

Appunti del Corso di

FISICA DEGLI ACCELERATORI

A. A. 2006 - 2007

Questi appunti sono basati sul materiale delle dispense dei corsi di Acceleratori di Particelle del prof. S. Tazzari (Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", Roma, Italia), a cui vanno i miei ringraziamenti. D. Bulfone

CAPITOLO I. Considerazioni generali 2

1.1. Introduzione 2

1.2. Il concetto di fascio di particelle 3

1.3. Caratteristiche di un fascio di particelle 3

1.4. Parti di un acceleratore 6

1.5. Gli acceleratori di particelle come microscopii 7

1.5.1. Energia e risoluzione spaziale 7

1.5.2. Energia necessaria perché un protone produca la reazione ${}_3\text{Li}^7 + p = 2 {}_2\text{He}^4$ 8

Bibliografia 9

APPENDICE 1.1 10

Dinamica di una particella sottoposta alla forza di Lorentz. 10

A1.1.1. Lavoro della forza 10

A1.1.2. Rigidità magnetica e rigidità elettrica 10

A1.2.1 – Grandezze fisiche e costanti fondamentali 14

Tabella A1.1 14

Appendice A1.2 - Ricapitolo formule di meccanica relativistica 15

A1.2.1. Quantità di moto (o 'momento') 15

A1.2.2. Energia 15

A1.2.3. Relazioni fra la quantità di moto e l'energia 16

A1.2.4. Quadrivettore energia-impulso (o 'quadrimento') 17

A1.2.4. 1. Definizioni 17

A1.2.4.2. Applicazione al caso di fasci collidenti 18

A1.2.4.3. Esempi. 20

CAPITOLO I. Considerazioni generali

1.1. Introduzione

Per a. di particelle si intende un apparecchio capace di trasferire energia a particelle cariche per mezzo di campi elettrostatici o elettromagnetici portandole da una energia cinetica iniziale, T_i , ad una finale, T_f . Le particelle cariche sono prodotte da una sorgente all'energia cinetica T_i , vengono 'iniettate' nell'a., accelerate sino alla energia T_f e quindi utilizzate (v. schema di Fig.1.1). L'energia cinetica finale T_f può essere maggiore, uguale o minore di T_i . Nel primo caso abbiamo un acceleratore vero e proprio, nel secondo si dice che la macchina è un accumulatore, nel terzo - caso peraltro poco frequente - si ha un "deceleratore". Non è escluso che una stessa macchina, opportunamente progettata, possa svolgere in sequenza le tre funzioni. Parleremo comunque sempre di acceleratore e di accelerazione, in senso lato.



Figura 1.1. Schema di un acceleratore.

Si accelerano i più diversi tipi di particelle subatomiche cariche stabili, dalle più leggere quali elettroni negativi o positivi (positroni), ai protoni e protoni negativi (antiprotoni), agli atomi ionizzati (ioni) dai più leggeri ai più pesanti come ad esempio quelli di Uranio. Nel seguito parleremo genericamente di elettroni, protoni, ioni, senza specificarne il segno della carica.

1.2. Il concetto di fascio di particelle

Idealmente le particelle emesse dalla sorgente ed iniettate nell'acceleratore con certe condizioni iniziali ideali, dovrebbero percorrere una certa ben definita traiettoria, la traiettoria principale.

Ad esempio, nel caso di un acceleratore lineare questa è un segmento di retta coincidente con l'asse della macchina; l'analogo ottico è la traiettoria del raggio luminoso che percorre l'asse di un telescopio.

Negli acceleratori detti "circolari", la traiettoria principale può invece essere un cerchio, una figura chiusa approssimativamente circolare - di solito formata da archi di cerchio e segmenti di retta - o anche una curva aperta, di solito spiraliforme.

Peraltro, in ogni caso reale, un insieme di particelle verrà iniettato con una distribuzione di condizioni iniziali attorno a quelle ideali e comunque, nel moto attraverso l'acceleratore, sarà soggetto a forze non necessariamente esattamente identiche per ciascuna particella.

Perché l'acceleratore stesso possa accelerare un numero finito di particelle è evidentemente necessario che esista, nello spazio delle variabili che caratterizzano il moto, una zona stabile, tale cioè che le particelle che si trovano in essa siano tutte accelerate.

L'insieme delle particelle che occupano questa zona si chiama **fascio** (di particelle). Un fascio di particelle è l'analogo di un fascio di luce in ottica, ed è, come quello, caratterizzato da una distribuzione (forma) nello spazio e nel tempo e da una distribuzione in energia (analoga alla distribuzione in colore della luce visibile). Forma e distribuzione, in energia e nello spazio-tempo, possono in genere variare in funzione della posizione lungo la macchina.

1.3. Caratteristiche di un fascio di particelle

Uno dei parametri fondamentali è costituito dall'energia cinetica finale ottenibile, T_f . Quest'ultima dipende dal tipo di particella accelerata e dal tipo di acceleratore. Il suo valore può variare da pochi keV fino ai massimi, richiesti per lo studio della fisica delle particelle elementari, che sono oggi nell'ordine delle decine di TeV ($1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$), ottenuti con macchine a protoni.

Aggiungiamo che energie ed intensità di corrente accelerate sono cresciute molto rapidamente nel corso degli ultimi anni : nella classe degli acceleratori circolari sono in costruzione o in progetto macchine con T_f fino a 20 TeV con intensità media di corrente (ad energie più basse)

fino all'ordine dell'ampère.

Riguardo alle energie, la figura 1.2.1 riporta, in funzione del tempo, le massime raggiunte con diversi tipi di acceleratori: va notato che l'incremento di circa tre ordini di grandezza ogni venti anni, è stato dovuto alla continua introduzione di nuove idee e quindi di nuove tecniche di accelerazione, piuttosto che al perfezionamento di acceleratori e metodi noti.

L'andamento nel tempo dell'energia massima resa disponibile nel sistema del centro di massa dai grandi collisori per elettroni e protoni è invece riportata in figura 1.2.2.

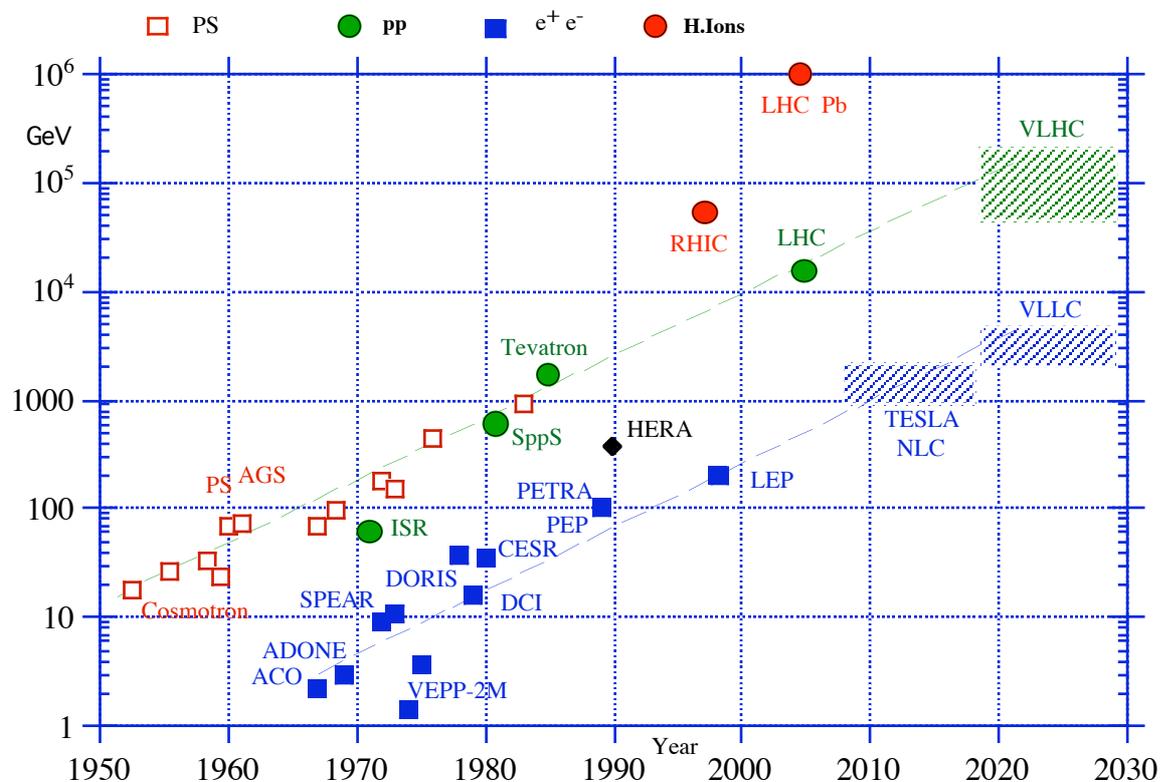


Figura 1.2.2 - Andamento delle massime energie di PS e collisori in funzione del tempo.

Le energie dei collisori indicate sono quelle rese disponibili nel sistema del centro di massa.

Le applicazioni degli acceleratori [1], [2], [3], sono divenute assai numerose anche in campi diversi da quelli tradizionali della ricerca in fisica delle particelle.

Basti citare quelle mediche in diagnostica e radioterapia, quelle alla ricerca in fisica dello stato solido e nel campo dei Laser, le svariate applicazioni industriali. Lo sviluppo e le specializzazioni degli acceleratori non sono più quindi strettamente legati unicamente al conseguimento di energie sempre più alte.

Tab. 1: World wide inventory of accelerators, in total 15,000.
 Data collected by W. Scarf and W. Wieszczycka
 (U. Amaldi Europhysics News, June 31, 2000)

Category	Number
Ion implanters and surface modifications	7,000
Accelerators in industry	1,500
Accelerators in non-nuclear research	1,000
Radiotherapy	5,000
Medical isotopes production	200
Hadron therapy	20
Synchrotron radiation sources	70
Nuclear and particle physics research	110

Un altro parametro importante è il numero di particelle accelerate per unità di tempo, \dot{n}_a . Più in generale, si definisce \dot{n}_a come il numero di particelle che attraversa, nell'unità di tempo, una determinata sezione dell'acceleratore; detta poi q la carica delle particelle accelerate si usa definire l'**intensità di corrente** media accelerata, i , come:

$$i = q\dot{n}_a \quad . \quad (1.1)$$

I fasci di particelle possono essere continui od impulsati. Per i fasci impulsati varieranno in generale, durante l'accelerazione ed il trasporto, anche la forma e la durata degli impulsi. Se il fascio è impulsato il valore della corrente mediato sulla durata dell'impulso è detto 'di picco' mentre quello mediato sull'unità di tempo è detto 'medio'. Intensità di corrente di picco di molte migliaia di ampere possono venire accelerate ad energie dell'ordine delle decine di MeV (1 MeV = 10^6 eV) con macchine specializzate, normalmente della classe degli acceleratori lineari .

Oltre all'energia finale e all'intensità, le caratteristiche desiderabili in un fascio di particelle sono in generale: buona definizione in energia, piccola divergenza angolare e piccole dimensioni.

E' importante osservare che la dinamica della singola particella dipende in generale sia dai campi esterni e sia da quelli creati nell'ambiente circostante dal moto della particella carica stessa. La dinamica della particella di un fascio dipende inoltre anche dai campi originati dalle altre particelle del fascio, in interazione fra loro e con l'ambiente circostante, che danno luogo a quelli che si chiamano effetti collettivi. Aumentando l'intensità del fascio, gli effetti collettivi possono divenire distruttivi ed il concetto di fascio può perdere di significato.

Sia gli effetti di particella singola che quelli collettivi possono dare luogo ai fenomeni di instabilità che sono all'origine della gran parte delle limitazioni sulla corrente di fascio accelerabile o sulla qualità del fascio stesso.

1.4. Parti di un acceleratore

Le particelle provenienti dalla sorgente hanno in generale energie molto basse ($\leq \approx 1$ MeV) e non possono essere direttamente iniettate nell'acceleratore principale. Questo è dunque per lo più preceduto da uno o più macchine acceleratrici intermedie dette 'pre-iniettori' o 'iniettori'; ad esempio, nella figura 1.3, è illustrato schematicamente il caso di un preiniettore ed un iniettore. I valori di T_f , T_k , T_j , T_i , possono differire l'uno dall'altro anche di uno o più ordini di grandezza.

