$

2.21 Formula di Kirchoff

Se a partire dalla soluzione ritardata vogliamo ottenere una soluzione con assegnate condizioni al contorno di Cauchy ($f, \frac{\partial f}{\partial n}$ assegnate su una "ipersuperficie aperta" ovvero un volume, tipicamente a tempo fissato $t = t_0$), dobbiamo aggiungere l'appropriata soluzione dell'equazione omogenea. Per il teorema di Green

$$\int_{t_0}^{t_1} dt' \int_V d^3\vec{x}' (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) = \int_{t_0}^{t_1} dt' \oint_S (\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}) dS'$$

Scegliendo $\phi = f$ $\psi = G$ e utilizzando le equazioni d'onda

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} dt' \int_V d^3\vec{x}' [4\pi f(\vec{x}', t') \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x}) \delta(t' - t) - 4\pi s(\vec{x}', t') G + \frac{1}{c^2} (G \frac{\partial^2 f}{\partial t'^2} - f \frac{\partial^2 G}{\partial t'^2})] = \\ 4\pi f(\vec{x}, t) - 4\pi \int_{t_0}^{t_1} dt' \int_V d^3\vec{x}' s(\vec{x}', t') G + \frac{1}{c^2} \int_V d^3\vec{x}' (G \frac{\partial f}{\partial t'} - f \frac{\partial G}{\partial t'}) \Big|_{t'=t_0}^{t'=t_1} = \\ = \int_{t_0}^{t_1} dt' \oint_S (G \frac{\partial f}{\partial n'} - f \frac{\partial G}{\partial n'}) dS' \end{aligned}$$

In generale otteniamo quindi

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, t) = \int_V d^3\vec{x}' \frac{s(\vec{x}', t' = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi c^2} \int_V d^3\vec{x}' (G \frac{\partial f}{\partial t'} - f \frac{\partial G}{\partial t'}) \Big|_{t'=t_0} + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{t_0}^{t_1} dt' \oint_S dS' (G \frac{\partial f}{\partial n'} - f \frac{\partial G}{\partial n'}) \end{aligned}$$

Il problema a valori iniziali sul volume infinito è risolto da

$$\begin{aligned} f(0, t) = \int d\Omega' \int_0^\infty r' dr' s(r', \Omega', t' = t - \frac{r'}{c}) \\ + \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' [t \frac{\partial f}{\partial t'}(r' = ct, \Omega') + \frac{\partial}{\partial t'}(t f)] \end{aligned}$$

dove abbiamo calcolato f nel punto $\vec{x} = 0$ (scelta di coordinate) come funzione di $f(\vec{x}, t = 0), \frac{\partial f}{\partial t}(\vec{x}, t = 0)$: *soluzione di Poisson*

Il problema di determinare f all'interno di un volume che non contenga sorgenti e con valori iniziali di f e $\frac{\partial f}{\partial t}$ nulli è risolto da

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \hat{n} \cdot [\frac{\vec{\nabla}' f(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} f(\vec{x}', t') - \\ \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{c|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \frac{\partial f}{\partial t'}(\vec{x}', t')]_{t'=t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}} dS' \end{aligned}$$

formula di Kirchoff che formalizza il principio di Huygens.

2.22 Potenziali ritardati

Utilizziamo i risultati precedenti nella determinazione del potenziale elettromagnetico generato da una corrente arbitraria assegnata $j_\mu(\vec{x}, t)$.

Per formulare i risultati in modo covariante ritorniamo alla condizione di gauge di Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$. Risulta allora:

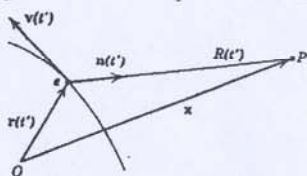
$$\begin{aligned} A_\mu(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \int d^3\vec{x}' dt' \frac{j_\mu(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(t' + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} - t) = \\ = \frac{1}{c} \int d^3\vec{x}' \frac{j_\mu(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned}$$

Gli $A_\mu(\vec{x}, t)$ così definiti si chiamano *potenziali ritardati*.

N.B. Nel caso in cui la densità di carica non dipende dal tempo la formula del potenziale ritardato per $A_0 = \Phi$ si riduce alla soluzione generale del problema elettrostatico.

Analogamente nel caso del moto stazionario (limitato periodico) di cariche la formula per \vec{A} si riduce (mediando rispetto al tempo) alla soluzione per il campo magnetico costante.

Figura 2.8: Carica puntiforme in moto



2.23 Potenziali di Liénard-Wiechert

Nel caso in cui la sorgente del campo sia una carica puntiforme in moto con legge oraria assegnata $\vec{r} = \vec{r}(t)$ è possibile, utilizzando la rappresentazione

$$j_\mu(\vec{x}, t) = qv_\mu \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{r}(t)) \quad v_\mu = (c, \vec{v})$$

integrare esplicitamente la formula dei potenziali ritardati

$$A_\mu(\vec{x}, t) = \frac{q}{c} \int dt' \frac{v_\mu(t')}{R(t')} \delta(t' + \frac{R(t')}{c} - t)$$

dove vale $R(t') = |\vec{x} - \vec{r}(t')|$.

Il campo in un certo punto ad un certo istante è determinato dalla posizione della carica e dalla sua velocità all'istante (precedente) determinato dall'equazione $t' + \frac{R(t')}{c} = t$. Notiamo che l'equazione $f(t') = t$ dove $f(t') = t' + \frac{R(t')}{c}$ ha una sola radice t' per ogni t , grazie al fatto che la linea d'universo della particella si trova all'interno del cono-luce. Dalla relazione

$$\frac{df}{dt'} = 1 + \frac{1}{c} \frac{dR}{dt'} = 1 - \frac{\hat{n} \cdot \vec{v}}{c}$$

dove \hat{n} è il versore della direzione $\vec{x} - \vec{r}(t') = \vec{R}$, utilizzando la relazione $\delta(\phi(x)) = \left| \frac{\delta(x-\vec{x})}{|\phi'(\vec{x})|} \right|_{\phi(\vec{x})=0}$ si ottiene finalmente

$$A_\mu(\vec{x}, t) = \left| \frac{qv_\mu}{cR(1 - \frac{\hat{n} \cdot \vec{v}}{c})} \right|_{t' + \frac{R(t')}{c} = t}$$

potenziali di Liénard-Wiechert. In componenti risulta

$$\Phi = \frac{q}{R - \frac{\vec{x} \cdot \vec{R}}{c}} \quad \vec{A} = \frac{q\vec{v}}{R - \frac{\vec{x} \cdot \vec{R}}{c}} \frac{1}{c}$$

È possibile rappresentare questo risultato in maniera esplicitamente *covariante*, introducendo il quadrivettore velocità della particella U^μ ed il quadrivettore distanza $R^\mu = [c(t - t'), \vec{x} - \vec{r}(t')]$. La condizione $t' + \frac{R(t')}{c} = t$ in forma covariante diventa

$$R^\mu R_\mu = 0$$

e la forma covariante dei potenziali di Liénard-Wiechert è

$$A^\mu = q \frac{U^\mu}{R_\nu U^\nu}$$

2.24 Deduzione dei campi dai potenziali

Derivando la relazione $R(t') = c(t - t')$ si ottiene

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{R} \frac{\partial t'}{\partial t} = c(1 - \frac{\partial t'}{\partial t})$$

da cui si ricava

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{Rc}}$$

Analogamente:

$$\text{grad} t' = -\frac{1}{c} \text{grad} R(t') = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial R}{\partial t'} \text{grad} t' + \frac{\vec{R}}{R} \right)$$

$$\text{grad} t' = -\frac{\vec{R}}{1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{Rc}} \frac{1}{Rc}$$

Si possono utilizzare questi risultati nella forma di Liénard-Wiechert dei potenziali, oppure derivare la rappresentazione in cui non è stata effettuata l'integrazione temporale usando

$$\text{grad} \rightarrow \text{grad} R \frac{\partial}{\partial R} = \frac{\vec{R}}{R} \frac{\partial}{\partial R}$$

$$\frac{d}{dt'} \left(\frac{\vec{R}}{R} \right) = \frac{\vec{R} \wedge (\vec{R} \wedge \vec{v})}{R^3}$$

In conclusione, tralasciando i calcoli intermedi e posto

$$\kappa = 1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{cR} \quad \hat{n} = \frac{\vec{R}}{R}$$

risulta per i campi \vec{E} e \vec{B}

$$\vec{E} = q \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\hat{n} - \frac{\vec{v}}{c}}{\kappa^3 R^2} + \frac{q}{c^2} \frac{\hat{n} \wedge [(\hat{n} - \frac{\vec{v}}{c}) \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial t'}]}{\kappa^3 R}$$

$$\vec{B} = \hat{n} \wedge \vec{E}$$

dove tutte le quantità sono calcolate all'istante t' definito da

$$t' + \frac{R(t')}{c} = t$$

I campi sono formati da due parti di carattere differente: una parte dipendente solo dalla velocità e decrescente come $\frac{1}{R^2}$ ed una parte dipendente linearmente dalla accelerazione e decrescente come $\frac{1}{R}$ per R grandi. Questa seconda parte è ortogonale a \hat{n} .

2.25 Potenziali e campi di una carica in moto uniforme

Consideriamo una carica in moto rettilineo uniforme $\vec{v} = \text{costante}$. In questo caso dalle definizioni segue

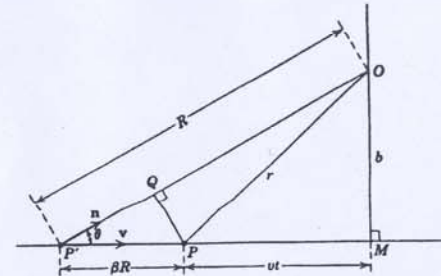
$$\vec{R}(t) = \vec{R}(t') - \vec{v}(t - t') = \vec{R}(t') - \frac{\vec{v}}{c} R(t')$$

$$R(t') - \vec{R}(t') \cdot \frac{\vec{v}}{c} = \sqrt{R^2(t) - \left(\frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{R}(t) \right)^2} = \sqrt{R_{\parallel}^2(t) + \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) R_{\perp}^2(t)}$$

e di conseguenza si ricava

$$\Phi = \frac{q}{\sqrt{R^2(t) - \left(\frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{R}(t) \right)^2}} \quad \vec{A} = \frac{q\vec{v}}{\sqrt{R^2(t) - \left(\frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{R}(t) \right)^2}}$$

Figura 2.9: Carica puntiforme in moto uniforme



Present and retarded positions of a charge in uniform motion.

mentre per il campo \vec{E} si ottiene

$$\vec{E} = q \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\vec{R}(t)}{\left(R^2(t) - \left(\frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{R}(t) \right)^2 \right)^{3/2}} = \frac{q\gamma \vec{R}(t)}{\left(\gamma^2 R_{\parallel}^2(t) + R_{\perp}^2(t) \right)^{3/2}}$$

che è esattamente il risultato già ottenuto dalla trasformazione di Lorentz del campo Coulombiano.

Notando poi che $\hat{n}(t') = \frac{\vec{R}(t)}{R(t')} + \frac{\vec{v}}{c}$ ricaviamo

$$\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{E}$$

come ottenuto in precedenza.

È importante notare che, a differenza del caso generale in cui il campo generato da una carica viene espresso in termini di variabili ritardate, cioè riferito al momento in cui è stato emesso il segnale che giunge al punto \vec{x} , per il campo di una carica in moto uniforme è possibile riesprimere il risultato in termini di variabili riferite all'istante dell'osservazione, e quindi in una situazione statica si ha l'apparenza di un'azione a distanza. Viceversa notiamo che la componente di \vec{E} , \vec{B} indipendente dalla accelerazione è per quanto

detto sopra esattamente uguale al campo che sarebbe stato generato da una carica in moto uniforme che fosse transitata all'istante t' nella posizione $\vec{r}(t')$ con velocità $\vec{v}(t')$.

2.26 APPENDICE : Deduzione covariante dei campi dai potenziali

Calcoliamo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ a partire da $A_\mu = \frac{qU_\mu}{R^\nu U_\nu}$, dove vale

$$R^\mu = X^\mu - X'^\mu(\tau) \quad U^\mu = \frac{dX'^\mu}{d\tau} = -\frac{\partial R^\mu}{\partial \tau}$$

ed inoltre vale

$$R^\mu R_\mu = 0 \quad a^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau}$$

La dipendenza di A_μ da X^μ è anche implicita attraverso la dipendenza di τ da X^μ contenuta nella condizione $R^\mu R_\mu = 0$. Pertanto occorre calcolare $\partial_\mu \tau$, che si ricava da

$$\partial_\mu (R^\nu R_\nu) = 2R^\nu \partial_\mu R_\nu = 2R^\mu - 2R^\nu \partial_\mu \tau U_\nu = 0$$

da cui

$$\partial_\mu \tau = \frac{R_\mu}{R^\nu U_\nu}$$

Risulta inoltre

$$\partial_\mu (R^\nu U_\nu) = U_\mu + (R^\nu a_\nu - c^2) \frac{R_\mu}{R^\nu U_\nu}$$

e di conseguenza subito

$$F_{\mu\nu} = qc^2 \frac{(R_\mu U_\nu - R_\nu U_\mu)}{(R^\alpha U_\alpha)^3} - q(R_\mu U_\nu - R_\nu U_\mu) \frac{R^\alpha a_\alpha}{(R^\alpha U_\alpha)^3} + q \frac{(R_\mu a_\nu - R_\nu a_\mu)}{(R^\alpha U_\alpha)^2}$$

Nel riferimento di quiete istantanea della particella carica, in cui vale $\vec{v}_0(t') = 0$ si ottiene

$$\vec{E}_0 = q \frac{\vec{R}_0}{R_0^3} + q \frac{\hat{n}_0 \wedge (\hat{n}_0 \wedge \vec{a})}{R_0 c^2} \quad \vec{B} = \hat{n}_0 \wedge \vec{E}_0$$

Il campo è la sovrapposizione del campo elettrostatico e del campo di radiazione dovuto all'accelerazione.