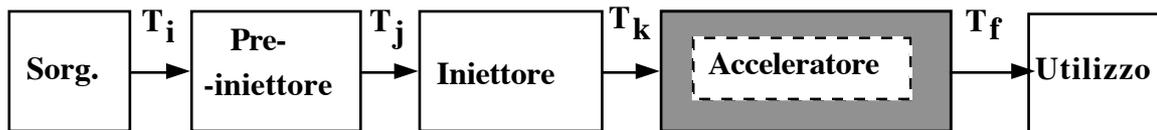


Fig. 1.3 Componenti del sistema di accelerazione

Dal punto di vista tecnico distinguiamo, nel corpo del sistema di accelerazione, i seguenti principali sottosistemi :

- Di iniezione che raccoglie le particelle da accelerare, provenienti attraverso canali di trasporto dalla sorgente o dall'iniettore, e le immette nell'acceleratore con le corrette condizioni iniziali.

- Di guida e focalizzazione che produce i campi necessari a controllare il percorso all'interno dell'acceleratore delle particelle da accelerare.

- Di accelerazione che fornisce i campi necessari ad accelerare le particelle.

- Di estrazione che, alla fine del ciclo di accelerazione, estrae le particelle dall'acceleratore e le convoglia verso l'utilizzo. Da notare che in alcuni particolari tipi di acceleratore, come ad esempio gli accumulatori ed i collisori, le particelle vengono utilizzate direttamente all'interno dell'acceleratore. In tal caso, ovviamente, il sistema di estrazione manca.

- Da vuoto che comprende la camera sotto vuoto nella quale le particelle viaggiano all'interno dell'acceleratore, e le apparecchiature relative.

- Di alimentazioni di potenza (in continua e impulsive)

- Di diagnostica dei fasci

- Di controllo dell'acceleratore

1.5. Gli acceleratori di particelle come microscopii

1.5.1. Energia e risoluzione spaziale

Scopo 'storico' degli acceleratori è l'accelerazione di particelle cariche per produrre reazioni nucleari. Il loro sviluppo nei primi decenni del secolo è stato infatti strettamente connesso alle esigenze prima della fisica nucleare e poi della fisica delle particelle elementari: queste richiedevano infatti, per i loro esperimenti, fasci di particelle di energia sempre più alta e di caratteristiche sempre più spinte.

Ad esempio, lo studio della distribuzione di carica dei nuclei atomici, intrapreso da Rutherford utilizzando la diffusione di particelle cariche lanciate contro i nuclei stessi, richiedeva che l'energia della particella usata come sonda fosse almeno tale da superare la barriera Coulombiana dei nuclei stessi (v. Esercizio al § 1.5.2).

Una volta superate le soglie di questo tipo, la ragione della richiesta di energie sempre più elevate è nel fatto che tanto più alta è l'energia tanto maggiore è la risoluzione ottenibile nell'osservazione di strutture spaziali. Ciò perché esiste un limite diffrattivo alla risoluzione stessa, determinato in ultima analisi dal Principio di indeterminazione :

$$\Delta x \Delta p \approx h.$$

Il Δx corrispondente al quanto di energia $h\nu$:

$$\Delta x \approx \frac{h}{\Delta p} = \frac{h}{(h\nu/c)} = \frac{c}{\nu} = \lambda \quad (1.5.2)$$

costituisce il limite di risoluzione spaziale. La meccanica quantistica (De Broglie) ci dice poi che ad una particella di massa m e momento p è associata una lunghezza d'onda λ data dalla :

$$\lambda = \frac{h}{p} . \quad (1.5.3)$$

Poiché l'energia totale, E , della particella - di massa a riposo m_0 e velocità βc - è data dalla relazione di Einstein

$$E = mc^2 = m_0 c^2 + T \quad (1.5.4)$$

ed è legata al momento dalla (A1.2.7)

$$pc = \beta E,$$

introducendo il fattore relativistico, γ , e la lunghezza d'onda Compton della particella, λ_c , definiti dalle

$$E = \gamma \cdot m_0 c^2 \equiv \gamma \cdot E_0, \quad \lambda_c = \frac{h}{m_0 c}, \quad (1.5.5)$$

con E_0 energia di riposo della particella, si ottiene l'espressione per la lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{\lambda_c}{\beta\gamma} \xrightarrow{\beta \approx 1} \frac{\lambda_c}{\gamma} \quad (1.5.6)$$

In definitiva per la risoluzione ottenibile si ricava dalle (1.5.2) e (1.5.6) l'espressione:

$$\Delta x \approx \frac{\lambda_c}{\gamma} \quad (1.5.7)$$

La risoluzione spaziale risulta perciò inversamente proporzionale al fattore relativistico e quindi all'energia della particella usata, cvd.

A titolo di esempio confrontiamo le risoluzioni spaziali ottenibili con un protone ed un elettrone di pari energia cinetica, eguale ad 1 GeV.

Le lunghezze d'onda Compton del protone e dell'elettrone sono rispettivamente :

$$\begin{aligned} \lambda_{cp} &= 1.3 \cdot 10^{-13} \text{ cm} = 1.3 \text{ Fermi} \\ \lambda_{ce} &= 2.4 \cdot 10^{-10} \text{ cm} = 2400 \text{ Fermi.} \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

Un elettrone con 1 GeV di energia cinetica ha $E = 1.0005 \text{ GeV} \approx 1 \text{ GeV}$.

Si ha perciò $\gamma_e = 1000/0.511 = 1957$

Un protone con 1 GeV di energia cinetica ha invece $E_p = 1.938 \text{ GeV}$ e si ha pertanto:

$$\gamma_p = 1938/938 = 2.07$$

In definitiva quindi

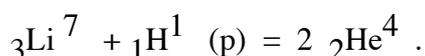
$$\gamma_p \approx 2 ; \quad \gamma_e \approx 2000 \quad (1.5.10)$$

da cui segue che :

$$\Delta x_p \approx 0.7 \text{ Fermi} ; \quad \Delta x_e \approx 1.2 \text{ Fermi} . \quad (1.5.11)$$

due valori non troppo lontani fra loro !

1.5.2. Energia necessaria perché un protone produca la reazione ${}_3\text{Li}^7 + p = 2 {}_2\text{He}^4$ Una delle prime reazioni nucleari artificialmente prodotte (Rutherford) fu la:



Perché la reazione possa avvenire il protone deve avere un'energia sufficiente a superare la barriera di potenziale coulombiana del nucleo di Litio e deve essere quindi accelerato. L'energia da raggiungere si stima come segue :

- Il potenziale coulombiano di un nucleo di carica Ze e raggio R , a distanza r dal centro del nucleo è

$$U(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1.5.3)$$

- Perché una protone (carica unitaria positiva) con energia cinetica T possa arrivare fino a distanza R dal centro del nucleo (in un urto frontale), deve dunque essere :

$$T = eU(R) = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (1.5.4)$$

- Ma per il raggio di un nucleo di numero di massa A si ha :

$$R = R_0 A^{1/3} \text{ cm}, \text{ dove } R_0 = 1.2 \cdot 10^{-13} \text{ cm} = 1.2 \text{ Fermi} \quad (1.5.5)$$

e quindi per il Litio, che ha $A = 7$ e $Z = 3$:

$$R_{Li} = 2.15 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (1.5.6)$$

ed infine :

$$T = \frac{3 \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{4\pi \cdot 8.86 \cdot 10^{-12} \cdot 2.3 \cdot 10^{-15}} \approx 3 \cdot 10^{-13} \text{ J} \quad (1.5.7)$$

- Se il protone è stato accelerato fino all'energia T attraverso una differenza di potenziale V , deve evidentemente aversi $T = eV$ da cui, ricavando V :

$$V = U(R) = \frac{T}{e} = \frac{3 \cdot 10^{-13}}{1.6 \cdot 10^{-19}} \approx 1.9 \text{ MV} \quad (1.5.8)$$

Si noti che tratta di un calcolo di ordine di grandezza in quanto il valore del raggio è approssimato ed inoltre il protone ha in pratica una certa probabilità di raggiungere il nucleo, per effetto tunnel, anche per energie parecchio più basse.

Bibliografia

- [1] *O. Barbalat*, "Technology and Industrial Spin-off from Particle A.", CERN A. School, III General Course Sept 1988 - CERN Report 89-05, April 20 1989; "Technological spin-off from accelerators", CERN Courier 34, n.4, May 1994 and n. 6, August 1994; " *Applications of Particel Accelerators* ", CERN A. School, V General a. Course, Cern Rep.94/01, Jan 1994.
- [2] Session on "Technology Transfer - Policy and Practice in Accelerator Laboratories", Proc. of the IV European Particle Accelerator Conference (EPAC), London, June 1994
- [3] *W. Pohlit*, "Accelerators for therapy", CERN A. School, V General a. Course, Cern Rep.94/01, Jan 1994.

APPENDICE 1.1

Dinamica di una particella sottoposta alla forza di Lorentz.[A1.1.1.Lavoro della forza](#)

Su una particella carica con carica q , che si muove con velocità \mathbf{v} in una regione di spazio nella quale esistono dei campi elettrici \vec{E} , e magnetici, \vec{B} , agisce la forza di Lorentz data da :

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{F}_E + \vec{F}_B \quad (\text{A1.1.1})$$

Ricordiamo che la variazione di energia cinetica della particella in questione è dovuta soltanto al termine che contiene il vettore \vec{E} , mentre il termine che contiene il vettore \vec{B} produce soltanto una variazione della direzione della quantità di moto.

[A1.1.2. Rigidità magnetica e rigidità elettrica](#)

Per definire e controllare la traiettoria delle particelle possono usarsi sia campi elettrici e sia campi magnetici. Vogliamo però qui mostrare che - a meno di casi particolari - conviene in pratica usare campi magnetici.

Cominciamo con l'assumere che, nella regione di spazio nella quale si trova la particella, vi siano soltanto campi magnetici; l'equazione del moto diviene allora

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad . \quad (\text{A1.1.13})$$

Poiché il campo magnetico non fa lavoro, il modulo di \vec{p} , il modulo di \vec{v} e la massa m saranno costanti .

Assumendo che il moto si svolga su di un piano (una ipotesi sufficientemente rappresentativa delle situazioni reali comuni) e riferendosi alla Fig. A1.1.4, si ha, per l'elemento di angolo $d\varphi$ sotteso dall'elemento di traiettoria ds :

$$d\varphi = \frac{|d\vec{v}|}{v} \quad \text{ed anche} \quad v = \rho \frac{d\varphi}{dt} \quad (\text{A1.1.14})$$

ρ essendo il raggio di curvatura locale della traiettoria stessa.

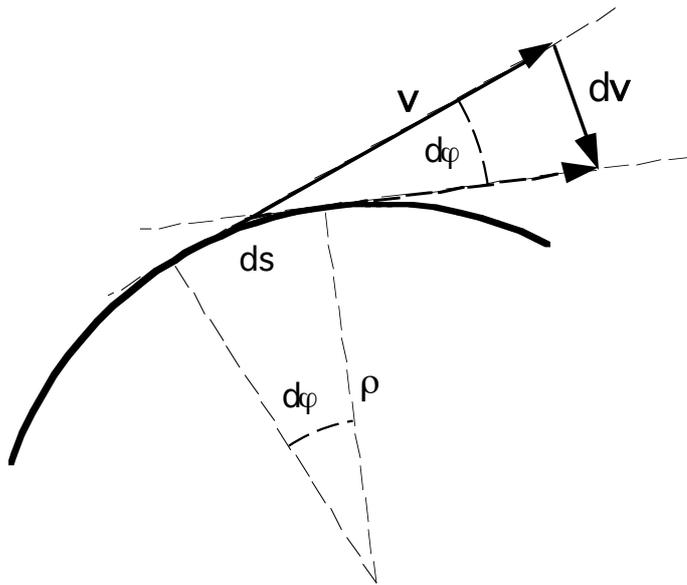


Figura A1.1.4. - Geometria della traiettoria

Sostituendo la prima delle (A1.1.14) nella seconda, si ottiene poi

$$v = \rho \frac{1}{v} \cdot \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right|, \quad (\text{A1.1.15})$$

ovvero la relazione

$$\left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = \frac{v^2(\varphi)}{\rho(\varphi)} = \omega^2(\varphi) \cdot \rho(\varphi). \quad (\text{A1.1.16})$$

Le dipendenze da φ scompaiono poi, evidentemente, se il campo magnetico è costante e si ha per l'accelerazione centripeta la ben nota

$$a_c = \frac{v^2}{\rho_0} = \omega^2 \rho_0, \quad (\text{A1.1.17})$$

in cui la frequenza $\omega/(2\pi)$ è chiamata "frequenza di ciclotrone".

Definiamo ora - per semplicità riferendoci al caso di particelle che si muovono in un piano, ad esempio $z=0$, ortogonale alla direzione del campo magnetico, \mathbf{B} - la grandezza '**rigidità magnetica**', data dal prodotto del valore del campo magnetico per il raggio di curvatura della particella.

Nella ipotesi semplificativa adottata, la (A1.1.13) si riduce a

$$m \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = m \frac{v^2}{\rho} = qvB \quad (\text{A1.1.18})$$

da cui, poiché $p = mv$, si trae la relazione

$$\rho = \frac{p}{qB} \equiv \frac{\chi_B}{B}, \quad (\text{A1.1.19})$$

che definisce appunto la rigidità magnetica della particella, χ_B :

$$\chi_B = \rho B = \frac{p}{q}. \quad (\text{A1.1.20})$$

che nel caso ultrarelativistico diviene

$$\chi_B = \rho B = \frac{E}{cq} \quad \text{o, in unità pratiche} \quad \chi_B = \rho(m) B(T) = \frac{E(\text{GeV})}{0.2998} \quad (\text{A1.1.20.1})$$

quest'ultima una formula molto utile, da ricordare.

Un'utile variante è la

$$\chi_B = \frac{m \omega \rho}{q} \quad \text{ovvero} \quad \omega = \frac{\chi_B q}{m \rho}. \quad (\text{A1.1.21})$$

La ragione del nome "rigidità magnetica" è evidente dalla (A1.1.19) : in un determinato tratto e a parità di campo magnetico tanto maggiore è la rigidità tanto meno la particella viene curvata.

Consideriamo ora di essere in presenza di solo campo elettrico. Per confrontare il suo effetto con quello del campo magnetico trattato sopra, a parità di condizioni, assumiamo che esso giaccia nel piano $z=0$, che sia ortogonale alla velocità della particella - così da non compiere lavoro - e che abbia modulo E_N .

Procedendo secondo le stesse linee seguite per il caso precedente si arriva evidentemente alla

$$m \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = m \frac{v^2}{\rho} = q E_N \quad (\text{A1.1.22})$$

Definendo la **rigidità elettrica**, χ_E , come prodotto del raggio di curvatura per l'intensità del campo elettrico si ottiene poi :

$$\chi_E = \rho E_N = \frac{p}{q} \cdot v \quad (\text{A1.1.23})$$

E' dunque evidente che, a parità di momento p e di carica q , la rigidità elettrica è maggiore di quella magnetica per un fattore v , il che rende estremamente sfavorevole l'uso di campi elettrici per la deflessione di particelle relativistiche.

In conclusione dunque,

- per accelerare particelle cariche è necessario usare campi elettrici,
- per defletterle conviene usare campi magnetici.

Va infine notato che talvolta l'uso di campi elettrici per la deflessione può divenire necessario. Un classico esempio è quello della separazione di fasci di carica e velocità opposte che viaggiano sulla stessa traiettoria; in tal caso infatti, poiché la forza di Lorenz $q\vec{v} \times \vec{B}$ è invariante per inversione simultanea del segno di q e del verso di \vec{v} , un campo magnetico è inefficace.

ESEMPIO : Rigidità magnetica ed elettrica di un elettrone da 1 GeV.

Consideriamo il caso di una particella relativistica - ad esempio un elettrone di energia cinetica pari ad 1 GeV, che si muove nel piano $z=0$, sottoposto all'azione di un campo magnetico, $B=1$ T, parallelo all'asse z . Si noti che il valore di 1 T è stato scelto in quanto tipicamente ottenibile senza particolari difficoltà con un elettromagnete. La rigidità magnetica corrispondente vale

$$\chi_B = p/e \approx 10^9 / (3 \cdot 10^8) \approx 3.3 \text{ (J s / m C)}. \quad (\text{A1.1.24})$$

Il raggio di curvatura dell'elettrone è dunque

$$\rho = \chi_B / B \approx 3.3 \text{ m}. \quad (\text{A1.1.25})$$

La rigidità elettrica è evidentemente circa $3 \cdot 10^8$ volte maggiore e, per ottenere lo stesso raggio di curvatura, occorrerebbe un campo elettrico normale di intensità pari a

$$E_N = \chi_E / \rho \approx [3.3 \cdot 3 \cdot 10^8 / 3.3] \text{ V/m} = 300 \text{ MV/m}, \quad (\text{A1.1.26})$$

un valore molto grande, in pratica non realizzabile (con campi elettrostatici).

Appendice A1.1.2 - Dimensioni e valori di alcune delle principali costanti fondamentali

A1.2.1 – Grandezze fisiche e costanti fondamentali

Tabella A1.1

GRANDEZZA	Simbolo	Definiz.	Valore	U. di m.	Dimensioni
Forza	F	-	-	N	[M L T ⁻²]
Energia	E	-	-	J, eV	[M L ² T ⁻²]
Campo elettrico	\mathcal{E}	-	-	V/m	[F Q ⁻¹]
Campo magnetico	H	-	-	A/m	[L ⁻¹ T ⁻¹ Q]
Induzione magnetica	B	-	-	T	[M T ⁻¹ Q ⁻¹]
Costante dielettrica del vuoto	ϵ_0	-	8.86 10 ²	F/m	
Permeabilità magn. del vuoto	μ_0	-	4 π 10 ⁷	N /A ²	
Impedenza del vuoto	Z ₀	-	376.7	Ω	
Velocità della luce	c	-	2.998 10 ⁸	m/s	
Costante di struttura fine	α	$e^2/(2\epsilon_0 hc)$	1/137		
Carica elettrica elementare	e	-	1.60 10 ¹⁹	C	Q
Energia di riposo dell'elettrone	E ₀	$m_e c^2$	5.11E-01	MeV	
Raggio classico dell'elettrone	r _e	$e^2/(4\pi\epsilon_0 m_e c^2)$	2.818 10 ⁻¹⁵	m	
Fattore relativistico dell'elettrone	γ_e	E/E ₀	1.96 E _{e (MeV)}		
Lungh. d'onda Compton dell'elettrone	λ_{Ce}	$2\pi h/m_e c = r_e/\alpha$	3.86 10 ⁻¹²	m	
Energia di riposo del protone	E _{op}	$m_p c^2$	938.3	MeV	
Fattore relativistico del protone	γ_p	E/E _{op}	1.07 E _{p (GeV)}		
Corrente di Alfvén	I ₀	$4\pi\epsilon_0 m_e c^3/e$	1.703 10 ¹¹	A	

Appendice A1.2 - Ricapitolo formule di meccanica relativistica

A1.2.1. Quantità di moto (o 'momento')

- La definizione della quantità di moto - spesso impropriamente chiamata 'momento'¹ - è :

$$\vec{P} = m \vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}, \quad (\text{A1.2.1})$$

$$\text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad ; \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (\text{A1.2.2})$$

- Dalle (A1.2.1) e (A1.2.2) si ha :

$$\boxed{\vec{P} = m_0 c \gamma \vec{\beta}} \quad (\text{A1.2.3})$$

il cui limite non relativistico è, ovviamente :

$$\vec{P} = m_0 \vec{v} \quad (\text{A1.2.4})$$

A1.2.2. Energia

L'energia totale è legata alla energia di riposo dalla :

$$E = \gamma E_0 = \gamma m_0 c^2 \quad (\text{A1.2.5})$$

ovvero $\gamma = (E / E_0)$ (A1.2.5.1)

ed anche, introducendo l'energia cinetica T:

$$E = E_0 + T = E_0 (1 + T/E_0). \quad (\text{A1.2.6})$$

$$T = E_0 (\gamma - 1) \quad (\text{A1.2.6.1})$$

L'energia si misura generalmente in eV o nei suoi multipli (di ragione 10^3) : KeV, MeV, GeV, TeV.

¹ Il termine, ormai di uso comune, è derivato dall'inglese 'momentum'; in italiano potrebbe ingenerare confusione con il momento della q.di m.. (in inglese 'moment of momentum').

A1.2.3. Relazioni fra la quantità di moto e l'energia

- Moltiplicando la (A1.2.3) per 'c' ed usando la (A1.2.6), si ottiene :

$$\boxed{Pc = \beta E} \quad (A1.2.7)$$

che, nel caso relativistico estremo ($\beta = 1$) diviene :

$$P \approx E/c. \quad (A1.2.8)$$

La quantità di moto viene dunque in genere misurata in (eV/c) o multipli.

Differenziando la (A1.2.7) si ricava poi la relazione :

$$\beta c dP = dE. \quad (A1.2.8.1)$$

- Quadrando la (A1.2.5), sostituendo per γ il suo valore dalla (A1.2.2) , si ha :

$$E^2 = \gamma^2 E_0^2 = E_0^2 / (1 - \beta^2),$$

che dà:

$$E^2 - E_0^2 = \beta^2 E^2$$

e quindi, usando la (A1.2.7), la definizione del momento :

$$\boxed{c^2 P^2 = E^2 - E_0^2}. \quad (A1.2.9)$$

- Dalle (A1.2.5'), dalla definizione (A1.2.2) di γ e dalla (A1.2.7) si deriva la relazione utile:

$$\boxed{\beta = \sqrt{1 - (E_0/E)^2} = \frac{cP}{\sqrt{c^2 P^2 + E_0^2}}} \quad (A1.2.10)$$

- Infine, dalla (A1.2.9) e dalla (A1.2.6) si ottiene

$$(cP)^2 = (E_0 + T)^2 - E_0^2 = 2 T E_0 + T^2, \quad (A1.2.10b)$$

dalla quale si ricava :

$$\boxed{cP = \sqrt{T(T + 2E_0)}}. \quad (A1.2.11)$$

NB : Si noti che, per $T^2 \ll 2 E_0 T$ e cioè per energie non relativistiche, tipicamente nel caso

di ioni pesanti, vale la relazione approssimata :

$$cP \approx \sqrt{2E_0T} \quad (\text{A1.2.12})$$

mentre, per $T \gg 2 E_0$, cioè per energie ultrarelativistiche, si ha

$$cP \approx T. \quad (\text{A1.2.12.1})$$

A1.2.4. Quadrivettore energia-impulso (o 'quadrimento')

A1.2.4. 1. Definizioni

- Definiamo come di consueto² :)

$$\mathbf{P} = (E/c, \mathbf{P}) \quad (\text{A1.2.13})$$

e ricordiamo la relazione fondamentale

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}_i \mathbf{P}^i = \frac{E^2}{c^2} - \vec{P} \cdot \vec{P} = \frac{E^2}{c^2} - P^2 = \left(\frac{E_0^2}{c^2} + P^2 \right) - P^2 \quad (\text{A1.2.14})$$

che, avendo usato la (A1.2.9) e la (A1.2.5), diviene :

$$\mathbf{P}^2 = \boxed{E_0^2/c^2 = m_0^2 c^2} \quad (\text{A1.2.15})$$

- La (A1.2.15) esprime le proprietà fondamentali del modulo del quadri-momento e cioè la sua **invarianza** per trasformazioni di Lorentz e la sua eguaglianza all'energia di riposo, a meno di un fattore costante ($1/c^2$).

Ne segue il :

Teorema della conservazione del quadrimento³

In un sistema conservativo il quadri-momento si conserva. In un sistema di forze conservativo, dato un insieme di punti materiali con masse a riposo m_{0i} e definito \mathbf{P}_T il quadri-momento totale si ha :

$$\mathbf{P}_T = \sum_i \mathbf{P}_i = \text{costante} \quad (\text{A1.2.16})$$

² Indichiamo i quadrivettori con maiuscole in grassetto.

³ L'analogo del teorema della conservazione della quantità di moto.

- In particolare, in un urto a due corpi, indicando con gli indici 1 e 2 i due corpi e con gli indici i ed f lo stato iniziale e quello finale si ha :

$$\mathbf{P}_{1i} + \mathbf{P}_{2i} = \mathbf{P}_{1f} + \mathbf{P}_{2f} \quad (\text{A1.2.17})$$

A1.2.4.2. Applicazione al caso di fasci collidenti

Lo studio delle strutture nucleari e subnucleari è basato sullo studio dei prodotti di reazione negli urti fra particelle e, come abbiamo visto al paragrafo 1.5, il parametro chiave è l'energia delle particelle stesse. In particolare interessa l'energia disponibile nel sistema del centro di massa perché è questa che si rende disponibile per la creazione di nuove masse: per creare nell'urto una particella di massa a riposo m_0 l'energia disponibile nel centro di massa del sistema composto dalla particella accelerata e dalla particella bersaglio deve infatti essere maggiore di o uguale a $m_0 c^2$.