2.27 Irraggiamento. Potenza emessa da una carica accelerata

Consideriamo una carica accelerata in un SR in cui la sua velocità è piccola (trascurabile) rispetto a c , e consideriamo il campo elettromagnetico da essa generato a distanze grandi rispetto alle scale intrinseche. Soltanto la componente del campo dovuta all'accelerazione sopravvive, ed ha la forma

$$\vec{E} \simeq \frac{q}{c^2} \frac{\hat{n} \wedge (\hat{n} \wedge \vec{a})}{R} \quad \vec{B} = \hat{n} \wedge \vec{E}$$

dove al solito le quantità sono valutate a $t' = t - \frac{R(t')}{c}$.

Il flusso istantaneo di energia (vettore di Poynting) è

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}|^2 \hat{n}$$

L'intensità dell'irraggiamento nell'angolo solido $d\Omega$ è definita come quantità di energia che attraversa nell'unità di tempo l'elemento di superficie $dS = R^2 d\Omega$ di una superficie sferica di raggio R : $dI = |\vec{S} \cdot \hat{n}| dS$

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}|^2 R^2 = \frac{q^2}{4\pi c^3} |\hat{n} \wedge (\hat{n} \wedge \vec{a})|^2 = \frac{q^2}{4\pi c^3} |\hat{n} \wedge \vec{a}|^2$$

L'intensità dell'irraggiamento corrisponde alla potenza irraggiata per unità di angolo solido.

Introducendo esplicitamente l'angolo θ tra \vec{a} ed \hat{n} otteniamo la relazione

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} a^2 \sin^2 \theta$$

da cui integrando su tutto l'angolo solido

$$I = \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3}$$

formula di Larmor non relativistica per una carica accelerata.



2.28 Potenza emessa da una carica : formulazione relativistica

Notiamo innanzitutto che l'energia elettromagnetica irraggiata si trasforma come la quarta componente di un quadrivettore sotto trasformazioni di Lorentz.

Questa relazione, vera per i pacchetti d'onde piane, si estende ai campi di radiazione che, essendo soluzioni trasversali delle equazioni di Maxwell nel vuoto sono espandibili in onde piane. Risulta pertanto che la potenza totale irraggiata deve essere una quantità invariante di Lorentz.

Nel riferimento di quiete istantaneo della particella carica abbiamo per l'energia e l'impulso irraggiati

$$I = \frac{d\mathcal{E}_{e.m.}}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3} \vec{a}^2$$

$$\frac{d\vec{p}_{e.m.}}{dt} = 0$$

In rappresentazione covariante

$$\frac{dP_{e.m.}^\mu}{d\tau} = \frac{2q^2}{3c^5} \vec{a}^2 U^\mu$$

dove \vec{a} è l'accelerazione nel SR di quiete, e può essere rappresentata in termini dell'accelerazione in un SR arbitrario tramite la relazione $\vec{a}^2 = -a^\mu a_\mu$. Pertanto si ottiene

$$\frac{dP_{e.m.}^\mu}{d\tau} = -\frac{2q^2}{3c^5} U^\mu a^\nu a_\nu$$

ed in particolare

$$I = -\frac{2q^2}{3c^3} a^\nu a_\nu = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{dP^\mu}{d\tau} \right) \left(\frac{dP_\mu}{d\tau} \right)$$

Tornando a rappresentare questa quantità in termini di vettori ordinari otteniamo la *formula di Larmor relativistica*

$$I = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^6 \left[\vec{a}^2 - \left(\frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{a} \right)^2 \right]$$

In modo analogo si ottiene l'impulso irraggiato.

2.29 Irraggiamento di dipolo

Se consideriamo un sistema di cariche in movimento ed esaminiamo i campi di radiazione a grande distanza rispetto alla scala del sistema, che si suppone localizzato, possiamo innanzitutto rimpiazzare la dipendenza temporale del moto con un'analisi in frequenza tramite l'analisi di Fourier:

$$\rho_\omega(\vec{x}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \rho(\vec{x}, t)$$

$$\vec{j}_\omega(\vec{x}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \vec{j}(\vec{x}, t)$$

$$i\omega \rho_\omega(\vec{x}) + \text{div} \vec{j}_\omega(\vec{x}) = 0$$

e sostituendo nelle equazioni di Maxwell (gauge di Lorentz)

$$\Phi_\omega(\vec{x}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \Phi(\vec{x}, t) = \int d^3x' \tilde{\rho}_\omega(\vec{x}') \frac{e^{-ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$\vec{A}_\omega(\vec{x}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \vec{A}(\vec{x}, t) = \int d^3x' \vec{j}_\omega(\vec{x}') \frac{e^{-ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

dove $k = |\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$. Il risultato è immediato se consideriamo la trasformata di Fourier dei potenziali ritardati, o alternativamente se generalizziamo l'equazione di Poisson a

$$(\Delta + k^2)f(\vec{x}) = -4\pi s(\vec{x})$$

Limitiamoci per il momento al caso più semplice da analizzare, ovvero il limite $kr \gg 1$, $r \gg \lambda$ per il quale si può approssimare, posto $r = |\vec{x}|$, $\hat{n} = \frac{\vec{x}}{r}$

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} \vec{A}_\omega(\vec{x}) \cong \frac{e^{-ikr}}{cr} \int j_\omega(\vec{x}') e^{+ik\hat{n}\cdot\vec{x}'} d^3x'$$

Il potenziale vettore ha la forma di un'onda sferica uscente. Inoltre se le dimensioni del sistema di cariche sono piccole rispetto a λ è possibile un'ulteriore approssimazione, consistente nel porre

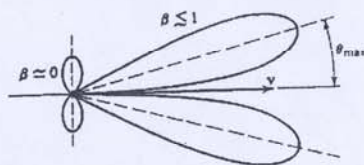
$$e^{+ik\hat{n}\cdot\vec{x}'} \approx 1$$

e all'ordine più basso

$$\vec{A}_\omega(\vec{x}) \cong \frac{e^{-ikr}}{cr} \int \vec{j}(\vec{x}')_\omega d^3x' = \frac{e^{-ikr}}{cr} \int i\omega \vec{x}' \rho(\vec{x}') d^3x'$$

Figura 2.10: Irraggiamento da accelerazione longitudinale

Radiation pattern for charge accelerated in its direction of motion. The two patterns are not to scale, the relativistic one (appropriate for $\gamma \sim 2$) having been reduced by a factor $\sim 10^3$ for the same acceleration.



Introduciamo il *momento di dipolo elettrico* del sistema

$$\vec{d}_\omega = \int \vec{x}' \rho_\omega(\vec{x}') d^3\vec{x}'$$

che per cariche puntiformi isolate si riduce a

$$\vec{d} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

Risulta pertanto per il potenziale vettore

$$\vec{A}_\omega(\vec{x}) = \frac{e^{-ikr}}{cr} i\omega \vec{d}_\omega$$

ovvero, trasformando di Fourier

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{cr} \dot{\vec{d}}(t') \quad \dot{\vec{d}} = \sum_i q_i \vec{V}_i(t') \quad (t' = t - \frac{r}{c})$$

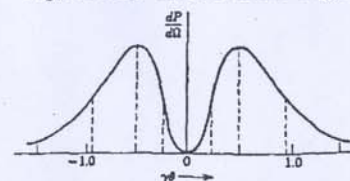
I campi elettromagnetici irraggiati da un dipolo oscillante prendono a grande distanza la forma

$$\begin{aligned} \vec{B}_\omega &= k^2 (\hat{n} \wedge \vec{d}_\omega) \frac{e^{-ikr}}{r} & \vec{B} &= \frac{1}{c^2 r} \ddot{\vec{d}} \wedge \hat{n} \\ \vec{E}_\omega &= k^2 (\hat{n} \wedge \vec{d}_\omega) \wedge \hat{n} \frac{e^{-ikr}}{r} & \vec{E} &= \frac{1}{c^2 r} (\ddot{\vec{d}} \wedge \hat{n}) \wedge \hat{n} = -\frac{1}{c^2 r} \ddot{\vec{d}}_\perp \end{aligned}$$

L'intensità dell'irraggiamento di dipolo si ottiene da

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3} |\ddot{\vec{d}} \wedge \hat{n}|^2 = \frac{1}{4\pi c^3} |\ddot{\vec{d}}|^2 \sin^2 \theta$$

Figura 2.11: Distribuzione angolare per particella relativistica



Angular distribution of radiation for relativistic particle.

$$I = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{d}}|^2 \quad \text{coerente con la formula di Larmor}$$

N.B. Un sistema di particelle identiche non può irraggiare di dipolo in quanto \vec{d} misura l'accelerazione del centro di massa del sistema che, per un sistema isolato, è nulla.

Nel caso di un sistema oscillante, analizzando in frequenza e mediando rispetto al tempo, otteniamo

$$\begin{aligned} \overline{\frac{dI_\omega}{d\Omega}} &= \frac{c}{8\pi} k^4 |\ddot{\vec{d}}_\omega|^2 \sin^2 \theta \\ \overline{I_\omega} &= \frac{ck^4}{3} |\ddot{\vec{d}}_\omega|^2 \end{aligned}$$

Questa legge spiega perché *il cielo è azzurro* (la radiazione è molto più forte ad alte frequenze).

2.30 Potenza dissipata da acceleratori lineari e circolari

Le perdite per irraggiamento negli acceleratori sono un fattore limitante per determinare la massima energia raggiungibile. Nel caso generale dovremo adottare la forma relativistica della formula di Larmor per calcolare queste perdite.

Nel caso di un acceleratore lineare il moto è unidimensionale e la velocità è parallela all'accelerazione. Valgono le relazioni

$$\vec{E}_{rad} = \frac{q}{c^2} \frac{\hat{n} \wedge (\hat{n} \wedge \vec{a})}{R(1 - \frac{\hat{n} \cdot \vec{v}}{c})^3} = \vec{B}_{rad} \wedge \hat{n}$$

$$\vec{B}_{rad} = \frac{q}{c^2} \frac{\vec{a} \wedge \hat{n}}{R(1 - \frac{\hat{n} \cdot \vec{v}}{c})^3} = \hat{n} \wedge \vec{E}_{rad}$$

La distribuzione angolare dell'energia irradiata è

$$\frac{dI(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{\vec{a}^2 \sin^2 \theta}{(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)^5}$$

ed è la potenza irradiata riferita al tempo proprio della carica, grazie alla relazione

$$\frac{dt}{dt'} = 1 - \frac{\hat{n} \cdot \vec{v}}{c} = 1 - \frac{v}{c} \cos \theta$$

Integrando su tutto l'angolo solido si riproduce il risultato della formula di Larmor relativistica

$$I(t') = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \gamma^6 \vec{a}^2(t') = \frac{2}{3} \frac{q^2}{m_0^2 c^3} \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2$$

Abbiamo usato la formula della massa longitudinale $F_{\parallel} = m_0 \gamma^3 a_{\parallel}$. Se poi notiamo che vale la relazione

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d\mathcal{E}}{dx}$$

possiamo riformulare la perdita di energia nella forma

$$I = \frac{2}{3} \frac{q^2}{m_0^2 c^3} \left(\frac{d\mathcal{E}}{dx} \right)^2$$

e la perdita rispetto all'energia fornita dall'esterno vale

$$\frac{I}{\frac{d\mathcal{E}}{dt}} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{(m_0 c^2)^2} \frac{c}{v} \frac{d\mathcal{E}}{dx} \quad \text{trascurabile in pratica}$$

La situazione è molto diversa nel caso degli acceleratori circolari, per i quali vale

$$\frac{dI(t')}{d\Omega} = \frac{q^2 \vec{a}^2}{4\pi c^3} \frac{1}{(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)^3} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\gamma^2 (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)^2} \right]$$

dove ϕ è l'angolo azimutale del vettore \hat{n} relativamente al piano definito da \vec{v} e \vec{a} . Quando $\phi = 0$, ovvero la radiazione è osservata lungo una direzione giacente nel piano suddetto, esistono due zeri dell'intensità nelle direzioni $\cos \theta = \frac{v}{c}$. La potenza totale irradiata si ottiene integrando su θ oppure dalla formula di Larmor relativistica:

$$I(t') = \frac{2}{3} \frac{q^2 \vec{a}^2}{c^3} \gamma^4 = \frac{2}{3} \frac{q^2}{m_0^2 c^3} \gamma^2 \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2$$

dove abbiamo usato la formula della massa trasversa $F_{\perp} = m_0 \gamma a_{\perp}$.

Per un dato valore della forza applicata, la radiazione dovuta ad accelerazione circolare è γ^2 volte più grande di quella dovuta ad accelerazione lineare.

Poiché l'impulso cambia molto più rapidamente dell'energia in un moto circolare, risulta $\left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right| \gg \frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dt}$ e sfruttando la relazione cinematica $\omega = \frac{v}{\rho}$, ρ raggio di rotazione, anche

$$I \approx \frac{2}{3} \frac{q^2 v^4 \gamma^4}{c^3 \rho^2}$$

Pertanto la perdita di energia per rivoluzione è

$$\delta\mathcal{E} = \frac{2\pi\rho}{v} I = \frac{4\pi}{3} \frac{q^2}{\rho c^3} v^3 \gamma^4 \rightarrow \frac{4\pi}{3} \frac{q^2}{\rho} \gamma^4 \quad (v \rightarrow c)$$

e non è affatto trascurabile nel limite $v \rightarrow c$.

N.B. Per quanto riguarda la distribuzione angolare nel limite ultrarelativistico $v \rightarrow c$, notiamo che sia per accelerazioni parallele che per accelerazioni ortogonali al moto la distribuzione ha un picco in avanti con semilarghezza

$$\sqrt{\langle \theta^2 \rangle} = \frac{1}{\gamma} = \frac{m_0 c^2}{\mathcal{E}}$$

2.31 Radiazione di sincrotone

A seguito dei risultati precedenti risulta che, per una particella ultrarelativistica ($v \rightarrow c$), l'irraggiamento è dominato dalla componente trasversale dell'accelerazione ed è assimilabile alla radiazione emessa da una particella in moto istantaneamente circolare su di una circonferenza di raggio $\rho = \frac{v^2}{a_{\perp}} \approx \frac{c^2}{a_{\perp}}$.

La radiazione é concentrata in avanti, ed é quindi visibile solo quando la velocità é diretta verso l'osservatore, per un intervallo di tempo dell'ordine di $\Delta t' = \frac{\Delta \theta}{\omega_0} \sim \frac{\rho}{c\gamma} \Rightarrow \Delta t \sim \frac{1}{\gamma^3} \frac{\rho}{c}$.

Dall'analisi di Fourier risulta che lo spettro in frequenza della radiazione osservata conterrà frequenze fino all'ordine di $\gamma^3 \omega_0$.

L'analisi in frequenza della radiazione prodotta da un moto (eventualmente periodico) si effettua a partire dalla formula per l'energia totale irradiata $\mathcal{E}_{e.m.} \equiv W$:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}^2(t) R^2 dt = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}_\omega|^2 R^2 \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{c}{2\pi} \int_0^{\infty} |\vec{E}_\omega|^2 R^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

Pertanto possiamo definire:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{c}{(2\pi)^2} |\vec{E}_\omega|^2 R^2$$

dove vale:

$$\begin{aligned} R\vec{E}_\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{c^2} \frac{\hat{n} \wedge [(\hat{n} - \frac{\vec{v}}{c}) \wedge \vec{a}]}{(1 - \frac{\hat{n} \cdot \vec{v}}{c})^3} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{c^2} e^{-i\omega(t' + \frac{R(t')}{c})} \frac{\hat{n} \wedge [(\hat{n} - \frac{\vec{v}}{c}) \wedge \vec{a}]}{(1 - \frac{\hat{n} \cdot \vec{v}}{c})^2} dt' \\ &\approx \frac{e^{-ikr}}{c^2} q \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t' - \hat{n} \cdot \frac{\vec{r}(t')}{c})} \frac{d}{dt'} \left[\frac{\hat{n} \wedge (\hat{n} \wedge \vec{v})}{1 - \frac{\hat{n} \cdot \vec{v}}{c}} \right] dt' \\ &= e^{-ikr} \frac{q i \omega}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{n} \wedge (\hat{n} \wedge \vec{v}) dt' e^{-i\omega(t' - \hat{n} \cdot \frac{\vec{r}(t')}{c})} \end{aligned}$$

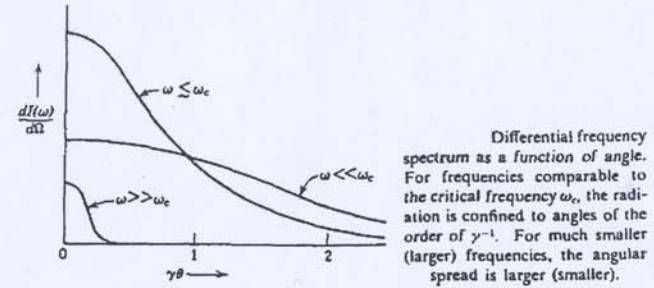
In conclusione pertanto:

$$\begin{aligned} \frac{dI(\omega)}{d\Omega} &= \frac{q^2 \omega^2}{(2\pi)^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{n} \wedge (\hat{n} \wedge \frac{\vec{v}}{c}) e^{-i\omega(t' - \hat{n} \cdot \frac{\vec{r}(t')}{c})} dt' \right|^2 \\ &= \frac{q^2 \omega^2}{(2\pi)^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{n} \wedge \frac{\vec{v}}{c}) e^{-i\omega(t' - \hat{n} \cdot \frac{\vec{r}(t')}{c})} dt' \right|^2 \end{aligned}$$

Notiamo che la polarizzazione della radiazione emessa é specificata da $R\vec{E}_\omega$ e può essere calcolata l'intensità di radiazione polarizzata in una direzione $\hat{\epsilon}$ tramite la relazione:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} \Big|_{\hat{\epsilon}} = \frac{c}{(2\pi)^2} (R\vec{E}_\omega \cdot \hat{\epsilon})^2$$

Figura 2.12: Densità spettrale differenziale in angolo



In particolare é importante studiare i casi di polarizzazione giacente sul piano dell'orbita ($\hat{\epsilon}_{\parallel}$) o perpendicolare ad esso ($\hat{\epsilon}_{\perp}$).

Senza entrare nei dettagli della derivazione, detto θ l'angolo fra la direzione d'osservazione e il piano dell'orbita, e considerando il limite ultrarelativistico $v \rightarrow c$, si ottiene:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{q^2}{3\pi^2 c} \left(\frac{\omega \rho}{c} \right)^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^2 \left[K_{2/3}^2(\zeta) + \frac{\theta^2}{\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2} K_{1/3}^2(\zeta) \right]$$

$$\zeta = \frac{\omega \rho}{3c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{3/2}$$

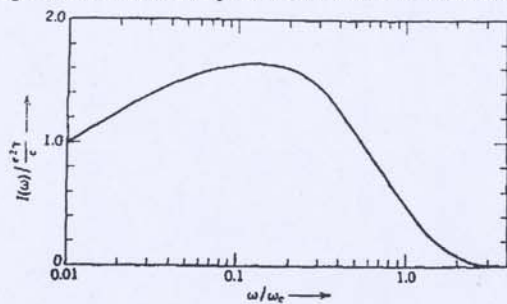
dove le K sono le funzioni di Bessel modificate (cfr. Jackson).

Il primo termine corrisponde a radiazione polarizzata nel piano dell'orbita e il secondo a polarizzazione perpendicolare.

Integrando su ω e θ , si trova che la componente a polarizzazione parallela é piú grande (per un fattore 7) della componente ortogonale; inoltre per le proprietà delle funzioni K l'intensità di radiazione é trascurabile quando:

$$\zeta = \frac{\omega \rho}{3c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{3/2} \gg 1$$

Figura 2.13: Densità spettrale in funzione della frequenza



Synchrotron radiation spectrum (energy radiated per unit frequency interval) as a function of frequency. The intensity is measured in units of γ^2/c^2 , while the frequency is expressed in units of ω_c (14.85).

quindi in particolare per grandi angoli (angolo critico decrescente al crescere della frequenza) e comunque quando

$$\omega > \omega_c \equiv 3\gamma^3 \frac{c}{\rho} = 3\gamma^3 \omega_0 \quad \text{come previsto}$$

La relazione per l'angolo critico si può scrivere $\theta_c \sim \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^{\frac{1}{3}}$.
Le alte frequenze sono concentrate nel piano dell'orbita.
Integrando su θ la distribuzione si ottiene:

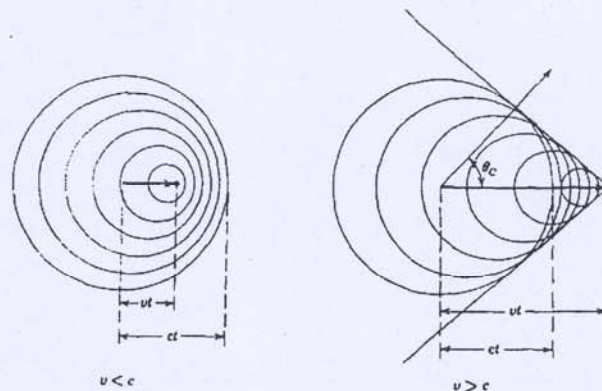
$$I(\omega) = 2\sqrt{3} \frac{q^2}{c} \gamma \frac{\omega}{\omega_c} \int_{2\frac{\omega}{\omega_c}}^{\infty} K_{5/3}(x) dx$$

radiazione di sincrotrone, con i limiti:

$$I(\omega) \approx 3.25 \frac{q^2}{c} \left(\frac{\omega \rho}{c}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{per } \omega \ll \omega_c$$

$$I(\omega) \approx \sqrt{3\pi} \frac{q^2}{c} \gamma \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-2\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{per } \omega \gg \omega_c$$

Figura 2.14: Radiazione Čerenkov



2.32 Radiazione di Čerenkov

Una particella dotata di moto uniforme mentre attraversa il vuoto non irraggia. Tuttavia se una particella viaggia a velocità costante attraverso un mezzo materiale essa può emettere radiazione (*Effetto Čerenkov* (1937)). Questa emissione è un fenomeno cooperativo del mezzo attraversato i cui elettroni vengono accelerati dai campi della particella che transita. Tuttavia è interessante guardare al problema dal punto di vista dei potenziali di Liénard-Wiechert in un mezzo dotato di indice di rifrazione n .

Quando la velocità \vec{v} della particella è maggiore della velocità $w = \frac{c}{n}$ che la luce ha nel mezzo, i campi (ritardati) emessi dalla sorgente sotto forma di onde sferiche con velocità di propagazione w interferiscono costruttivamente a formare un'onda d'urto dietro la particella. L'angolo tra \vec{v} e la normale

all'onda d'urto soddisfa la relazione:

$$\cos \theta_c = \frac{w}{v} = \frac{c}{nv}$$

Nella formula dei potenziali ritardati consideriamo la relazione:

$$t' + \frac{|\vec{x} - \vec{r}(t')|}{w} - t = 0$$

e, fissata l'origine dei tempi imponendo $\vec{r}(t) = \vec{v}t$:

$$t - t' = \frac{1}{w} |\vec{x} - \vec{v}t'| = \frac{1}{w} |\vec{X} + \vec{v}(t - t')|$$

dove \vec{X} è la distanza dalla posizione *attuale* della particella.

Risulta allora:

$$(t - t') = \frac{\pm \sqrt{(\vec{X} \cdot \vec{v})^2 - X^2(v^2 - w^2)} - \vec{X} \cdot \vec{v}}{v^2 - w^2}$$

e quando $v < w$ esiste una sola soluzione positiva, mentre quando $v > w$ si hanno due casi:

1. $\frac{\vec{X} \cdot \vec{v}}{Xv} > -\sqrt{1 - \frac{w^2}{v^2}}$ nessuna soluzione
2. $\frac{\vec{X} \cdot \vec{v}}{Xv} < -\sqrt{1 - \frac{w^2}{v^2}}$ due soluzioni reali positive

I potenziali esistono solo all'interno del cono $\frac{\vec{X} \cdot \vec{v}}{Xv} = \sin \theta_c$.

All'interno del cono vale pertanto:

$$\Phi(x, t) = \frac{q}{kR_+} + \frac{q}{kR_-}$$

e si ricava, sostituendo le soluzioni trovate:

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{2q}{\sqrt{X^2 - \left(\frac{\vec{v}}{w} \wedge \vec{x}\right)^2}} \quad \vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\vec{v}}{w} \Phi(\vec{x}, t)$$

Questi potenziali sono singolari sul cono.

Fisicamente la singolarità è eliminata dalla dipendenza della velocità della

luce nel mezzo dalla frequenza: $n = n(\omega)$.

Se assumiamo di poter applicare le formule dell'intensità di radiazione emessa nel caso di moto in un mezzo materiale non dispersivo allora otteniamo:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{q^2 \omega^2 n}{(2\pi)^2 c^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{n} \wedge (\hat{n} \wedge \vec{v}) e^{i\omega(t - n \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}}{c})} dt \right|^2$$

che nel caso di moto rettilineo uniforme si specializza a:

$$\begin{aligned} \frac{dI(\omega)}{d\Omega} &= \frac{q^2 n}{c^3} |\hat{n} \wedge \vec{v}|^2 \left| \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t(1 - n \frac{\hat{n} \cdot \vec{v}}{c})} dt \right|^2 \\ &= \frac{q^2 n}{c^3} |\hat{n} \wedge \vec{v}|^2 \left| \delta \left(1 - n \frac{\hat{n} \cdot \vec{v}}{c} \right) \right|^2 \end{aligned}$$

La radiazione è emessa soltanto nella direzione $\cos \theta_c = \frac{c}{nv}$. L'espressione ottenuta è formalmente divergente, ma è possibile, lavorando su intervalli di tempo lunghi, ma finiti, scrivere:

$$\left| \delta \left(1 - \frac{n \hat{n} \cdot \vec{v}}{c} \right) \right|^2 = \frac{\omega T}{2\pi} \delta \left(1 - \frac{n \hat{n} \cdot \vec{v}}{c} \right)$$

e integrando sull'angolo θ :

$$I(\omega) = \frac{q^2 n v^2}{c^3} \sin^2 \theta_c \frac{c}{nv} (\omega T) = \frac{q^2}{c^2} v \sin^2 \theta_c \omega T$$

Pertanto lo spettro in frequenza dell'energia irradiata per unità di lunghezza percorsa è:

$$\frac{dI(\omega)}{dx} = \frac{I(\omega)}{vT} = \frac{q^2 \omega}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{n^2 v^2} \right) \quad v \geq \frac{c}{n}$$

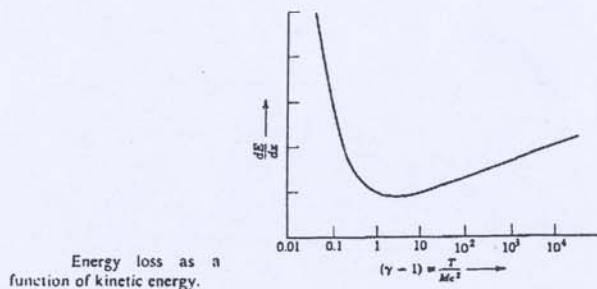
Questo risultato si può verificare più formalmente.