Dato un urto nel sistema del laboratorio fra due particelle con masse a riposo m_1 ed m_2 ed energie totali E_1 ed E_2 , vogliamo perciò qui calcolare l'espressione dell'energia totale disponibile nel sistema del centro di massa. Confronteremo poi il caso in cui una delle due particelle sia inizialmente ferma nel sistema del laboratorio (bersaglio fisso) con il caso di particelle di uguale energia che si muovono l'una incontro all'altra (fasci collidenti).

Si considerino due particelle con masse a riposo m_{0i} ($i = 1, 2$), energie a riposo $E_{0i} = m_{0i} c^2$, velocità ridotte β_i , energie E_i , fattori di Lorentz $\gamma_i = E_i / E_{0i}$, e quantità di moto

$$\mathbf{P}_i = m_0 \gamma_i \beta_i c = \beta_i E_i / c.$$

Dette β_1 e β_2 le velocità ridotte (rapporti alla velocità della luce) delle due particelle, e γ_1 e γ_2 i rispettivi fattori relativistici, e indicando con l'indice 'CM' le quantità nel sistema del centro di massa e con l'indice 'L' quelle nel sistema del laboratorio, si ha, utilizzando l'invarianza del modulo del quadrivettore totale:

$$\mathbf{P}_{CM}^2 = \mathbf{P}_L^2 = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^2, \quad (\text{A1.2.19})$$

ovvero :

$$E_{CM}^2 / c^2 = \mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2 + 2\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 = E_{01}^2 / c^2 + E_{02}^2 / c^2 + 2(E_1 E_2 / c^2 - \vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2) \quad (\text{A1.2.19.1})$$

Sviluppando si ottiene

$$E_{CM}^2 = [m_{01}^2 c^4 + m_{02}^2 c^4 - 2(c^2 \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \cos\theta - m_{01} c^2 \gamma_1 m_{02} c^2 \gamma_2)] = [m_{01}^2 c^4 + m_{02}^2 c^4 - 2(\beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2 m_{01} m_{02} c^4 \cos\theta - \gamma_1 \gamma_2 m_{01} m_{02} c^4)] \quad (\text{A1.2.19.1})$$

e, in definitiva, per l'energia disponibile nel sistema del centro di massa, E_{CM} , si ha

l'espressione generale

$$E_{CM}^2 = c^4 \left[m_{o1}^2 + m_{o2}^2 + 2\gamma_1\gamma_2 m_{o1} m_{o2} (1 - \beta_1\beta_2 \cos\theta) \right]. \quad (A1.2.20)$$

Applicando poi la (A1.2.20) al caso di bersaglio fisso, e cioè al caso di particella '2' ferma nel sistema del laboratorio per la quale $\gamma_2 = 1$ e $\beta_2 = 0$, si ottiene :

$$E_{CM}^2 = c^4 \left[m_{o1}^2 + m_{o2}^2 + 2\gamma_1 m_{o1} m_{o2} \right] \quad (A1.2.21)$$

Infine, se le due particelle hanno anche la stessa massa m_o e se $\gamma_1 \gg 1$ si ottiene (avendo aggiunto l'indice 'f' per distinguere il caso di bersaglio fisso) :

$$E_{CM} = c^2 m_o \cdot \sqrt{2\gamma_{1f}} \quad (\gamma_1 \gg 1) \quad (A1.2.22)$$

Bersaglio Fisso, masse uguali

Se invece entrambe le particelle vengono accelerate alla stessa energia ma con velocità opposte e vengono fatte collidere frontalmente, si ha :

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_c \quad ; \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta \quad ; \quad \cos\theta = -1 \quad (A1.2.23)$$

e, nelle stesse ipotesi di prima e cioè per $m_{o1} = m_{o2} = m_o$ e $\beta \approx 1$, dalla (A1.2.20), indicando con l'indice 'c' il caso di fasci collidenti, si ottiene:

$$E_{CM}^2 = 2 E_o^2 \left[1 + 2\gamma_c^2 \right] \underset{\gamma_1 \gg 1}{\approx} 4 E_o^2 \gamma_c^2 \quad (A1.2.24)$$

e cioè

$$E_{CM} = 2 E_o \gamma_c \quad (A1.2.25)$$

Fasci Collidenti, masse uguali

Confrontando la (A1.2.22) con la (A1.2.25) si vede che, a parità di energia disponibile nel CM, deve essere:

$$\gamma_f = 2\gamma_c^2 \quad \square\square\square\square\square\square \quad \frac{\gamma_c}{\gamma_f} = \frac{1}{2\gamma_c} \quad (A1.2.26)$$

L'energia di fascio necessaria è dunque $2\gamma_c$ volte minore di quella che sarebbe richiesta nel caso di bersaglio fisso.

Per grandi valori di E_{cm} , il fattore $2\gamma_c$ diviene molto grande, tanto più quanto più le particelle in collisione sono leggere: per LEP, the CERN 200 GeV c.m. e^+e^- collider, $2\gamma \approx 4 \cdot 10^5$ while for a 200 GeV c.m. pp collider $2\gamma \approx 4 \cdot 10^2$.

Se ne conclude che, poiché nel sistema del CM sono richieste energie il più possibile elevate, il caso di fasci collidenti permette guadagni importanti rispetto al caso di bersaglio fisso ($\gamma_c \ll \gamma_f$) soprattutto se le particelle incidente sono leggere ed hanno quindi, a parità di energia, γ più alti.

A1.2.4.3. Esempi.

- L'anello LEP permette di far collidere testa-testa fasci di elettroni ciascuno con energia di 100 GeV, corrispondente a $\gamma_c \approx E/E_0 = (100 \cdot 10^3 / 0.511) \approx 2 \cdot 10^5$. L'energia equivalente nel caso di bersaglio fisso, quella cioè che un elettrone dovrebbe avere per produrre la stessa energia nel CM nell'urto contro un elettrone fermo, data dalla (A1.2.26), vale :

$$\gamma_f = 2\gamma_c^2 \approx 2 (2 \cdot 10^5)^2 = 8 \cdot 10^{10}, \quad (\text{A1.2.27})$$

cioè $E_f = 2\gamma_c^2 \cdot m_{\text{oe}} \approx (0.511 \cdot 10^{-3}) 8 \cdot 10^{10} \text{ GeV} = 4 \cdot 10^7 \text{ GeV}$

- L'anello LHC permette di far collidere testa-testa fasci di protoni ciascuno con energia di 7 TeV, corrispondente a $\gamma_c \approx E/E_0 = (7 \cdot 10^3 / 0.938) \approx 7.5 \cdot 10^3$. L'energia equivalente nel caso di bersaglio fisso (protone contro protone fermo), data dalla

$$\gamma_f = 2\gamma_c^2 = 2 (7.5 \cdot 10^3)^2 \approx 1 \cdot 10^8, \quad (\text{A1.2.28})$$

risulta di circa $E_f = 2\gamma_c^2 \cdot m_{\text{op}} \approx 1 \cdot 10^8 \text{ GeV}$

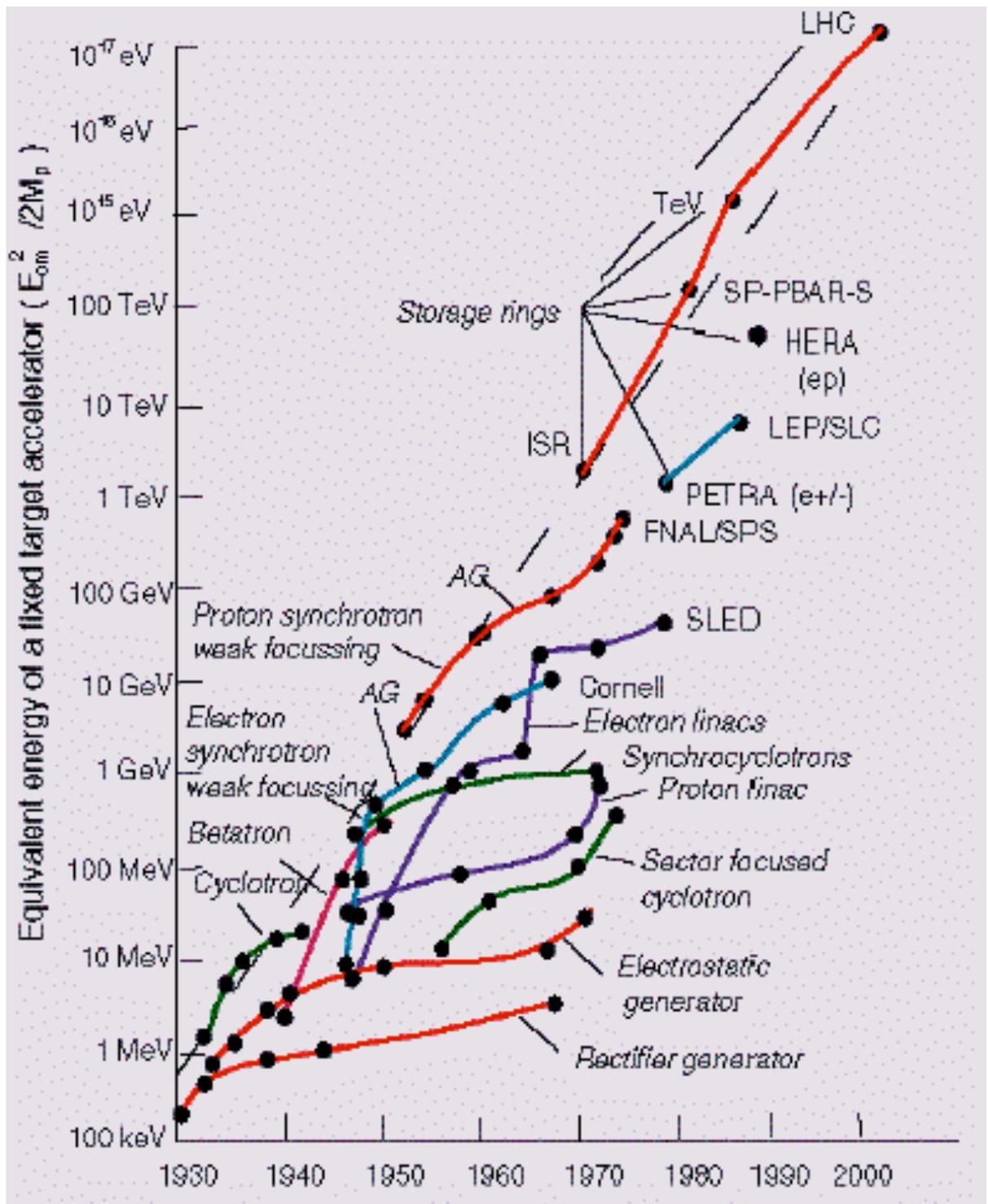


Fig. 1.2.1: Livingstone chart. Massime energie raggiunte, in funzione del tempo, con i diversi tipi di acceleratori.

CAPITOLO II.....	2
ACCELERATORI ELETTROSTATICI.....	2
2.1. PRINCIPII DI FUNZIONAMENTO	2
2.2. L'ACCELERATORE DI COCKROFT E WALTON	4
2.3. L'ACCELERATORE DI VAN DE GRAAFF (VDG)	6
2.3.1. <i>Principi di funzionamento</i>	6
2.3.2. <i>Il Tandem VdG</i>	8
2.4. APPLICAZIONI DEGLI ACCELERATORI E.S.	9
BIBLIOGRAFIA	10

CAPITOLO II

Acceleratori elettrostatici

2.1. Principii di funzionamento

Lo schema di principio di un acceleratore elettrostatico è mostrato in Fig. 2.1.

Un fascio di particelle di carica q , prodotto da una sorgente - schematizzata con il filamento 'F' - viene accelerato, facendogli attraversare in un singolo passaggio una differenza di potenziale $\Delta V = (V_0 - V)$.