2.33 Perdite di energia di paricelle cariche

2.33.1 Perdite di energia per collisioni

Particelle cariche veloci che attraversano la materia perdono energia a causa delle interazioni elettromagnetiche.

Figura 2.15: Perdita di energia per collisioni



Per una particella pesante, le collisioni con gli elettroni della materia danno luogo a perdite di energia senza apprezzabile deflessione, mentre le collisioni con i nuclei danno luogo essenzialmente a diffusione elastica. Se la particella incidente è un elettrone, le collisioni con gli elettroni atomici danno luogo sia ad una perdita di energia che a diffusione.

Consideriamo l'interazione coulombiana di una particella veloce con elettroni. Gli elettroni inizialmente possono essere pensati fermi.

L'impulso trasferito è dovuto al campo elettrico trasversale:

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{\infty} eE_{\perp}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} eE_{\perp}(x) \frac{dx}{v} = 2 \frac{Ze^2}{bv} \quad (\text{Gauss})$$

dove Ze è la carica della particella, v la sua velocità e b è il cosiddetto *parametro d'impatto*.

L'energia acquistata dall'elettrone è:

$$\Delta \mathcal{E}(b) = 2 \frac{Z^2 e^4}{mv^2} \frac{1}{b^2}$$

I limiti sui possibili valori di b sono fissati, per b_{min} , dalla condizione di massimo trasferimento di energia che risulta per le collisioni frontali:

$$\Delta \mathcal{E}(b_{min}) = \Delta \mathcal{E}_{max} = 2m\gamma^2 v^2 \quad \Rightarrow \quad b_{min} = \frac{Ze^2}{\gamma m v^2}$$

Per b_{max} notiamo che la forza sull'elettrone è un impulso di durata $\tau = \frac{b}{v\gamma}$ e se $\tau \gg \frac{1}{\omega}$ dove ω è la frequenza di vibrazione dell'elettrone nell'atomo allora l'elettrone non assorbe energia. Pertanto $b_{max} = \frac{\gamma v}{\omega}$.

Il numero di collisioni per unità di spazio percorso che hanno parametro d'impatto tra b e $b + db$ è semplicemente:

$$dn = N2\pi b db dx$$

dove N è il numero di elettroni per unità di volume.

Risulta quindi per l'energia persa per unità di spazio percorso:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dx} = 2\pi N \int \Delta \mathcal{E}(b) b db \approx 4\pi \frac{NZ^2 e^4}{mv^2} \ln \frac{\gamma^2 m v^3}{Ze^2 \omega}$$

Il calcolo può essere ripetuto con maggior accuratezza introducendo una decomposizione in frequenza delle interazioni elettroni-atomi e definendo una frequenza media (geometrica):

$$\ln \langle \omega \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln \omega_i$$

Si ottiene allora la *formula di Bohr* per la perdita di energia:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dx} = 4\pi \frac{NZ^2 e^4}{mv^2} \left[\ln \frac{1.123 \gamma^2 m v^3}{Ze^2 \langle \omega \rangle} - \frac{v^2}{2c^2} \right]$$

valida per le particelle pesanti incidenti su materia.

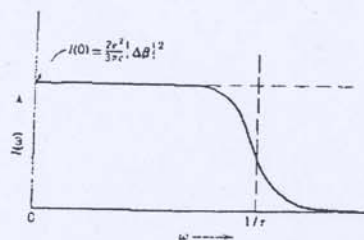
Nel regime in cui occorre tener conto degli *effetti quantistici* si ottiene invece la *formula di Bethe*:

$$-\frac{d\mathcal{E}_q}{dx} = 4\pi \frac{NZ^2 e^4}{mv^2} \left[\ln \frac{2\gamma^2 m v^2}{\hbar \langle \omega \rangle} - \frac{v^2}{c^2} \right]$$

Nel caso di elettroni incidenti la formula deve essere ulteriormente modificata per tenere conto degli effetti di deflessione e delle interazioni di scambio. Qualitativamente notiamo che gli effetti quantistici corrispondono all'introduzione di:

$$(b_{min})^q = \frac{\hbar}{\gamma m v} = \lambda/2\pi \quad \text{Lunghezza Compton}$$

Figura 2.16: Spettro energetico della radiazione emessa per collisione



Frequency spectrum of radiation emitted in a collision of duration τ with velocity change Δv .

e nel caso di elettroni $(b_{min})^q = \frac{\hbar}{mc} \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}$.

Gli effetti di perdita di energia sono effetti *statistici*: il risultato di una misurazione effettiva sarà una *distribuzione* centrata intorno ai valori predetti dalle formule precedenti.

2.33.2 Perdite di energia per radiazione di frenaggio - Bremsstrahlung

Nei processi d'urto tra particelle cariche che attraversano la materia, queste cariche subiscono accelerazioni che originano l'emissione di onde elettromagnetiche.

Per particelle lente rispetto alla velocità della luce quest'effetto è trascurabile rispetto alla perdita di energia per urto, ma ad altissime velocità questa *radiazione di frenaggio* può essere il modo dominante di perdita di energia. Consideriamo in primo luogo il *limite non relativistico*, ripartendo dalla relazione valida per la distribuzione in frequenza dell'intensità nel limite $v \ll c$:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{q^2}{(2\pi)^2 c^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{n} \wedge (\hat{n} \wedge \vec{a}) e^{-i\omega(t - \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}}{c}(t))} dt \right|^2$$

Se trascuriamo anche $|\frac{\vec{r}(t)}{c}| \sim \frac{vt}{c}$ rispetto a t otteniamo l'*approssimazione di dipolo*:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{q^2}{(2\pi)^2 c^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{n} \wedge (\hat{n} \wedge \vec{a}) e^{-i\omega t} dt \right|^2$$

e per processi di collisione, nel regime di frequenze $\omega\tau \ll 1$ dove $\tau \sim \frac{b}{v}$ è il tempo di collisione risulta:

$$\int \vec{a}(t) e^{i\omega t} dt \approx \Delta \vec{v}$$

da cui la relazione, se Ψ è l'angolo tra $\Delta \vec{v}$ e \hat{n} :

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} \approx \frac{q^2}{4\pi^2 c^3} |\Delta \vec{v}|^2 \sin^2 \Psi \quad \omega\tau \ll 1$$

$$I(\omega) \approx \frac{2}{3\pi} \frac{q^2}{c^3} |\Delta \vec{v}|^2$$

Viceversa nel regime di alte frequenze $\omega\tau \gg 1$ l'integrale rapidamente oscillante dà un risultato trascurabile. L'approssimazione è adeguata se si media su molte collisioni.

Se analizziamo la polarizzazione scomponendola in componente parallela ed ortogonale al piano (\vec{v}, \hat{n}) troviamo:

$$\frac{dI_{\parallel}(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{8\pi^2 c^3} |\Delta \vec{v}|^2 \cos^2 \theta \quad \frac{dI_{\perp}(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{8\pi^2 c^3} |\Delta \vec{v}|^2$$

Se consideriamo in particolare il caso dell'*interazione coulombiana* abbiamo la relazione già ricavata in precedenza:

$$\Delta v = \frac{2q_1 q_2}{Mvb}$$

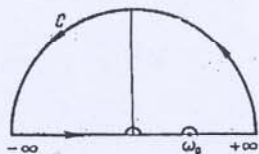
dove M e v sono massa e velocità della particella di carica q_1 incidente su di un centro fisso di carica q_2 .

Dall'analisi precedente otteniamo:

$$I(\omega, b) \approx \frac{8}{3\pi} \left(\frac{q_1^2}{Mc^2} \right)^2 \frac{q_2^2}{c} \left(\frac{c}{v} \right)^2 \frac{1}{b^2} \quad \omega < \frac{v}{b}$$

e irraggiamento trascurabile per $\omega > \frac{v}{b}$.

Figura 2.21: Cammino di integrazione



$$\text{Im}\alpha = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}\alpha(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} \sim n_I$$

Sfruttando le relazioni di crossing $\text{Im}\alpha(-\omega) = -\text{Im}\alpha(\omega)$ otteniamo la *relazione di dispersione di Kramers-Krönig*

$$n_R - 1 = \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{2\omega' n_I(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

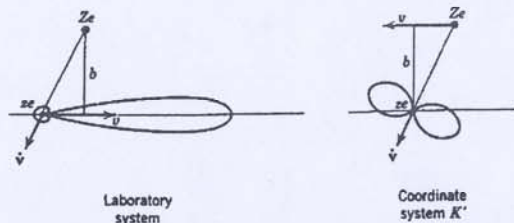
che è valida, in maniera del tutto generale, per sistemi fisici che siano *causali e lineari*.

Queste relazioni, per la loro generalità, possono essere rilevanti sia per la determinazione di comportamenti asintotici in regimi non esplorabili sperimentalmente, sia per verifiche di causalità nella fisica delle particelle elementari, sia infine per determinare le condizioni di realizzabilità di filtri di frequenza (non è possibile avere assorbimento senza dispersione).

Bibliografia

- [1] Landau Lifshitz, *Theorie des champs*, Mir, 1970
- [2] J.D.Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, 1962
- [3] M.Born E.Wolf, *Principles of optics*, Pergamon, 1959
- [4] W.Heitler, *Quantum theory of radiation*, Oxford University Press
- [5] R.Becker, *Teoria dell'elettricità II*, Sansoni

Figura 2.17: Radiazione nel sistema di laboratorio



Radiation emitted during relativistic collisions viewed from the laboratory (nucleus at rest) and the frame K' (incident particle essentially at rest).

Possiamo definire una *sezione d'urto di radiazione*:

$$\chi(\omega) = \int I(\omega, b) 2\pi b db$$

e imponendo al solito $b_{min} \approx \frac{q_1 q_2}{Mv^2}$ $b_{max} \approx \frac{v}{\omega}$ otteniamo:

$$\chi(\omega) = \frac{16}{3} \left(\frac{q_1^2}{Mc^2} \right)^2 \frac{q_2^2}{c} \left(\frac{c}{v} \right)^2 \ln \frac{\lambda M v^3}{q_1 q_2 \omega} \quad \lambda \approx 1.123 = 2e^{-\gamma_B}$$

e la condizione $b_{max} > b_{min}$ impone, nel caso classico, un limite alla frequenza:

$$(\omega_{max})^{cl} \sim \frac{Mv^3}{q_1 q_2}$$

L'estensione al caso quantistico si ottiene al solito ponendo $b_{min} = \frac{\hbar}{Mv}$ ed ottenendo:

$$\chi(\omega) = \frac{16}{3} \left(\frac{q_1^2}{Mc^2} \right)^2 \frac{q_2^2}{c} \left(\frac{c}{v} \right)^2 \ln \frac{\lambda M v^3}{\hbar \omega}$$

da cui anche $(\omega_{max})^q \sim \frac{Mv^2}{\hbar}$.

In realtà dalla conservazione dell'energia risulta $\omega_{max} = \frac{Mv^2}{2\hbar}$.

Un calcolo quantistico più raffinato che tiene conto automaticamente della conservazione dell'energia porta alla *formula di Bethe-Heitler*:

$$\chi(\omega) = \frac{16}{3} \left(\frac{q_1^2}{Mc^2} \right)^2 \frac{q_2^2}{c} \left(\frac{c}{v} \right)^2 \ln \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2} M v^2} + \sqrt{\frac{1}{2} M v^2 - \hbar \omega} \right)^2}{\hbar \omega}$$

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{16}{3} N \left(\frac{q_2^2}{\hbar c} \right) \frac{Z^4 e^4}{Mc^2}$$

trascurabile rispetto alle perdite per collisione per $v \ll c$: $O(\alpha = \frac{e^2}{\hbar c})$, (calcolato per nuclei $q_2 = Z'e$).

Effetti relativistici: il calcolo può essere effettuato nel SR' in cui la particella incidente è ferma e i nuclei si muovono verso di essa con velocità $v \approx c$. In questo SR' il processo radiativo può essere trattato non relativisticamente, con la sola specifica $b_{max} \approx \frac{v}{\omega'}$.