Figura 2.1. - Schema di principio di un acceleratore elettrostatico

Poiché il campo elettrostatico è conservativo e cioè

$$\text{rot}\vec{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \quad (2.1.1)$$

l'energia cinetica finale, T , delle particelle del fascio è data da:

$$T = -q \cdot [V(s) - V(s_0)] = q \Delta V. \quad (2.1.2).$$

in cui s_0 è l'ascissa dalla quale la particella da accelerare viene fatta partire, s è l'ascissa di arrivo e V è il potenziale elettrostatico.

A parità di q , l'unico modo per ottenere elevate energie è dunque quello di realizzare valori il più elevati possibile della differenza di potenziale fra due punti.

Considerando una zona di spazio, da s_0 ad s_1 , nella quale esistono un campo elettrico \vec{E} derivante da un potenziale 'normale', che va cioè a zero all'infinito (cioè, in pratica, all'esterno dell'acceleratore) l'andamento del campo e del potenziale sono del tipo di quelli della fig. 2.2.

Appare così più evidente il significato della (2.1.1): la particella da accelerare dovrà essere generata nel punto s_0 e non può essere accelerata che una volta fino a s_1 .

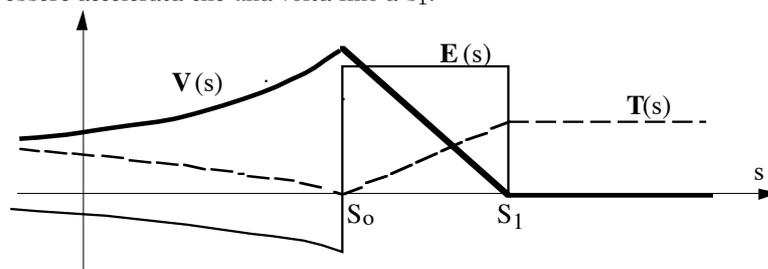


Fig. 2.2. Campo e.s. (E), potenziale e.s. (V), energia cinetica, (T)

In pratica, la differenza di potenziale è stabilita per mezzo di un alimentatore ai capi di una colonna acceleratrice isolante, che collega il terminale ad alta tensione (AT) alla terra. Entro la colonna si pratica il vuoto e si fanno passare le particelle da accelerare; essa funge così anche da camera da vuoto (v. Fig. 2.3.)

Poiché l'utilizzo del fascio avviene per lo più a potenziale di terra, la sorgente è collegata al terminale AT (salvo che nel caso degli a. Tandem, v. § 2.3.2) e l'energia elettrica necessaria a far funzionare l'acceleratore deve venir fornita ad alta tensione. Allo scopo sono stati ideati vari metodi corrispondenti ad altrettanti tipi di acceleratori.

Lungo la colonna acceleratrice il campo elettrico stesso è mantenuto il più possibile uniforme per mezzo di una serie di elettrodi intermedi collegati da resistenze ed opportuni schermi rendono il più possibile uniforme il campo elettrico anche fra la colonna stessa e l'involucro esterno.

Il terminale è a sua volta normalmente costituito da un elettrodo sferoidale, levigato e con grandi raggi di curvatura.

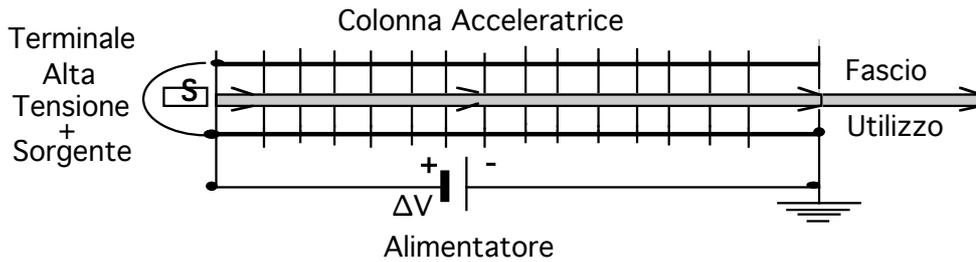
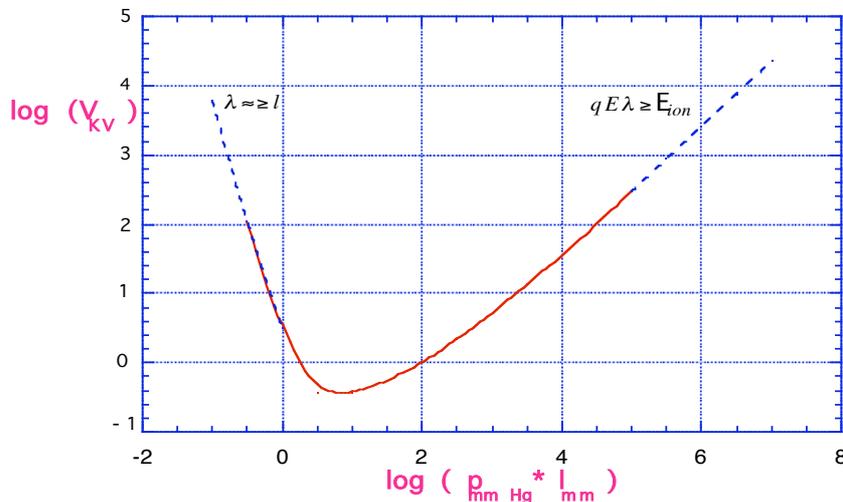


Fig. 2.3. - Schema della struttura di un acceleratore e.s.

Tutto ciò perché la massima differenza di potenziale ottenibile è determinata in ultima analisi dalla condizione che il campo elettrico, E , non superi in alcun punto la rigidità dielettrica, E_s , del mezzo che circonda le parti a tensione. Superato infatti il valor limite del campo si innescano scariche dovute alla ionizzazione degli atomi del gas da parte di elettroni accelerati nel campo elettrico interelettrodo; da qui la necessità di ottimizzare la forma e lo stato superficiale degli elettrodi per minimizzare i campi elettrici a parità di tensione.

Il processo di scarica è molto complicato e i dati su di esso sono in gran parte empirici. Tuttavia la legge di Paschen^[4.1] afferma che la tensione di scarica in un gas fra elettrodi distanti d , oltre a dipendere dalla forma e dalle condizioni della superficie degli elettrodi, è, per un determinato gas, una funzione del prodotto di d per la pressione del gas stesso, crescente, per dato d , sia verso le basse che verso le alte pressioni.



Legge di Paschen : tensione di scarica fra due elettrodi piani in aria secca. 'p' è la pressione dell'aria ed 'l' la distanza fra gli elettrodi.

Un tale comportamento si spiega pensando che l'innesco della scarica è condizionato alla presenza di elettroni di energia sufficiente a ionizzare il gas ed al fatto che la probabilità di ionizzazione sia maggiore di quella di ricombinazione; inoltre parte degli elettroni in giuoco sono generati per emissione secondaria dagli ioni positivi che urtano l'elettrodo negativo. A basse pressioni il cammino libero medio degli elettroni per urto contro il gas (inversamente proporzionale a p) è più lungo e nonostante che gli elettroni acquistino fra un urto e l'altro molta energia tende a esser bassa la probabilità di ionizzazione; al contrario, ad alta pressione gli urti sono molti ma l'energia acquistata fra un urto e l'altro è poca e quindi la

probabilità di ionizzazione è di nuovo bassa. L'ordine di grandezza del massimo campo ottenibile, fra elettrodi piani, in aria a pressione atmosferica è di 50 kV/cm, e cresce circa linearmente con la pressione.

Tecnicamente risulta più efficace scegliere gas opportuni e far lavorare il terminale in alta pressione piuttosto che operare a pressione bassa.

I più comuni acceleratori elettrostatici a fascio continuo (che peraltro possono anche essere fatti funzionare in regime impulsivo) prendono nome dai rispettivi ideatori e sono:

- l'a. di **Cockroft e Walton**^[1] o "a moltiplicazione di tensione"

- l'a. di **Van de Graaff**^[2] o "a cinghia".

Fra gli acceleratori a fascio continuo rientrano, come caso estremo, quelli 'a trasformatore', alimentati da un semplice trasformatore in salita seguito da un raddrizzatore .

Gli acceleratori elettrostatici a fasci impulsati (che non possono funzionare in regime continuo) sono tutti basati sul principio generale di caricare dei condensatori in parallelo, a tensione relativamente bassa, e di scaricarli in serie ottenendo un impulso di tensione molto più alto.

Differiscono l'uno dall'altro per i molti diversi metodi usati per raggiungere lo scopo. Le tensioni massime normalmente raggiunte non superano i 10 MV.

Un'estesa panoramica storica sullo sviluppo degli a. elettrostatici si trova nella referenza **[2].2.2. L'acceleratore di Cockroft e Walton**

Lo schema di principio del generatore di alte tensioni ideato da C&W è mostrato in Fig. 2.3.5.

L'alta tensione per il terminale è ottenuta per mezzo di un alimentatore in alternata a bassa tensione, seguito da un circuito moltiplicatore di tensione a diodi e condensatori, a più stadii. Il primo acceleratore di questo tipo risale al 1932 **[2]**.

Dette V_0 ed f_0 la tensione e la frequenza di lavoro dell'alimentatore, C il valore delle capacità, $\langle i \rangle$ la corrente media estratta - inclusa cioè quella accelerata - ed N il numero degli stadii, la tensione ottenibile in uscita, V_N , è data da **[3]**:

$$V_N = 2 N V_0 - [\langle i \rangle / (12 f_0 C)] [8 N^3 + 9 N^2 + N] \quad (2.2.1)$$

Come per tutti gli a. elettrostatici, poiché l'alimentatore può fornire una potenza determinata e finita, tanto maggiore è la tensione raggiunta quanto minore è la corrente accelerabile.

La tensione V_N non è costante ma fluttua a causa del meccanismo stesso di carica e scarica dei condensatori del moltiplicatore.

Il valore di picco della fluttuazione¹, che può essere in parte corretta con vari accorgimenti, è dato, dalla

$$\Delta V_N = (1/2) N (N+1) \langle i \rangle / (C f_0) \quad (2.2.2)$$

che evidenzia come la stabilità in tensione peggiori con il numero degli stadii. Conviene perciò partire con un generatore in alternata alla massima tensione possibile.

Osserviamo anche che i C&W possono essere usati in regime impulsivo per produrre - a parità di corrente media - correnti di picco più elevate.

Per le loro dimensioni sono normalmente isolati in aria talché le massime tensioni ottenibili in pratica sono dell'ordine della diecina di MV. Alcuni sono ancor oggi in uso come pre-iniettori di macchine a protoni ma vengono progressivamente sostituiti da acceleratori lineari del tipo "Quadrupoli a RF" (RFQ).

¹ spesso detta, con termine inglese, 'ripple'.

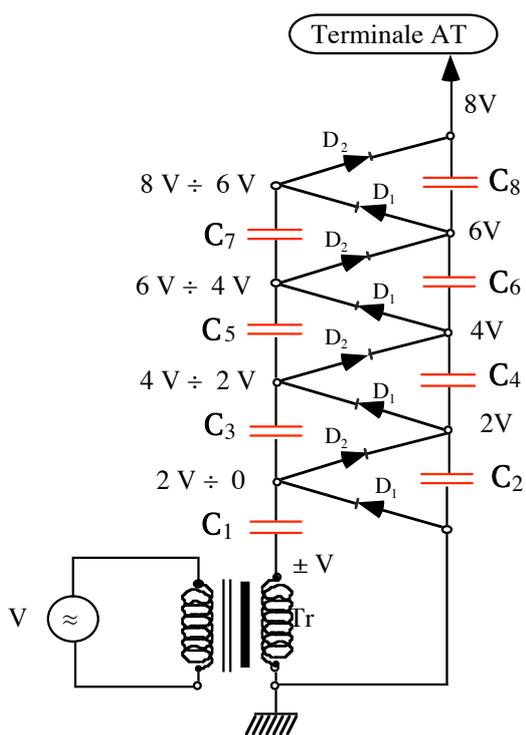


Figura 2.3.5 - Schema del generatore di tensione dell'acceleratore di Cockroft e Walton.