Pertanto:

$$\chi'(\omega') = \frac{16}{3} \left(\frac{q_1^2}{Mc^2} \right)^2 \frac{q_2^2}{c} \left(\frac{c}{v} \right)^2 \ln \frac{\lambda \gamma M v^2}{\hbar \omega'}$$

La sezione d'urto di radiazione è un invariante di Lorentz $\chi(\omega) = \chi'(\omega')$ per cui basta conoscere la relazione Doppler relativistica:

$$\omega = \gamma \omega' \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta' \right)$$

e sfruttando la simmetria intorno a $\theta' = \frac{\pi}{2}$ in SR' dovuta alla trasversalità dell'accelerazione in SR' , otteniamo $\omega = \gamma \omega'$:

$$\chi(\omega) = \frac{16}{3} \left(\frac{q_1^2}{Mc^2} \right)^2 \frac{q_2^2}{c} \left(\frac{c}{v} \right)^2 \ln \frac{\lambda \gamma^2 M v^2}{\hbar \omega} \quad 0 < \omega < (\gamma - 1) \frac{M c^2}{\hbar} \sim \gamma \frac{M c^2}{\hbar}$$

Se adesso andiamo a calcolare la perdita di energia per radiazione di frenaggio nel limite $v \rightarrow c$, anche tenendo conto dello schermaggio elettronico del nucleo, otteniamo:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{16}{3} N \left(\frac{q_2^2}{\hbar c} \right) \frac{Z^4 e^4}{Mc^2} \ln \left(\frac{192 \lambda M}{m_e (Z')^{\frac{1}{3}}} \right) \gamma \quad q_2 = Z'e$$

e pertanto a grande γ questo effetto diventa dominante. Possiamo scrivere:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dx} = -\frac{\mathcal{E}}{x_0}$$

dove:

$$x_0 = \frac{16}{3} \left(\frac{Z'^2 e^2}{\hbar c} \right) \frac{Z^4 e^4}{(Mc^2)^2} \ln \left(\frac{192 \lambda M}{m_e (Z')^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$q_2 = Z'e \quad \text{é la lunghezza di radiazione}$$

N.B. L'indipendenza dello spettro dalla frequenza dovuta dallo schermaggio elettronico é caratteristica delle piccole frequenze nel caso non relativistico, mentre vale sempre nel caso estremo relativistico (raggi cosmici, acceleratori ad alte energie).

Ref: E.Fermi, *Nuclear Physics*, Un. Chicago Press.

2.34 Metodo dei fotoni virtuali

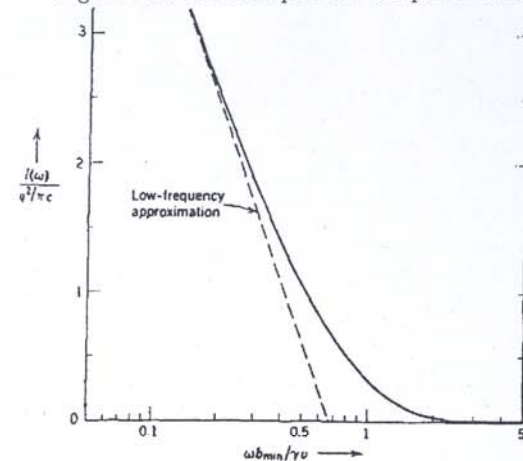
La bremsstrahlung ed altri processi elettromagnetici che coinvolgono particelle relativistiche possono essere trattati con il metodo dei fotoni virtuali, che sfrutta la similitudine tra i campi di una particella in moto veloce e i campi di impulso di radiazione.

Il principio si basa sull'analisi in frequenza dei campi della particella (veloce) incidente e sull'interpretazione come spettro di quanti (fotoni) virtuali. Gli effetti di questi quanti (diffusione Compton, assorbimento) vengono calcolati nella teoria elettromagnetica e l'interazione della particella carica é correlata all'interazione fotonica.

In particolare le reazioni nucleari di produzione e di disintegrazione indotte da elettroni possono essere analizzate in termini di fotoproduzione e fotodisintegrazione, e la bremsstrahlung nelle collisioni elettrone-nucleo può essere ricondotta all'effetto Compton da fotoni (virtuali, dal campo del nucleo) su elettroni.

L'assunzione basilare é l'idea che gli effetti delle componenti in frequenza della radiazione equivalente si sommano in maniera incoerente: questo richiede che gli spostamenti delle particelle colpite siano piccoli durante la

Figura 2.18: Densità spettrale dei quanti virtuali



Frequency spectrum of virtual quanta for a relativistic particle, with the energy per unit frequency $I(\omega)$ in units of $q^2/\pi c$ and the frequency in units of $\gamma v/b_{min}$. The number of virtual quanta per unit energy interval is obtained by dividing by $\hbar^2 \omega$.

collisione.

Lo spettro della radiazione equivalente per una particella incidente di carica q e velocità $v \approx c$ corrisponde al calcolo effettuato per ricavare la formula di Bohr (analisi in frequenza dell'interazione coulombiana) e porta al seguente spettro integrato sul parametro d'impatto:

$$I(\omega) \approx \frac{2 q^2}{\pi c} \left(\frac{c}{v} \right)^2 \left[\ln \left(\frac{1.123 \gamma v}{\omega b_{min}} \right) - \frac{v^2}{2c^2} \right] \quad \omega < \frac{\gamma v}{b_{min}}$$

$$I(\omega) \approx \frac{2 q^2}{\pi c} \left(\frac{c}{v} \right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) e^{-2 \frac{\omega b_{min}}{\gamma v}} \quad \omega \gg \frac{\gamma v}{b_{min}}$$

Lo spettro numerico dei quanti virtuali $N(\hbar\omega)$ si ottiene dalla relazione:

$$I(\omega) d\omega = \hbar\omega N(\hbar\omega) d(\hbar\omega)$$

e mostra la dipendenza $\frac{1}{\omega}$ a piccola frequenza tipica della radiazione di bremsstrahlung.

2.35 Reazione di radiazione

Fino a questo punto non abbiamo considerato l'effetto che il campo elettromagnetico generato da una particella accelerata ha sulla particella stessa. Possiamo rappresentare questo effetto come *forza di reazione radiativa* \vec{F}_{rad} e scrivere (non relativisticamente):

$$m\vec{a} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{rad}$$

La forma di \vec{F}_{rad} può essere dedotta dalla formula di Larmor, ossia dal bilancio energetico, ponendo:

$$\begin{aligned} \int \vec{F}_{rad} \cdot \vec{v} dt &= - \int \frac{2q^2}{3c^3} |\vec{a}|^2 dt \\ &= \frac{2q^2}{3c^3} \int \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{v} dt - \frac{2q^2}{3c^3} (\vec{a} \cdot \vec{v}) \Big|_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$

Per moti periodici o con opportune condizioni al contorno:

$$\int \left(\vec{F}_{rad} - \frac{2q^2}{3c^3} \frac{d\vec{a}}{dt} \right) \cdot \vec{v} dt = 0$$

e pertanto possiamo identificare:

$$\vec{F}_{rad} = \frac{2q^2}{3c^3} \dot{\vec{a}}$$

$$m(\vec{a} - \tau \dot{\vec{a}}) = \vec{F}_{ext}$$

dove $\tau = \frac{2}{3} \frac{q^2}{mc^3}$.

Equazione del moto di Abraham-Lorentz

Il regime di validità dell'equazione è quello in cui il termine di reazione è una piccola correzione $\tau \ll T$.

Si dimostra che l'espressione trovata per \vec{F}_{rad} è consistente con la conservazione della quantità di moto e del momento angolare.

Notiamo che alla scala dei tempi τ è associata una scala di lunghezza $r_0 = \frac{q^2}{mc^2}$ che nel caso dell'elettrone è:

$$r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.81794 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad \text{raggio classico dell'elettrone}$$

L'approssimazione vale per lunghezze d'onda $\lambda \gg r_0$.

N.B. $r_e = \frac{e^2}{\hbar c m_e c} = \alpha \lambda / 2\pi$

2.36 Larghezza di riga

Consideriamo gli effetti della reazione di radiazione sul comportamento di un sistema fisico con proprietà elettromagnetiche.

Discutiamo per semplicità il caso di un *oscillatore armonico carico*, di massa m e frequenza propria ω_0 :

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{x}$$

La soluzione sarà della forma:

$$x = x_0 e^{-i\omega t} e^{-\gamma \frac{t}{2}}$$

e la quantità $\alpha = \frac{\gamma}{2} + i\omega$ deve soddisfare:

$$\frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \alpha^3 + \alpha^2 + \omega_0^2 = 0$$

ovvero sotto l'ipotesi $\omega_0 \tau = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \omega_0 \ll 1$ vale:

$$\gamma \approx \omega_0^2 \tau = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \omega_0^2$$

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \quad \Delta\omega = -\frac{5}{8} \omega_0^3 \tau^2 \quad \text{trascurabile}$$

γ si chiama *costante di decadimento* o inverso della *vita media*.

$\Delta\omega$ é lo *spostamento di livello*.

La luce emessa dall'oscillatore ha la forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\gamma t} e^{-i\omega_0 t}$$

e lo spettro in frequenza é:

$$\vec{E}_\omega = \frac{\vec{E}_0}{2\pi} \frac{1}{-i(\omega_0 - \omega) - \frac{\gamma}{2}}$$

da cui la *distribuzione di intensità* della radiazione:

$$I(\omega) = I_0 \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\frac{\gamma}{2})^2}$$

dove I_0 é l'energia totale irradiata.

Questa distribuzione si chiama *Lorentziana* e γ é detta anche *larghezza di riga* o *semilarghezza*.

Esprimendo la larghezza di riga in unità di lunghezza d'onda:

$$\Delta\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega_0^2} \gamma = 2\pi c\tau = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{mc^2} = 1.18 \cdot 10^{-12} \text{ cm per elettroni}$$

2.37 Diffusione ed assorbimento in un oscillatore forzato

Quando un'onda elettromagnetica investe una particella carica, la particella viene accelerata (assorbendo radiazione) e quindi irraggia (riemettendo radiazione). La radiazione riemessa si chiama anche *radiazione diffusa*.

Consideriamo in primo luogo una *particella carica libera* di carica e e massa m , investita da un'onda monocromatica di frequenza ω .

L'equazione del moto (non relativistica):

$$m\ddot{\vec{x}} = e\vec{E}_0 e^{i(\omega t + \delta)}$$

ha come soluzione:

$$\vec{x} = \frac{-e\vec{E}_0}{m\omega^2} e^{i(\omega t + \delta)}$$

ovvero la particella oscilla alla frequenza dell'onda, e ne emette una diffusa della stessa frequenza con intensità media:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 \ddot{\vec{x}}^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3} = \frac{e^4 \sin^2 \Psi E_0^2}{8\pi m^2 c^3}$$

dove Ψ é l'angolo tra polarizzazione e direzione di osservazione. Se rapportiamo questa intensità al flusso iniziale dell'onda incidente $\frac{cE_0^2}{8\pi}$ possiamo definire la *sezione d'urto*:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4 \sin^2 \Psi}{m^2 c^4} = r_0^2 \sin^2 \Psi \quad \text{sezione d'urto Thomson}$$

Se vogliamo riferirci ad un'onda non polarizzata e all'angolo tra direzione di osservazione e direzione del moto dell'onda usiamo $\sin^2 \Psi = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta)$ ed otteniamo:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \quad \sigma_\tau = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \quad \text{sezione d'urto totale Thomson}$$

$$\sigma_\tau = 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$$

Ad alte frequenze *sezione d'urto Compton* (formula di Klein-Nishina).

Passiamo al caso di un *oscillatore armonico* con reazione di radiazione *forzata* da un'onda elettromagnetica.

L'equazione del moto diventa:

$$\ddot{\vec{x}} + \gamma \dot{\vec{x}} + \omega_0^2 \vec{x} = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{i(\omega t + \delta)}$$

dove abbiamo usato la relazione $\gamma \approx \omega_0^2 \tau$.

La soluzione stazionaria é:

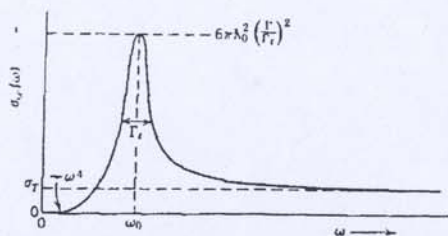
$$\vec{x} = \vec{x}_0 e^{i\omega t} \quad \vec{x}_0 = \frac{e}{m} \frac{\vec{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} \quad \vec{E}_0 = \hat{\epsilon} E_0$$

N.B. Più in generale γ é la *lunghezza totale* della riga.

Il campo di radiazione é al solito:

$$\vec{E}_{rad} = \frac{e}{c^2} \frac{1}{r} [\ddot{\vec{n}} \wedge (\hat{n} \wedge \vec{x})]$$

Figura 2.19: Sezione d'urto totale di un oscillatore



Total cross section for the scattering of radiation by an oscillator as a function of frequency. σ_T is the Thomson free-particle scattering cross section.

e possiamo definire una sezione d'urto differenziale come funzione della frequenza ω e della polarizzazione $\hat{\epsilon}'$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\omega) = \left| \frac{r\hat{\epsilon}' \cdot \vec{E}_{rad}}{E_0} \right|^2 = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (\hat{\epsilon} \cdot \hat{\epsilon}')^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

Per frequenze piccole rispetto all'energia di legame $\omega \ll \omega_0$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\omega) = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (\hat{\epsilon} \cdot \hat{\epsilon}')^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \quad \text{Legge di Rayleigh della diffusione}$$

Sommando rispetto alle polarizzazioni, mediando ed integrando sugli angoli otteniamo la sezione d'urto totale:

$$\sigma(\omega) = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

Per frequenze in prossimità di ω_0 abbiamo la *fluorescenza di risonanza*: la sezione d'urto ha un picco:

$$\sigma(\omega) \approx \frac{2\pi}{3} r_0^2 \frac{\omega_0^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$$

che riproduce la distribuzione Lorentziana.

Ad alte frequenze ci si trova alla sezione d'urto Thomson.

Consideriamo infine il trasferimento di energia all'oscillatore, ovvero l'*assorbimento*. Dall'equazione del moto, analizzando in frequenza il campo e.m. incidente, otteniamo per ogni campo esterno $E(t)$:

$$\vec{x}(\omega) = \frac{e}{m} \frac{\vec{E}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$$

Vogliamo calcolare l'energia trasferita considerando il lavoro fatto nell'oscillatore:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\vec{v} \cdot \vec{E}$$

$$\Delta\mathcal{E} = e \int_{-\infty}^{\infty} i\omega\vec{x}(\omega) \cdot \vec{E}(\omega) d\omega = \frac{e^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{E}^2(\omega) i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} d\omega$$

di cui dobbiamo estrarre la parte reale ottenendo:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{e^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}(\omega)|^2 \frac{\omega^2\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} d\omega$$

Per piccoli γ l'integrando ha un picco alla risonanza che permette di approssimare l'integrale nella forma:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{e^2}{m} |\vec{E}(\omega_0)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^2 + \left(\frac{\omega_0^2 - x^2}{\gamma}\right)^2} = \frac{\pi e^2}{m} |\vec{E}(\omega_0)|^2$$

Possiamo per ogni ω definire una sezione d'urto di assorbimento dividendo per il flusso incidente $\frac{c}{4\pi} |E_0(\omega)|^2$:

$$\sigma_{ass} = 4\pi \frac{e^2}{mc} \frac{\omega^2\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \quad \omega\tau \ll 1$$

con il comportamento di basse frequenze $\sigma_{ass} \approx \omega^2$.

Per grandi ω risulta $\gamma \rightarrow \omega^2\tau$ e quindi $\sigma_{ass} \rightarrow \sigma_{Thom} = \frac{8\pi}{3} r_0^2$.

Si riconosce inoltre l'*assorbimento risonante* $\omega \approx \omega_0$.

Integrando su tutte le frequenze si ottiene la *regola di somma di dipolo* (corrispondente alla relazione per l'energia totale $\Delta\mathcal{E}$):

$$\int_0^{\infty} \sigma_{ass}(\omega) d\omega = \frac{2\pi^2 e^2}{mc}$$

Questo risultato non dipende da γ (poteva essere ottenuto a $\gamma = 0$) e nemmeno dalla frequenza di risonanza ω_0 .

Inoltre questa relazione è vera anche quantisticamente.

2.38 Diffusione su un sistema di cariche

In generale per la diffusione della luce su di un sistema di cariche occorre considerare la possibilità che, a causa del movimento proprio delle cariche, la frequenza della luce diffusa sia differente da quella incidente, anche nel caso di cariche libere.

Nel caso di frequenza dell'onda incidente piccola rispetto alla frequenza caratteristica del sistema continuano a valere le formule dell'approssimazione di dipolo:

$$\vec{E}_\omega = k^2 (\hat{n} \wedge \vec{d}_\omega) \wedge \hat{n} \frac{e^{-ikr}}{r}$$

dove \vec{d}_ω è il momento di dipolo totale del sistema e si può considerare indipendente da ω per piccoli ω .

Consideriamo il caso di frequenze grandi rispetto alle frequenze caratteristiche. Vale sempre la formula dei potenziali ritardati:

$$\vec{E} \approx \sum_i \frac{q_i}{c^2} \frac{\hat{n}_i' \wedge (\hat{n}_i' \wedge \vec{a}_i)}{R_i'} \Big|_{t' = t - \frac{R_i'}{c}(t')}$$

e dall'equazione del moto:

$$\vec{a}_i = \frac{q_i}{m_i} \vec{E}_0 e^{i(\omega t' - \vec{k} \cdot \vec{x}_i')} \quad \vec{R}_i' = \vec{x} - \vec{x}_i'$$

A grande distanza, osservando la radiazione nella direzione $\hat{n}' = \frac{\vec{k}'}{|\vec{k}'|}$, per cui $t' \approx t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{n}' \cdot \vec{x}_i'}{c}$; si ottiene:

$$\vec{E} \approx \sum_i \frac{q_i^2}{m_i c^2 r} e^{i\omega(t - \frac{r}{c})} e^{i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{x}_i'} \hat{n}' \wedge (\hat{n}' \wedge \vec{E}_0)$$

ovvero introducendo il vettore $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$ (differenza tra il vettore d'onda diffusa e il vettore d'onda incidente), per $|\vec{k}'| \approx k$:

$$q = \frac{\omega}{c} \sin \frac{\theta}{2} \quad \theta \text{ angolo di diffusione}$$

risulta

$$\vec{E} = \hat{n}' \wedge (\hat{n}' \wedge \vec{E}_0) \frac{e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}}{rc^2} \sum_i \frac{q_i^2}{m_i} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}_i'}$$

e il flusso di energia nell'angolo solido è al solito $\frac{c r^2}{4\pi} |\vec{E}|^2$. Si può introdurre la sezione d'urto differenziale di diffusione dividendo per il flusso di energia incidente ed ottenendo:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \sum_i \frac{q_i^2}{m_i c^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}_i'} \right|^2 \sin^2 \theta$$

Nel caso che il sistema sia formato da particelle di carica e e massa m_e risulta:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \sum_i e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}_i'} \right|^2 \sin^2 \theta r_e^2$$

Definiamo *fattore di forma* $|F(q^2)|^2$ il rapporto tra la sezione d'urto e la sezione di Thomson (di una singola particella):

$$|F(q^2)|^2 = \left| \sum_i e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}_i'} \right|^2$$

Questa quantità si intende mediata sul tempo per tener conto dei moti interni del sistema.

Secondo il valore relativo della lunghezza d'onda della radiazione incidente e della dimensione s del sistema si hanno limiti molto differenti: poiché $a \geq |\vec{x}_i'|$:

- $a \ll \lambda \quad qa \ll 1$
Si può porre $e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}_i'} \approx 1$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx Z^2 r_e^2 \sin^2 \theta$$

dove Z è il numero totale delle cariche: *diffusione coerente*.

- $a \gg \lambda \quad qa \gg 1$
Prendendo la media rispetto al movimento delle cariche:

$$e^{i\vec{q} \cdot (\vec{x}_i' - \vec{x}_j')} \rightarrow \delta_{ij}$$

perché in questo caso la funzione oscilla rapidamente:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx Zr_e^2 \sin^2 \theta$$

detta *diffusione incoerente*.

Nel primo caso il sistema si comporta come un tutto, nel secondo come un insieme statistico di cariche isolate.

Passando alle distribuzioni continue notiamo che si può scrivere:

$$eF(q) = e \sum_i e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}_i} \rightarrow \int \rho(\vec{x}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} d^3\vec{x} = \rho_{\vec{q}}$$

trasformata di Fourier della distribuzione di cariche: $F(0) = Z$.

2.39 Dispersione e assorbimento

2.39.1 Dispersione di onde e.m. in un mezzo isolante (dielettrico)

Dalle equazioni di Maxwell nei mezzi continui si ricava la relazione di Maxwell per l'indice di rifrazione

$$n = \sqrt{\epsilon_0} \quad (\mu = 1)$$

che in questa forma può valere solo per grandi lunghezze d'onda. perché in generale la costante dielettrica dipenderà dalla frequenza.

Per stabilire una relazione più generale consideriamo il legame tra campo elettrico e polarizzazione:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$$

A sua volta, in un modello a oscillatori del mezzo dielettrico si stabilisce la relazione

$$\vec{P} = Ne\vec{x}$$

dove n è il numero di elettroni per cm^3 , e la carica ed \vec{x} il vettore spostamento, per il quale abbiamo già stabilito la relazione

$$\vec{x} = \frac{e}{m\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} \vec{E}_{eff}$$

ovvero, posto $\alpha = \frac{e^2}{m\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$

$$\vec{P} = N\alpha\vec{E}_{eff}$$

da cui si ricava

$$\epsilon = 1 + 4\pi N\alpha = 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \frac{N}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$$

valida per i gas rarefatti, per i quali $\vec{E}_{eff} \approx \vec{E}$. Più in generale, nei mezzi condensati, vale $\vec{E}_{eff} = \vec{E} + \frac{4\pi}{3}\vec{P}$, da cui

$$\vec{P} = \frac{N\alpha\vec{E}}{1 - \frac{4\pi}{3}N\alpha} \quad \text{ovvero} \quad \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi}{3}N\alpha$$

che sposta la frequenza di risonanza a

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{m} N$$

Le equazioni di Maxwell risultanti dall'utilizzo di ϵ come ricavato dalla relazioni precedenti valgono soltanto per i fenomeni periodici della frequenza particolare ω da cui dipende ϵ . Inoltre ϵ è una quantità complessa, il che comporta per onde piane monocromatiche la dipendenza

$$e^{i(kx - \omega t)} = e^{-i\omega(t - \frac{nx}{c})} = e^{-i\omega t} e^{i\frac{\omega}{c} n x} e^{-\frac{\omega}{c} n_I x}$$

All'indice di rifrazione complesso $n = n_R + in_I$ corrispondono un *indice di rifrazione* reale n_R , che definisce la velocità di fase dell'onda tramite la relazione

$$w_F = \frac{c}{n_R}$$

e un *coefficiente di estinzione* n_I che misura l'affievolimento esponenziale dell'onda che penetra nel mezzo. Dalle definizioni si ricava

$$n_R = 1 + 2\pi N \frac{e^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

$$n_I = 2\pi N \frac{e^2}{m} \frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

n_R ed n_I hanno sempre lo stesso segno, per cui si ha sempre affievolimento. Nel regime in cui vale $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \gg \gamma^2 \omega^2$ risulta

$$n_I \approx 0$$

$$n_R \approx 1 + 2\pi N \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \frac{\partial n_R}{\partial \omega} > 0$$

Pur di tenersi lontani dalle frequenze proprie di assorbimento del sistema, è possibile generalizzare il risultato al caso quantistico con la relazione

$$n_R = 1 + 2\pi N \frac{e^2}{m} \sum_r \frac{f_r}{\omega_r^2 - \omega^2}$$

dove ω_r sono le frequenze proprie ed f_r , legati alle intensità delle righe di assorbimento, soddisfano

$$\sum_r f_r = 1$$

2.39.2 Dispersione anomala ed assorbimento

In prossimità delle frequenze proprie la condizione $\frac{\partial n_R}{\partial \omega} > 0$ non è soddisfatta. In questo caso si parla di *dispersione anomala*, da mettere in relazione con il fenomeno dell'*assorbimento* (grande n_I).

In prossimità di una riga di assorbimento, posto $\eta = \omega - \omega_0$ e trattando η come quantità piccola rispetto ad ω e ω_0 , vale

$$\omega_0^2 - \omega^2 \simeq -2\omega_0\eta$$

e si ottiene

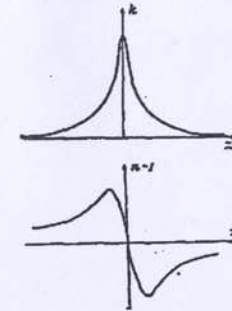
$$n_R \simeq 1 + N\pi \frac{e^2}{m\omega_0} \frac{-\eta}{\eta^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$$

$$n_I \simeq N\pi \frac{e^2}{2m\omega_0} \frac{\gamma}{\eta^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$$

L'assorbimento è massimo per $\eta = 0$ e si dimezza quando $\eta = \pm \frac{\gamma}{2}$. A questi valori di η si hanno i valori estremi dell'indice di rifrazione. Nella zona intermedia vale $\frac{\partial n_R}{\partial \omega} < 0$.

Dal punto di vista energetico, nel processo di assorbimento l'energia sottratta all'onda dal mezzo assorbente è uguale al lavoro fornito ai singoli atomi del mezzo, come si può agevolmente verificare calcolando la media temporale del vettore di Poynting e il lavoro compiuto sugli elettroni.

Figura 2.20: In prossimità di una riga di assorbimento



Coefficiente di estinzione k e indice di rifrazione n in prossimità di una riga di assorbimento, in funzione di: $x = 2 \frac{\omega - \omega_0}{\gamma}$.

2.39.3 Relazioni di dispersione

Riconsideriamo la relazione $n = 1 + 2\pi\alpha N$ dove

$$\alpha = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

I poli della funzione $\alpha(\omega)$ sono $\omega = \frac{-i\gamma \pm \sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}}{2} \simeq -i\frac{\gamma}{2} \pm \omega_0$. Per il teorema di Cauchy l'integrale $\oint \frac{f(z')}{z' - z} dz'$ chiuso nel semipiano complesso superiore, se $f(z)$ è l'estensione di $\alpha(\omega)$ al piano complesso, deve dare zero perché non ci sono poli racchiusi dalla curva. Pertanto dalla definizione di parte principale risulta

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = 2\pi i \alpha(\omega)$$

e separando parte reale e parte immaginaria

$$\text{Re}\alpha = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}\alpha(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} \sim n_R - 1$$

INTERFERENZA E DIFFRAZIONE

Il più semplice esempio di interferenza è dato da due dipoli oscillanti in fase ad una distanza d uno dall'altro con frequenza $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$

Se vogliamo studiare l'intensità della radiazione come funzione della direzione, dobbiamo calcolare il quadrato del campo elettrico di radiazione.

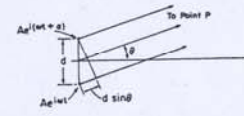
I punti che distano dagli oscillatori per distanze le cui differenze sono multipli interi della lunghezza d'onda ricevono onde elettromagnetiche "in fase".