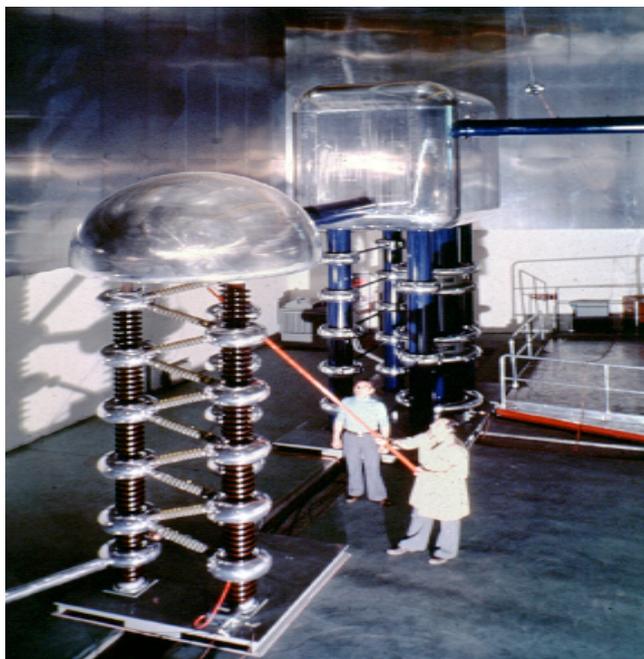


Figura 2.3.6. - Il generatore Cockroft e Walton del CERN

Il primo acceleratore di questo tipo fu realizzato da Cockroft e Walton nel 1932, nei Laboratori Cavendish di Cambridge in Inghilterra allo scopo di ottenere particelle di energia sufficientemente elevata da penetrare la barriera Coulombiana dei nuclei più leggeri, per studiare le reazioni nucleari indotte da particelle cariche energetiche.

Accelerava protoni (nuclei di idrogeno) fino alla energia di 0.4 MeV, utilizzando una sorgente a catodo freddo nella quale i protoni venivano prodotti ionizzando atomi di idrogeno per mezzo di una scarica, in atmosfera dello stesso gas.

Cockroft e Walton ottennero con esso la prima trasmutazione del nucleo secondo la reazione : $p + Li \rightarrow 2 He$.

Di questo tipo fu anche il primo acceleratore costruito in Italia, presso l'Istituto Superiore di Sanità [4], ed usato dal gruppo di E. Fermi² per produrre neutroni. E' oggi in mostra nei locali della Sede Centrale dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, nei Laboratori Nazionali di Frascati.

2.3. L'acceleratore di Van de Graaff (VdG)

2.3.1. Principi di funzionamento

Quasi contemporaneamente a Cockroft & Walton, Van de Graaf inventava un generatore elettrostatico che raggiunse un potenziale di 1.5 MV. Passo' pero' un po' di tempo per costruire il tubo di accelerazione e tale apparato venne utilizzato per la ricerca solo piu' tardi.

Negli acceleratori VdG una cinghia isolante viene fatta girare, mediante un apposito motore, intorno a due assi paralleli, uno posto sulla piattaforma a potenziale di terra ed uno situato all'interno del terminale ad AT.

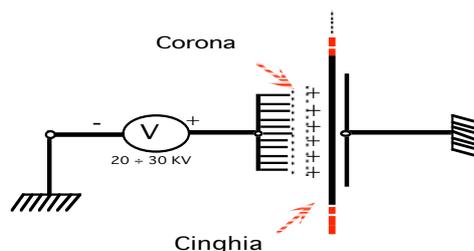


Figura 2.3.7. - Schema del sistema di carica dell'acceleratore di VdG.

La cinghia viene caricata per effluvio da un alimentatore a tensione relativamente bassa situato sulla piattaforma a potenziale di terra, secondo lo schema di principio della Fig.2.3.7; all'interno del terminale AT un analogo sistema ad effluvio funzionante all'inverso scarica la cinghia caricando il terminale (v. anche Fig. 2.3.8).

Quest'ultimo si carica ad una tensione tale che la corrente totale da esso estratta - che comprende come detto sopra sia la corrente del fascio utile accelerato e sia le correnti di perdita verso massa e lungo la colonna accelerante, rapidamente crescenti con la tensione al terminale - compensi esattamente quella trasportata dalla cinghia .

Un tale sistema di carica elettromeccanico - sottoposto a notevoli sforzi meccanici e ad elevatissimi campi elettrici - è delicato ma permette di ottenere potenze relativamente elevate, funzionamento continuo e stabilità di tensione. Inserito in un contenitore con Azoto o Freon a 9-10 atmosfere, il VdG puo' raggiungere 10 MV. Ne esistono diverse varianti.

² Ma dopo che egli aveva lasciato Roma.

Fig. 2.3.8 - Schema di acceleratore Van De Graaff

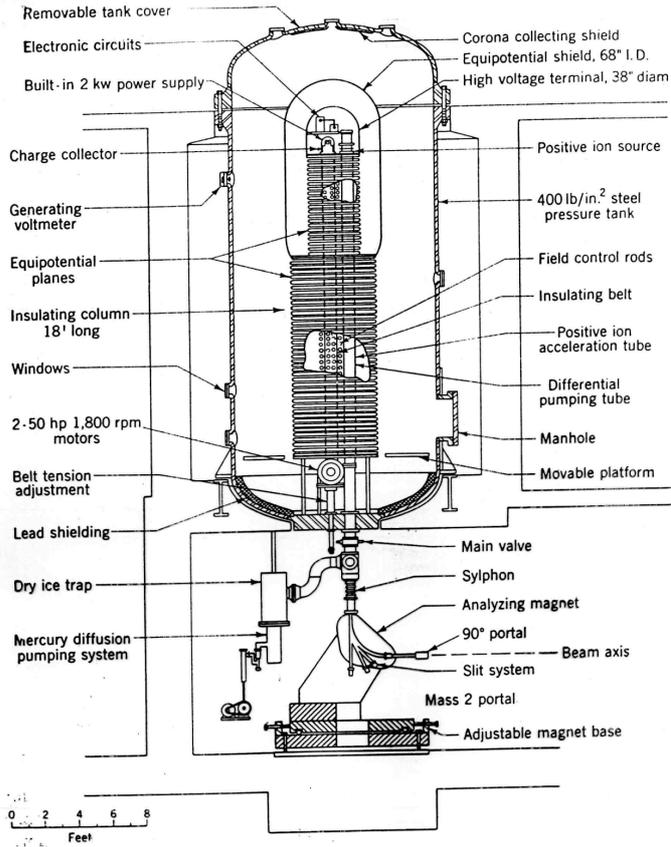


Fig. 3-15. 9-Mv electrostatic generator at MIT. (Courtesy of J. G. Trump.)

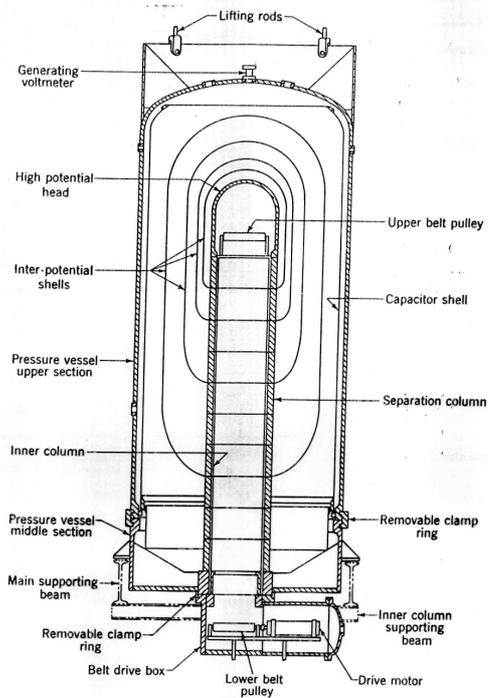


Fig. 3-16. 8-Mev electrostatic generator at Los Alamos. (Courtesy of J. L. McKibben.)

2.3.2. Il Tandem VdG

Un' importante variante dell'acceleratore di VdG, il "**Tandem**" (TVdG) (v. Fig. 2.3.9), permette, disponendo di sorgenti di ioni negativi, di utilizzare due volte (da cui il nome) la tensione al terminale, quest'ultimo collocato a metà della tanca dell'acceleratore anziché ad un estremo.

Gli ioni negativi di carica $-e$, prodotti questa volta da una sorgente esterna, a potenziale vicino a quello di terra, vengono accelerati fino al terminale AT (positivo); qui vengono privati (*ingl.: stripping*) di $(n+1)$ dei loro elettroni facendoli passare attraverso un sottile strato di un adatto materiale (*ingl.: stripper*)³.

Gli ioni, divenuti così positivi con carica $+ne$, trovandosi al terminale AT positivo, vengono nuovamente accelerati verso terra.

L'energia cinetica finale, T_f è dunque :

$$T_f = (n+1) e \Delta V. \quad (2.2.3)$$

Per un protone ($n=1$), l'energia data dalla (2.2.3) risulta quindi doppia di quella corrispondente alla tensione al terminale.

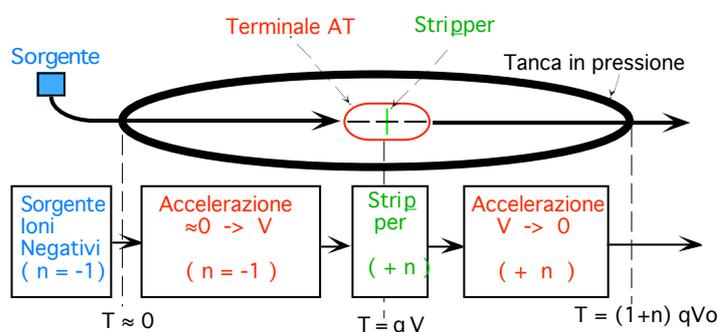


Fig. 2.3.9 : Schema di funzionamento di un Tandem

Per ioni più pesanti, per i quali n può essere molto più elevato, il guadagno può essere molto maggiore: ad esempio, disponendo di una tensione al terminale di 15 MV, ioni Au^- possono assumere, dopo lo 'stripper', uno stato di carica positiva corrispondente ad $n = 13$ e venire quindi accelerati fino ad oltre 200 MeV.

³ Lo stripper può essere costituito da un foglio sottilissimo di materiale leggero o da un getto gassoso. Il secondo è preferito perché i fogli sottili sono estremamente delicati e andrebbero continuamente sostituiti.



Figura 2.3.10 : Moby Dick - Laboratori Nazionali di Legnaro dell'INFN

Nella Fig.2.3.10 è mostrato l'esterno del Tandem da 16 MV, installato nei Laboratori Nazionali del Sud dell' INFN, a Catania, e che ha come post-acceleratore un ciclotrone superconduttore⁴.

Il pregio principale dei TVdG è la ottima stabilità della energia in funzionamento continuo ($\approx 10^{-4}$), direttamente legata al metodo di carica.

La risoluzione energetica è anch'essa molto buona, confrontabile con la stabilità (v. esempio più avanti)

Inoltre, il Tandem può accelerare diverse specie di ioni ad energie variabili con continuità su di un largo intervallo e l'estrazione delle particelle accelerate è molto semplice, particolarità d'altronde comune a tutti gli acceleratori e.s.

Infine il fascio, normalmente di buone caratteristiche (*dimensioni e divergenza angolare piccole*), può essere continuo o modulato.

2.4.Applicazioni degli acceleratori e.s.

Oltre alle applicazioni sopra menzionate come iniettori di altri acceleratori, le macchine di più alta tensione, e segnatamente i Tandem sono usati estesamente per ricerche in Fisica Nucleare. A tale applicazione li rende particolarmente adatti l'alta qualità dei fasci prodotti ed in particolare l'ottima risoluzione energetica.

Fra le altre applicazioni scientifiche - in generale di macchine più piccole di tipo VdG - ricordiamo la produzione di isotopi ed in particolare la datazione di materiali, e la generazione di radiazione coerente con alta efficienza, tramite Laser a elettroni liberi.

Esistono tuttavia anche numerosissime applicazioni industriali; una delle più diffuse, che utilizza soprattutto macchine a bassa tensione ($10 \div 400$ KV) ed alta corrente media (\approx parecchi mA), per lo più del tipo C&W, è quella dell'impiantazione ionica.

L'impiantazione ionica, cioè il bombardamento della superficie di un materiale con ioni accelerati allo scopo di impiantare, entro uno strato superficiale di spessore definito, dei particolari atomi con densità ben definita, è procedimento noto fin dagli anni '60 e diffuso sia nell'industria metalmeccanica e sia soprattutto in quella dei semiconduttori dove sta soppiantando, per il drogaggio, le tecniche di diffusione.

⁴ Ne vedremo le caratteristiche più avanti, parlando dei ciclotroni.