Se le distanze differiscono per un multiplo semintero della lunghezza d'onda, le onde sono in opposizione di fase.

$$r_1 - r_2 = \sqrt{x^2 + (y - \frac{d}{2})^2} - \sqrt{x^2 + (y + \frac{d}{2})^2}$$

$$\approx r \sqrt{1 - \frac{dy}{r^2}} - r \sqrt{1 + \frac{dy}{r^2}}$$

$$\approx -\frac{dy}{r} = -d \sin \theta$$



Pertanto quando $\sin \theta_c = \frac{n\lambda}{d}$

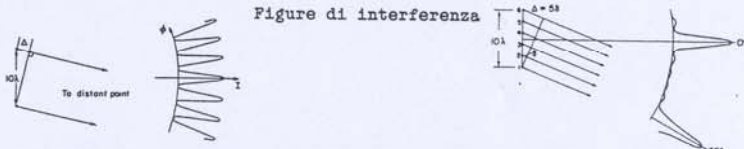
si ha interferenza costruttiva

mentre quando $\sin \theta_d = (n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{d}$

si ha interferenza distruttiva.

L'intensità nei punti θ_c è quattro volte quella dell'onda singola, mentre nei punti θ_d l'intensità è nulla.

L'integrale dell'energia irradiata è esattamente uguale al doppio dell'integrale per un singolo oscillatore.



L'interferenza può essere sfruttata nella costruzione di antenne direzionali.

Calcoliamo come si sommano le onde: $A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$.

$$A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2} = A_R e^{i\phi_R}$$

e risulta:

$$A_R^2 = (A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2})(A_1 e^{-i\phi_1} + A_2 e^{-i\phi_2}) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)$$

In particolare se $A_1 = A_2 = A$ allora $A_R = 2A \cos \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2)$.

L'interferenza nell'intensità è appunto il termine $2 A_1 A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)$

Fenditura lineare

E' il limite del rettangolo per $B \gg \lambda$.
 Gli effetti nella direzione lunga del rettangolo si sommano incoerentemente tramite la relazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \left(\frac{\sin y}{y} \right)^2 = \pi$$

(nel caso di una sorgente luminosa linearmente estesa) e quindi la figura dipende solo da x tramite la relazione

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$$

Questo risultato ci permette anche di completare l'analisi del reticolo di diffrazione sovrapponendo alla figura di interferenza gia' ottenuta la figura di diffrazione e scrivendo quindi

$$I \sim \frac{\sin^2 x}{x^2} \frac{\sin^2 \frac{N\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \quad x = \frac{2\pi}{\lambda} \alpha A$$

$$\delta = \frac{2\pi \alpha d}{\lambda}$$

dove d e' la distanza tra le righe, $\alpha = \cos \theta$

Apertura circolare

$$u_p \sim k \int_0^a r dr \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikrS \cos(\varphi-\psi)} d\varphi \quad S = \sin \theta$$

ma l'integrale angolare non e' altro che una rappresentazione integrale della funzione di Bessel $J_0(krS)$, da cui:

$$u_p \sim 2\pi \int_0^a kr dr J_0(krS) = \frac{4}{kS^3} [kas J_1(kas)]$$

ottenuta sfruttando le relazioni ricorsive delle equazioni di Bessel. Risultata allora:

$$u_p \sim \frac{2\pi a}{S} J_1(kas)$$

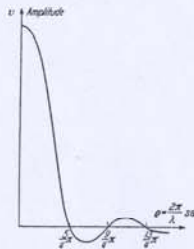
$$J_1(\varphi) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi\varphi}} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$$

Al centro della figura vale: $u_p = \pi a^2 k$

Il primo zero si trova a $\sin \theta_1 \approx 0.61 \frac{\lambda}{a}$

Piu' in generale

$$\sin \theta_n \approx \left(n + \frac{1}{4}\right) \frac{\lambda}{2a}$$



Si possono utilizzare questi risultati per spiegare gli aloni meteorologici, che risultano dalla sovrapposizione delle figure di diffrazione delle goccioline d'acqua.

DIPRAZIONE DI FRESNEL

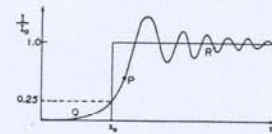
Alla base dei calcoli nella diffrazione di Fresnel sta l'idea che per un'opportuna scelta dell'origine sul piano dello schermo si possa scegliere $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ e far svanire i termini lineari in Φ . In questo caso restano da effettuare gli integrali degli esponenziali quadratici immaginari (integrali di Fresnel), il cui risultato fornisce una rappresentazione completa dell'intero campo di diffrazione oltre lo schermo, e non solo il comportamento all'infinito.

Risulta per Φ :

$$\Phi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) [(\alpha\xi + \beta\eta)^2 - (\xi^2 + \eta^2)]$$

che a sua volta si puo' in genere ridurre ad assi principali.

Senza entrare nei complicati dettagli, ricordiamo solo come caso interessante quello della diffrazione intorno ad uno spigolo rettilineo infinito. Otteniamo per l'andamento dell'intensita' la figura:



dove l'asse verticale indica il confine dell'ombra geometrica, mentre l'ascissa e' il parametro adimensionale $w = x/\sqrt{\lambda D}$ dove D e' la distanza dell'osservatore dallo schermo,

REFERENZE

- R.P. Feynman - Feynman Lectures n. 29-30
- W.D. Jackson - Classical electrodynamics
- A. Sommerfeld - Optics

Nel nostro esempio, notiamo che le fasi differiscono per la differenza di cammino già calcolata moltiplicata per $\frac{2\pi}{\lambda}$ e pertanto in generale

$$\phi_2 - \phi_1 = \alpha + 2\pi d \sin \theta / \lambda,$$

dove α è lo sfasamento intrinseco, se esiste, dei due oscillatori.

Quando ci sono poche sorgenti che interferiscono si parla di interferenza, quando invece ce ne sono molte (o un continuo) si parla di diffrazione. Si tratta comunque dello stesso fenomeno fisico.

Consideriamo una griglia di diffrazione, ovvero un insieme di n oscillatori equispaziati di uguale ampiezza ma di fase differente (ad esempio perché li osserviamo ad un angolo comportante una differenza di cammino ottico). Occorre allora effettuare la somma

$$A[\cos \omega t + \cos(\omega t + \phi) + \cos(\omega t + 2\phi) + \dots + \cos(\omega t + (n-1)\phi)],$$

Infatti la differenza di fase tra due oscillatori è una costante, che si ottiene dall'analisi precedente:

$$\phi = \alpha + 2\pi d \sin \theta / \lambda.$$

Risulta pertanto sommando la serie geometrica:

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\phi} = \frac{1-e^{in\phi}}{1-e^{i\phi}}$$

e prendendo il modulo quadro:

$$\frac{1-e^{in\phi}}{1-e^{i\phi}} \frac{1-e^{-in\phi}}{1-e^{-i\phi}} = \frac{2-2\cos n\phi}{2-2\cos\phi} = \frac{\sin^2 \frac{n\phi}{2}}{\sin^2 \frac{\phi}{2}}$$

da cui l'ampiezza risultante:

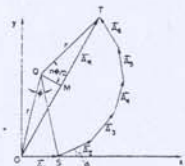
$$A_R = A \frac{\sin n\phi/2}{\sin \phi/2}$$

(per $n=2$ si ritrova il risultato precedente) e l'intensità risultante:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 n\phi/2}{\sin^2 \phi/2}$$

L'intensità integrata si dimostra uguale a $n I_0$.

Esiste anche un modo geometrico di fare la somma (costruzione di Sommerfeld) che sfrutta il fatto che $\cos n\phi$ è la componente su x di un vettore unitario di angolo $n\phi$, per cui sommando i vettori unitari geometricamente si ottiene il vettore risultante che ha per modulo l'ampiezza e per fase la fase risultante (inessenziale)



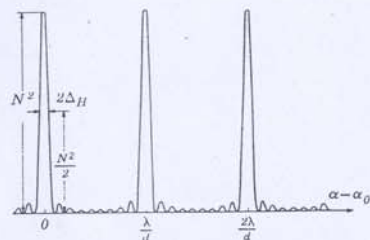
$$2r \sin \frac{\phi}{2} = A$$

$$2r \sin \frac{n\phi}{2} = A_R$$

La funzione

$$\frac{\sin^2 \frac{n\phi}{2}}{\sin^2 \frac{\phi}{2}}, \quad \phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta$$

ha l'andamento in figura:



I massimi principali sono situati a $\frac{\phi}{2\pi} = n$ $\sin \theta = \frac{n\lambda}{d}$ e il loro valore è n^2 (un'esaltazione enorme, da confrontare con il concetto di emissione coerente). La larghezza a semiintensità dei massimi principali si trova essere a $\Delta_n \sim \frac{1}{n}$ e il primo zero si trova a $\frac{\phi}{2\pi} = \frac{1}{n}$. I massimi secondari sono molto più piccoli; il primo vale $\frac{4}{9n^2} n^2$.

PRINCIPIO DI HUYGENS

Il principio può essere enunciato nella forma seguente:

la forma futura di ogni superficie d'onda è determinata assumendo che ogni punto di questa superficie emetta un'onda sferica e costruendo l'involuppo di tutte queste onde sferiche.

In un mezzo omogeneo questo involuppo è una superficie parallela alla superficie d'onda originaria.

Questa procedura porta ad esempio all'usuale risultato per la rifrazione e la riflessione.

Kirchoff provò che il principio di Huygens è una conseguenza esatta delle equazioni differenziali dell'ottica.

Esso costituisce la fondazione della teoria classica della diffrazione.

Tuttavia questa teoria è approssimata e valida solo per lunghezze d'onda sufficientemente corte, a causa dell'uso impreciso delle condizioni a contorno e dell'aver trascurato il carattere vettoriale del campo elettromagnetico.

Ricordiamo la derivazione della formula di Kirchoff per il caso di equazioni d'onda scalari: dal teorema di Green si otteneva:

$$f(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \hat{n} \left[\frac{\nabla' f(\vec{r}', t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} f(\vec{r}', t') - \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{c|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \frac{\partial f(\vec{r}', t')}{\partial t'} \right]_{t'=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}} dS$$

dove \hat{n} è la normale alla superficie, \vec{r}' appartiene alla superficie.

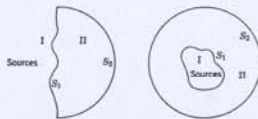
Assumendo che alla frontiera della superficie (che per ipotesi non racchiude sorgenti) l'onda sia monocromatica, per cui la sua dipendenza temporale è assunta essere $\exp -i\omega t$, risulta:

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{e^{ikR}}{R} \hat{n} \cdot \left[\nabla' f(\vec{r}') + ik \left(1 + \frac{1}{kR} \right) \frac{\vec{R}}{R} f(\vec{r}') \right] dS$$

dove $k = \frac{\omega}{c}$, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$

Per adattare questa relazione ai problemi di diffrazione dobbiamo definire appropriate geometrie: S_1 contiene le sorgenti, S_2 è la superficie

appropriata al problema da risolvere, S_2 e' la sfera (semisfera) all'infinito.



Possiamo assumere sui campi la condizione di radiazione sulla superficie S_2 (onde sferiche uscenti):

$$f \rightarrow \hat{f}(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial r} \rightarrow (ik - \frac{1}{r})$$

Con questa condizione su f si vede che l'integrale sulla (semi)sfera S_2 svanisce con l'inverso del raggio della (semi)sfera quando il raggio va all'infinito. Pertanto l'integrale di Kirchhoff si riduce nella regione II alla relazione:

$$f(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{e^{ikR}}{R} \hat{n} \cdot [\nabla' f(\vec{x}') + ik(1 + \frac{i}{kR}) \frac{\vec{R}}{R} f(\vec{x}')] dS$$

dove \hat{n} e' normale a S_1 e diretto verso l'interno della regione II.

Per applicare la formula di Kirchhoff occorre conoscere i valori di f e $\frac{\partial f}{\partial n}$ alla superficie S_1 .

In generale tuttavia non conosciamo esattamente queste quantita' perche' dovremmo aver risolto un problema complicato.

Utilizziamo allora l'approssimazione di Kirchhoff:

1. f e $\frac{\partial f}{\partial n}$ svaniscono ovunque su S_1 eccetto alle aperture

2. I valori di f e $\frac{\partial f}{\partial n}$ alle aperture sono uguali ai valori dell'onda incidente in assenza di ogni schermo od ostacolo.

C'e' un'ovvia inconsistenza in queste ipotesi: si dimostra infatti per l'equazione delle onde (monocromatiche) che la soluzione dentro un volume chiuso e' determinata univocamente specificando f (condizioni di Dirichlet) o $\frac{\partial f}{\partial n}$ (condizioni di Neumann) ma non entrambi simultaneamente perche' possono risultare mutuamente incompatibili.

L'approssimazione va bene per lunghezze d'onda piccole con aperture per la diffrazione grandi rispetto a una lunghezza d'onda.

Inoltre la teoria non puo' dare informazioni sulla polarizzazione perche' e' puramente scalare.

A grandi lunghezze d'onda l'approssimazione fallisce.

Un notevole miglioramento si ottiene scrivendo la versione vettoriale dell'integrale di Kirchhoff.

DIFFRAZIONE DI FRESNEL E FRAUNHOFER

Se le dimensioni dell'apertura nello schermo che causa la diffrazione sono piccole in confronto alle distanze della sorgente e dell'osservatore dallo schermo, definendo u il valore del campo sulla fenditura e u_p il valore del campo osservato a grande distanza la formula si semplifica alla relazione:

$$u_p = \int \frac{k}{2\pi i R} e^{ikr} u dS_n \quad R \approx r$$

Il calcolo di quest'ultima quantita' e' il problema che deve essere risolto nella soluzione dei piu' elementari problemi di diffrazione. Si distinguono due casi principali:

a) consideriamo la diffrazione a grandi distanze dietro lo schermo. Detta R' la distanza della sorgente dallo schermo e R la distanza dell'osservatore il criterio per la diffrazione di Fraunhofer (telescopica) e' (per fenditura di larghezza a):

$$ka^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \ll 1$$

Tutta la superficie della fenditura gioca un ruolo essenziale.

b) consideriamo invece il caso in cui sorgente e osservatore si trovano a distanza finita dallo schermo:

$$ka^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \gg 1$$

si ha diffrazione di Fresnel (microscopica).

In questo caso solo una piccola regione della superficie d'onda partecipa al fenomeno, quella che si trova in vicinanza del minimo cammino tra sorgente ed osservatore.

In generale si ha diffrazione di Fresnel quando nel fenomeno intervengono soltanto piccoli elementi della superficie d'onda.

PRINCIPIO DI BABINET

Due apparati di diffrazione sono detti 'complementari' se la fenditura del primo e' congruente allo schermo del secondo. Calcoliamo u_1 ed u_2 per la stessa sorgente primaria di luce e formiamo la loro somma.

Dal principio di Huygens discende la relazione $u_1 + u_2 = u$ dove u e' l'illuminazione primaria al punto di osservazione quando entrambi gli apparati sono assenti.

Questo in quanto l'integrale di Kirchhoff deve essere ora esteso all'intera superficie (infinita) che appartiene o all'apparato 1 o all'apparato 2 e pertanto corrisponde alla propagazione libera tra sorgente ed osservatore. Questo principio si applica quindi sia alla diffrazione di Fresnel che a quella di Fraunhofer: principio di Babinet.

Tuttavia questo principio non riguarda le intensita' ma le ampiezze.

Nel caso di diffrazione di Fraunhofer si puo' tradurre il principio in una relazione sulle intensita':

due schermi complementari producono figure di diffrazione di uguale intensita'.

Questo in quanto per fasci concentrati la luce andrebbe solo in avanti (dove non vale il principio) e pertanto $u = 0$ ovunque altrove, da cui:

$$u_1 = -u_2 \quad |u_1|^2 = |u_2|^2$$

N.B. Nella teoria della diffrazione di solito si parla di schermo nero (assorbente). In realta' sperimentalmente il risultato non cambia purché lo schermo sia opaco (non passa luce): nella teoria di Maxwell questo richiede uno schermo perfettamente riflettente.

Prima di discutere esempi concreti di diffrazione chiariamo due punti di principio che discendono da quanto detto finora.

LIMITE DELL'OTTICA GEOMETRICA

Quando le frequenze vanno ad infinito $\lambda \rightarrow 0$ otteniamo il limite dell'ottica geometrica

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \infty \quad (k = \sqrt{\epsilon\mu} \frac{\omega}{c})$$

ma assumiamo

$$u = A e^{ik_0 S}$$

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c} \rightarrow \infty$$

A e' detta ampiezza ed S e' detta iconale.

A, S sono funzioni lentamente variabili della posizione, anche se k dipende dalla posizione.

Risulta allora:

$$\Delta u + k^2 u = -k_0^2 u \left[(\vec{\nabla} S)^2 - \frac{k^2}{k_0^2} \right] + 2ik_0 u \left[\frac{1}{2} \Delta S + \vec{\nabla} \ln A \cdot \vec{\nabla} S \right]$$

piu' termini che non diventano infiniti a $k_0 \rightarrow \infty$

Quindi una soluzione approssimata per $k_0 \rightarrow \infty$ si ottiene da:

$$(\vec{\nabla} S)^2 = n^2 \quad n = \frac{k}{k_0} \quad n \text{ indice di rifrazione}$$

$$\vec{\nabla} \ln A \cdot \vec{\nabla} S = -\frac{1}{2} \Delta S$$

Equazione differenziale dell'iconale.

Notiamo che A e' determinato solo dal suo gradiente lungo il gradiente dell'iconale.

Quindi sono possibili discontinuita' di A nelle direzioni perpendicolari al gradiente dell'iconale.

Le superficie S = costante sono superficie di fase costante (superficie d'onda).

La direzione del gradiente di S e' normale alla superficie d'onda ed e' quindi la direzione del raggio.

Se n varia nello spazio i raggi sono curvi.

Se n = costante la soluzione piu' semplice e':

$$S = n \vec{\alpha} \cdot \vec{x} \quad \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} = 1$$

Le superficie d'onda sono piani, i raggi sono rette nella direzione. Anche per altre soluzioni (sferiche, cilindriche) i raggi sono rette.

L'ombra in ottica geometrica e' delimitata dalle direzioni dei raggi rettilinei che emergono dalla sorgente luminosa.

Nella direzione perpendicolare al limite dell'ombra A decresce a zero con discontinuita', il che e' compatibile con le equazioni.

Nel caso limite non c'e' diffrazione.

La visione e' basata sul presupposto psicologico della validita' dell'ottica geometrica: noi vediamo il sole in un punto del cielo in cui non e' veramente, dopo che e' tramontato, perche' proiettiamo all'indietro come rettilinei i raggi curvati dall'atmosfera.

Il bordo di uno schermo ci appare come una linea luminosa perche' proiettiamo rettilineamente all'indietro i raggi dell'onda cilindrica, ma in realta' il campo in vicinanza dello spigolo dello schermo e' continuo.

Notiamo che l'iconale e' un'equazione di Hamilton-Jacobi: c'e' una precisa analogia con la meccanica classica.

Allo stesso modo la meccanica classica e' il limite geometrico (iconale) della meccanica quantistica (ondulatoria) (cfr. il metodo WKB)

L'OMBRA IN OTTICA ONDULATORIA

Consideriamo il problema dell'ombra in ottica ondulatoria, specializzando l'equazione (principio di Huygens):

$$u_p = \int \frac{k}{2\pi i R} e^{ikR} u(\hat{R} \cdot \hat{n}) dS$$

al caso di sorgente puntiforme $u = A \frac{e^{ikR'}}{R'}$

$$u_p = A \int \frac{k}{2\pi i R R'} e^{ik(R+R')} (\hat{R} \cdot \hat{n}) dS$$

Si puo' dimostrare direttamente, nel limite di $k \rightarrow \infty$, che a) quando il punto della congiungente S e P giace sullo schermo allora

$u_p \rightarrow 0$ ombra, prodotta dall'interferenza delle onde secondarie originate sull'apertura

b) quando il punto della congiungente giace sull'apertura allora

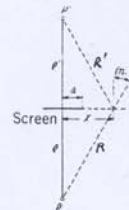
$u_p \rightarrow A \frac{e^{ik(R+R')}}{R+R'}$ onda sferica primaria a distanza R + R' dalla sorgente.

Completiamo la nostra discussione del problema dell'ombra considerando gli effetti di diffrazione dietro un disco circolare o attraverso un'apertura circolare:

$$u_p = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{2\pi i} e^{ik(R+R')} \left(\frac{\hat{n} \cdot \hat{R}}{R R'} \right) 2\pi x dx$$

Scegliamo per comodita' $\rho' = \rho$ (non influisce sul risultato finale qualitativo)

$$u_p = \frac{Ak}{2\pi i} 2\pi \int_{\sqrt{\rho^2+a^2}}^{\infty} \frac{e^{2ikR}}{\sqrt{\rho^2+a^2}} \frac{dR}{R^2} \rightarrow \frac{A \rho}{2} \frac{e^{2ik\sqrt{\rho^2+a^2}}}{\rho^2+a^2}$$



Definendo l'eccitazione primaria al bordo del disco:

$$u_p = A \frac{e^{ikR'}}{R'} = A \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+a^2}}}{\sqrt{\rho^2+a^2}}$$

troviamo:

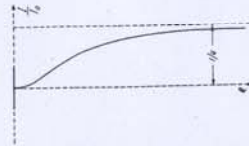
$$u_p = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+a^2}} e^{ik\sqrt{\rho^2+a^2}} u_p$$

e per le intensita' risulta:

$$I = |u_p|^2, \quad I_0 = |u_p|^2 \quad I = \frac{1}{4} \frac{\rho^2}{\rho^2+a^2} I_0$$

Non c'e' ombra da nessuna parte lungo la perpendicolare centrale dietro un

disco circolare opaco
(diffrazione di Poisson)



Per capire la generalità confrontiamo col caso di un'onda piana incidente. Banalmente risulta:

$$I = \frac{p^2}{p^2+a^2} I_0$$

A grande distanza il disco non si vede.

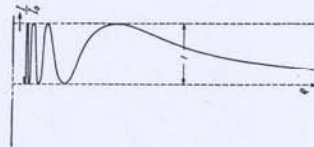
Consideriamo ora il caso di fenditura circolare. Cambiando solo i limiti di integrazione si ottiene:

$$u_p = A_p \int_0^{\sqrt{p^2+a^2}} e^{i\kappa R} \frac{dR}{R^2} = \frac{A}{S} e^{i\kappa p} \left\{ 1 - \frac{S^2}{p^2+a^2} e^{i\kappa (\sqrt{p^2+a^2}-p)} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{A}{2p} e^{i\kappa p} e^{\frac{i\kappa a^2}{2p}} \left\{ -2i \sin \frac{\kappa a^2}{2p} \right\}$$

da cui la relazione:

$$I = I_0 \sin^2 \frac{\kappa a^2}{2p}$$



In un numero infinito di siti sull'asse perpendicolare l'intensità si annulla.

In questo caso palesemente non c'è una relazione tra le intensità complementari, mentre il principio di Babinet vale per le ampiezze, cosa che si può verificare notando che, con la precisione usata nelle approssimazioni precedenti:

$$\int_0^\infty e^{i\kappa R} \frac{dR}{R^2} = \frac{i}{2\kappa} \frac{e^{i\kappa p}}{p^2}$$

FORMULA GENERALE DELLA DIFFRAZIONE

Sempre considerando il fatto che il contributo dominante alla diffrazione viene prevalentemente dai cammini ottici vicini al cammino minimale predetto dall'ottica geometrica, possiamo riformulare la soluzione, sempre nel caso di sorgente puntiforme, adattandola al nostro caso, il che significa assumere che \hat{r}, \hat{r}' , R ed R' variano poco nel dominio effettivo di integrazione.

Risulta allora:

$$u_p = \frac{Ak(\hat{r}, \hat{r}')}{2\pi i RR'} \int e^{i\kappa(r+r')} d\xi d\eta \quad R, R' \text{ minimali}$$

dove ξ, η sono le variabili che parametrizzano la superficie di integrazione misurate a partire dal punto in cui passa il cammino minimale.

Poiché l'oscillazione e' per ipotesi ad alta frequenza, sviluppiamo r, r' in potenze di ξ, η (metodo di punto sella):

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2} = \sqrt{R^2 - 2(x\xi + y\eta) + (\xi^2 + \eta^2)}$$

$$\approx R - \frac{x\xi}{R} - \frac{y\eta}{R} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R} - \frac{(x\xi + y\eta)^2}{2R^3}$$

$$= R - (\alpha\xi + \beta\eta) + \frac{\xi^2 + \eta^2 - (\alpha\xi + \beta\eta)^2}{2R}$$

α, β coseni direttori del raggio diffratto rispetto agli assi ξ, η
Analogamente:

$$r' = R' + (\alpha_0\xi + \beta_0\eta) + \frac{\xi^2 + \eta^2 - (\alpha_0\xi + \beta_0\eta)^2}{2R'}$$

e pertanto:

$$u_p = \frac{Ak}{2\pi i RR'} (\hat{r}, \hat{r}') e^{i\kappa(R+R')} \int d\xi d\eta e^{-i\kappa\Phi}$$

dove:

$$\Phi = (\alpha - \alpha_0)\xi + (\beta - \beta_0)\eta - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} + \frac{(\alpha\xi + \beta\eta)^2}{2R} + \frac{(\alpha_0\xi + \beta_0\eta)^2}{2R'}$$

DIFFRAZIONE DI FRAUNHOFER

E' il caso semplice dell'equazione precedente: per $R \rightarrow \infty, R' \rightarrow \infty$ risulta:

$$\Phi = (\alpha - \alpha_0)\xi + (\beta - \beta_0)\eta$$

A questo punto l'integrazione e' in linea di principio elementare in quanto si riduce al calcolo della trasformata di Fourier trasversa dell'apertura dello schermo:

posto \vec{k} vettore d'onda incidente
 \vec{k}' vettore d'onda diffratta
 $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$ variazione del vettore d'onda nella diffrazione

q giace sul piano della fenditura e si ottiene:

$$\kappa\Phi = \vec{q} \cdot \vec{x} \quad \vec{x} = (\xi, \eta)$$

Consideriamo alcuni casi particolari.

Rettangolo

$$u_p \sim \kappa \int_{-A}^A e^{-i\kappa(\alpha - \alpha_0)\xi} d\xi \int_{-B}^B e^{-i\kappa(\beta - \beta_0)\eta} d\eta = \kappa \Delta \frac{\sin x}{x} \frac{\sin y}{y}$$

dove $\Delta = 4AB$ area del rettangolo

$$x = \kappa A (\alpha - \alpha_0)$$

$$y = \kappa B (\beta - \beta_0)$$

e per le intensità vale:

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2$$

dove $I_0 \sim (\kappa\Delta)^2$ e' l'intensità al centro della figura di diffrazione