Secondo recenti stime funzionano nei paesi industrializzati oltre 7000 acceleratori per impiantazione ionica ed il loro tasso annuale di incremento è superiore al 30%.

Essendo per una gran parte delle applicazioni sufficienti energie inferiori al MeV, sono sufficienti macchine elettrostatiche con tensioni relativamente basse ma correnti medie accelerate le più alte possibili, in pratica parecchi mA. Per energie di impiantazione più alte, per modificare le proprietà del materiale in profondità piuttosto che soltanto in superficie, sono più convenienti acceleratori di tipo diverso (ad es. del tipo RFQ).

Bibliografia

- [1] E.Persico et al."Principles of particle accelerators",W.A.Benjamin Inc., 1968.;
S.Livingston & J.Blewett, "Particle Accelerators", Mc Graw Hill, 1962.
- [2] D.A. Bromley, "The Development of electrostatic accelerators", NI&M 122, 1 (1974)
- [3] E.Everhardt e P.Lorrain, "The Cockroft & Walton Voltage Multiplying Circuit", RSI 24 (221), 1953.
- [4] E.Amaldi, D.Bocciarelli, F.Rasetti e G.C.Trabucchi, "Generatore di neutroni a 1000 Kilovolt",
La Ricerca Scientifica, n.7-8, 1939.
- [4.1] S.Humphries Jr., "Principles of charged particle a.", § 9.3 e 9.5, J.Wiley&Sons (1986)
- [5] J.L.Yntema, "Heavy Ion Stripping in Tandem A. Terminals", NI&M 122 , 45, (1974).
- [6] Altri articoli di interesse :
H.E.Wegner, "Advances in Electrostatic A.", Proc. Accelerator Conference, San Francisco, IEEE Trans.
NS, 1975; e IEEE Trans.NS 16, 81, (1969).
Daresbury Laboratories, IEEE Trans. NS 200 , 163, (1973).
K.H.Purser, "Some Advances in Negative Ion Technology", IEEE Trans NS 200 ,136, (1973).
A.Malecki et al., "Heavy Ion Collisions at Intermediate Energies", Riv. NC 1, 10, 1, (1978).
M.Letournel, "The Strasbourg Project. A 35 MV Vivitron Tandem", Proc. PAC, IEEE Trans. NS,
87CH2387-9, 346, (1987); Proc. I EPAC, 171, Roma(1988).
H.G. Price , "Review of electrostatic accelerators. and Linac boosters", Proc. II EPAC, 87, Nizza(1990)

CAPITOLO III - ACCELERATORI ELETTRODINAMICI	2
3.1 PRINCIPII DI FUNZIONAMENTO	2
3.1.1. <i>Introduzione</i>	2
3.1.2. <i>Campi rotazionali</i>	2
3.1.3. <i>Esempio - L'acceleratore lineare di Widerøe</i>	4
3.2. IL CICLOTRONE CLASSICO, A CAMPO MAGNETICO UNIFORME.....	7
3.2.1. <i>Generalità e principio di funzionamento</i>	7
3.2.2. <i>Energia cinetica massima e costante del ciclotrone</i>	10
3.2.3. <i>Valori numerici ed esempi</i>	11
3.2.4. <i>Accelerazione di particelle relativistiche</i>	12
3.2.5. <i>Il ciclotrone a settori</i>	12
3.3. IL SINCROCICLOTRONE	14
3.4. IL BETATRONE	16
3.4.1. <i>Principio di funzionamento</i>	16
3.4.2. <i>Condizioni di betatrone</i>	17
3.4.3. <i>Stabilità dell'orbita principale</i>	19
3.5. EVOLUZIONE DEGLI ACCELERATORI CIRCOLARI VERSO LA CLASSE DEI RISONANTI AD ORBITE CHIUSE.....	19

CAPITOLO III - ACCELERATORI ELETTRODINAMICI

3.1 Principii di funzionamento

3.1.1. Introduzione

Abbiamo visto che, per gli acceleratori elettrostatici,

$$\Delta T = -q [V(s) - V(s_0)], \quad (3.1)$$

in cui s_0 è l'ascissa dalla quale la particella da accelerare viene fatta partire, s è l'ascissa di arrivo, V il potenziale elettrostatico e q la carica della particella accelerata. La massima variazione di energia cinetica ottenibile con l'accelerazione mediante campi statici è dunque determinata - per una determinata carica - dalla massima differenza di potenziale realizzabile in pratica, dell'ordine cioè di qualche decina di MV.

Considerato che i limiti incontrati discendono dalla (3.1), occorre - per accelerare particelle di carica unitaria come le particelle 'elementari' ad energie maggiori di qualche MeV - pensare a dei sistemi per i quali la (3.1.) non valga e cioè considerare per l'accelerazione l'utilizzo di campi elettrici non conservativi.

Utilizzando campi non conservativi è infatti possibile realizzare sistemi di accelerazione che, in linea di principio possono accelerare delle particelle fino ad energie arbitrariamente grandi senza ricorrere a differenze di potenziale troppo elevate.

3.1.2. Campi rotazionali

Ricordiamo le equazioni di Maxwell per il campo elettrico, nel caso generale di fenomeni non statici¹

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V - \partial \mathbf{A} / \partial t, \quad (3.2)$$

e

$$\text{rot } \mathbf{E} = -d\mathbf{B}/dt, \quad (3.3)$$

dalle quali segue

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -d\Phi(\mathbf{B})/dt. \quad (3.4)$$

La (3.4.) mostra che il campo risultante non è conservativo e che può dunque fare lavoro diverso da zero anche lungo un circuito chiuso (v. Fig. 3.), e dalle (3.2) e (3.3.) discende in particolare che si possono realizzare delle zone di spazio² all'interno delle quali esiste un campo elettrico (variabile nel tempo !), mentre all'esterno il campo elettrico stesso viene annullato da effetti di induzione provocati dal termine di potenziale vettore e cioè dal campo magnetico.

Stabilendo dunque all'interno di una tale zona (o "intervallo", o "gap"), un campo elettromagnetico con componente del campo elettrico in direzione s , si può accelerare una particella che attraversi l'intervallo stesso con una componente della velocità parallela ad s e, poiché il campo elettrico associato al campo elettromagnetico non è conservativo, il processo si può ripetere ciclicamente, disponendo successivi intervalli sul cammino della particella o anche facendo in modo che la particella stessa passi ripetutamente attraverso uno stesso intervallo.

¹ Per indicare vettori utilizzeremo lettere in grassetto o sormontate da una freccia, indifferentemente.

² Riferendosi al caso specifico degli acceleratori, queste zone, o intervalli, sono chiamate anche con termine inglese ormai di uso corrente 'gap'

Uno schema di accelerazione mediante successivi attraversamenti di diversi intervalli (tipicamente corrispondente al caso di un acceleratore lineare) è mostrato in Fig. 3.2., mentre lo schema di accelerazione mediante ripetuti passaggi attraverso una stessa gap (tipicamente corrispondente al caso di un acceleratore circolare) è mostrato in Fig. 3.3.

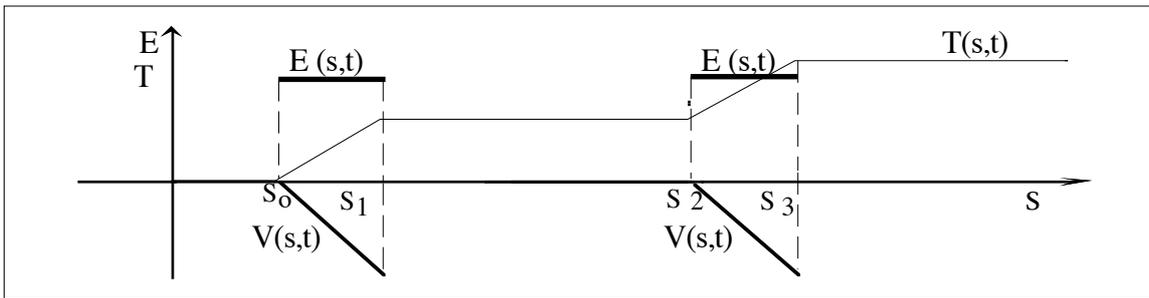


Fig.3. Andamento schematico del campo elettrico, E, del potenziale, V, e dell'energia cinetica, T, nel caso di campi non statici.

In pratica viene quindi reso possibile portare la particella ad attraversare in successione più di un intervallo nel quale esiste un campo elettrico sempre dello stesso segno e quindi di sommare gli effetti di differenze di potenziale mantenute entro limiti facilmente realizzabili.

L'energia massima ottenibile non dipende più dunque, in linea di principio, dal sistema di accelerazione (cioè dal campo stabilito nella gap e dal metodo usato per realizzarlo); in pratica sarà limitata soltanto da considerazioni di natura tecnico-economica.

Assumendo che il tempo di attraversamento delle gap sia molto minore del tempo di variazione di E_n , detti ΔT_n l'energia acquisita dalla particella nel passaggio attraverso l'intervallo n^{mo} (o nell' n^{mo} passaggio attraverso un certo intervallo), ds l'elemento di traiettoria, E_n il campo elettrico nell'intervallo (assunto costante durante il tempo di attraversamento della gap da parte della particella), T_{finale} l'energia cinetica finale della particella si ha :

$$\Delta T_n = q \int E_n \cdot ds = q \Delta V_n(t_n) ; \quad (3.5)$$

$$T_{finale} = T_{iniziale} + \sum_n [q \Delta V_n(t_n)]. \quad (3.6)$$

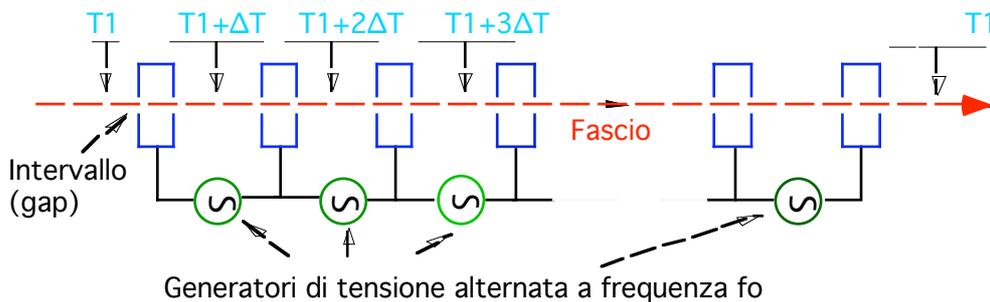


Figura 3.2. Schema di acceleratore con molte 'gap' successive.

Osserviamo qui che il metodo più semplice ed economico di realizzare dei campi elettromagnetici variabili nel tempo è in generale quello di utilizzare oscillatori sinusoidali. A

questo caso ci riferiremo sempre nel seguito, salvo che in qualche caso molto particolare, come quello degli acceleratori non risonanti³.

Naturalmente, poiché i campi sono variabili e i ΔV_n sono quindi funzioni del tempo, per realizzare una effettiva accelerazione, dovrà in generale esistere una relazione definita fra i tempi di passaggio della particella nei vari intervalli e la legge di variazione temporale (ovvero - in pratica - il periodo di oscillazione) del campo elettromagnetico, così che la somma delle energie ricevute sia diversa da zero.

Occorre cioè stabilire, almeno per quanto riguarda gli acceleratori detti "risonanti" delle condizioni di risonanza fra periodo di oscillazione del campo elettrico ed i tempi di passaggio delle particelle attraverso di esso, da cui il nome di acceleratore risonanti. Una seconda, altrettanto significativa ragione per il nome 'risonanti' è che il sistema di accelerazione è basato sull'uso di strutture metalliche, risonanti, ad alto fattore di qualità, come vedremo più oltre.

La particella con condizioni iniziali tali da essere in perfetta risonanza viene presa a riferimento e si dice particella sincrona.

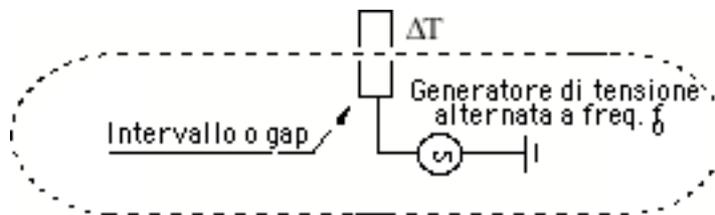


Fig. 3.3. Schema di a. con una 'gap' attraverso la quale le particelle da accelerare ripassano ciclicamente.

3.1.3. Esempio - L'acceleratore lineare di Widerøe

Per utilizzare il principio delle gap successive si può semplicemente metterne in fila un certo numero secondo uno schema proposto da Ising già nel 1924 [1a] e bene illustrato dall'acceleratore di Widerøe [1b], realizzato negli anni '30, il cui schema è mostrato in Fig.3.4. [4]

Le gap sono costituite dalle estremità affacciate di tubi conduttori (detti tubi di deriva, *ingl.: drift tube*) e vengono alimentate da un oscillatore collegato come mostrato nella figura; nel caso particolare la frequenza dell'oscillatore era di circa 7 MHz⁴. Com'è noto, le correnti indotte dal campo variabile dell'oscillatore nei tubi conduttori sono tali da produrre, all'interno dei conduttori stessi regioni equipotenziali, libere da campo. Le particelle che viaggiano all'interno dei tubi di deriva sono quindi soggette all'azione dei campi soltanto durante l'attraversamento degli spazi liberi fra due tubi successivi, che costituiscono proprio delle 'gap' come quelle sopra descritte.

Dal fatto che le particelle non sono sottoposte a forze all'interno del tubo, ha origine appunto il nome di 'tubo di deriva'.

Per fare in modo che le particelle incontrino nelle successive gap campi sempre del giusto segno, occorrerà pertanto soltanto dimensionare opportunamente le lunghezze dei tubi in relazione

³ Vedremo più avanti che esistono anche acceleratori ciclici non risonanti. Un esempio sarà incontrato studiando il betatrone.

⁴ Cioè, in questo caso, in regime di 'campo lentamente variabile' secondo la definizione data ad esempio nel testo di Fisica II di E. Amaldi et al.

alla velocità delle particelle ed alla frequenza di oscillazione dei campi. Si comprende facilmente come si realizzi una condizione di 'risonanza' - nel senso che la frequenza di transito nelle gap della particella è uguale alla frequenza dell'oscillatore che alimenta il sistema o ad una sua armonica - quando la lunghezza dell'i-esimo tubo di deriva, L_i , ed il periodo T dell'oscillatore soddisfano la relazione :

$$L_i = v_i T / 2, \quad (3.7.)$$

in cui v_i è la velocità della particella entro il tubo i-esimo e il fattore 2 deriva dal fatto che, per com'è fatto il circuito, i campi in gap successive sono in controfase.

La (3.7.) garantisce infatti che una particella che vede il campo elettrico voluto (generalmente il valore di picco) nella prima gap resti in fase con il campo elettrico stesso e continui quindi a vedere lo stesso valore di campo ad ogni passaggio attraverso le gap successive. Il fattore 1/2 nella (3.7.) è dovuto al particolare schema di alimentazione che vede due gap successive alimentate in controfase.

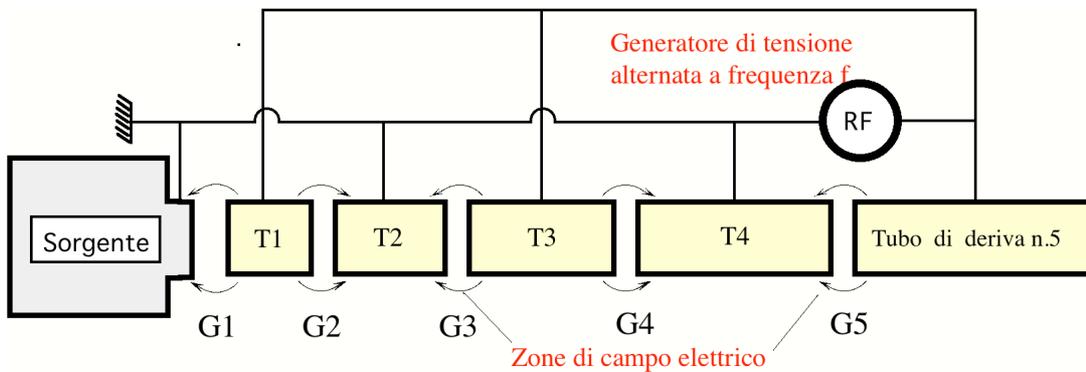


Figura 3.4. - Schema dell'acceleratore lineare di Widerøe.

Riscrivendo la (3.7) in termini della velocità ridotta, β , ed introducendo la frequenza $f_0 = 1/T$, si ha

$$L_i = \beta_i c / (2 f_0) = \beta_i \lambda_0 / 2 \quad (3.8.)$$

in cui λ_0 è la lunghezza d'onda corrispondente alla frequenza dell'oscillatore.

Alla frequenza di 7 MHz utilizzata da Widerøe si ottiene

$$L_i \approx 21.5 \beta_i \text{ (m)}. \quad (3.8.1)$$

Il sistema, il cui circuito equivalente è illustrato in Fig.3.4.1, è adatto soltanto per frequenze relativamente molto basse, come quella dell'oscillatore di Widerøe, in quanto, per effetto delle impedenze dei collegamenti e delle capacità in giuoco, far funzionare ad alta frequenza un circuito non accordato a costanti concentrate, essenzialmente capacitivo e di rilevanti dimensioni è tecnicamente molto difficile.

Il circuito stesso è praticamente utilizzabile soltanto fino a che la velocità delle particelle accelerate non diviene tanto grande da rendere la lunghezza dei tubi di deriva - e quindi le loro capacità verso massa - sufficientemente grandi da rendere tecnicamente difficile ed impraticabile la realizzazione del circuito di pilotaggio. L'impedenza vista dal generatore decresce infatti al crescere del valore delle capacità in parallelo così che, a parità di tensione applicata, il circuito stesso richiede per il pilotaggio una potenza sempre crescente e diviene tecnicamente inadeguato.

Sembrirebbe quindi desiderabile aumentare la frequenza di oscillazione.

Ma per restare nel regime di campi 'lentamente variabili' appropriato ad un circuito a costanti concentrate che altrimenti inizierebbe ad irraggiare, le dimensioni del circuito devono essere molto minori della lunghezza d'onda dell'oscillatore.

Se prendiamo $2 L(\beta_{\max})$ come ordine di grandezza della dimensione dell'apparato, questa condizione insieme alla (3.8) porta a concludere che dev'essere $\beta \ll 1$.

Per l'accelerazione di protoni questo comporta energie cinetiche massime dell'ordine di un centinaio di MeV al massimo, mentre per particelle leggere come gli elettroni, che a $\beta \approx .5$ hanno ancora un'energia cinetica di soli 80 KeV, largamente al di sotto dei limiti di un a. elettrostatico, il circuito descritto sarebbe invece del tutto inutile.

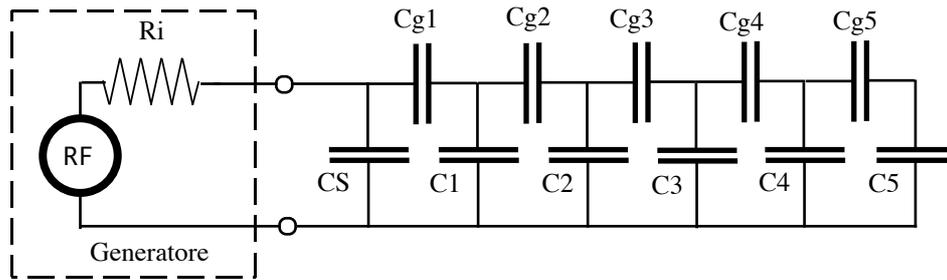


Fig.3.4.1. - Schema equivalente (a bassa frequenza) del circuito di alimentazione dell'acceleratore di Widerøe di Fig.3.4. Cgi sono le capacità delle 'gap', Ci quelle dei tubi deriva, Cs quella della sorgente ed Ri è la resistenza interna del generatore.

Risulta quindi evidente che per frequenze ed energie più alte occorre sviluppare tecniche diverse di generazione dei campi acceleranti: in pratica, negli acceleratori elettrodinamici "risonanti" si ricorre a strutture risonanti chiuse a costanti distribuite, di dimensioni contenute, che non irraggiano e nelle quali si possono realizzare, con perdite di energia ridotte, campi elettrici molto elevati.

Di queste strutture, dette genericamente "cavità risonanti", tratteremo più in dettaglio nel Capitolo IV.

La schematizzazione più semplice di una cavità risonante è mediante una gap di spessore infinitesimo ai capi della quale esiste una tensione oscillante della forma

$$V(t) = V_0 \sin(\omega_{RF} t + \phi) , \quad (3.8.2)$$

in cui ϕ è una costante di fase arbitraria e non vi sono particolari limitazioni a priori sulla frequenza di oscillazione ω_{RF} . Attraversando la gap una particella riceve quindi un incremento di energia

$$\Delta T(t) = q V_0 \sin(\omega_{RF} t + \phi) .- \quad (3.8.3)$$

Per completezza ricordiamo qui che per la generazione di campi utili all'accelerazione esistono anche sistemi "non risonanti", essenzialmente basati sul fenomeno dell'induzione e cioè sulla generazione di campi elettrici mediante variazioni di flussi magnetici. Un esempio classico di cui ci occuperemo più avanti è quello del betatrone, un altro quello degli a. lineari a induzione^[2].

Esiste però anche, come già menzionato più sopra la possibilità di far passare la particella, o meglio il fascio di particelle, da accelerare, ripetutamente attraverso una stessa 'gap'.

E' evidente che per ciò occorre far percorrere alla particella delle orbite approssimativamente circolari o spiraliformi; il metodo conduce perciò alla realizzazione di a. detti 'circolari', nei quali per guidare le

particelle sulle traiettorie desiderate si utilizzano - per i motivi più sopra spiegati - campi magnetici statici o lentamente variabili.

Anche gli acceleratori circolari si distinguono in 'non risonanti', una categoria cui appartiene in pratica soltanto il betatrone, una macchina peraltro di notevole interesse applicativo oltre che storico, e risonanti, la categoria di cui ci occuperemo in modo particolare in ciò che segue.

Gli acceleratori circolari risonanti possono ancora avere orbite 'aperte' o 'chiuse'.

3.2. Il Ciclotrone classico, a campo magnetico uniforme

3.2.1. Generalità e principio di funzionamento

Nel ciclotrone, macchina circolare risonante, le particelle vengono fatte passare più volte (ricicolate) attraverso una stessa gap accelerante e devono trovarsi sempre in sincronia con il campo elettrico alternato presente nella gap stessa.

Per ottenere il ricircolo ed assicurare che le particelle restino in fase con il campo elettrico accelerante, il ciclotrone classico a campo magnetico uniforme utilizza una particolare configurazione della gap ed il fatto che una particella che si muove su di un piano ortogonale ad un campo magnetico uniforme obbedisce all'equazione del moto (A1.1.18) e, ad energia costante, percorre delle traiettorie circolari di raggio ρ_0 (v. eq. A1.1.19) con un periodo di rotazione che, per particelle non relativistiche è indipendente dall'energia.

Infatti, in un campo magnetico uniforme, ortogonale al piano della traiettoria, la particella si muove su una traiettoria circolare con periodo di rivoluzione $T=(2\pi/\omega_c)$. $\omega_c/2\pi$ è detta appunto 'frequenza di ciclotrone'. Per ω_c e per il raggio di curvatura dell'orbita, ρ_0 , valgono le:

$$\omega_c = |q| \frac{B}{m} \quad \rho_0 = \beta c / \omega_c \quad . \quad (3.4.1)$$

L'osservazione che porta al principio di funzionamento dell'acceleratore è che, come detto sopra, per particelle non relativistiche, per le quali cioè $m \approx m_0$ è costante, ovvero $\gamma \approx 1$, secondo la prima delle (3.4.1) il valore del periodo di rotazione non dipende dall'energia della particella.

Quindi, anche se la particella viene accelerata attraversando la gap di una cavità risonante e cambia di conseguenza il valore del raggio di curvatura della traiettoria circolare percorsa, non cambia il tempo impiegato a percorrere un giro.

Se dunque, all'istante di un certo passaggio della particella attraverso la gap il campo elettrico si trovava nella giusta fase per accelerarla, continuerà automaticamente a rimanere in fase anche nei passaggi successivi purché la frequenza di ciclotrone sia legata alla frequenza di oscillazione del campo accelerante, $\omega_{RF}/(2\pi)$, che viene tenuta fissa, dalla relazione

$$h \omega_c = \omega_{RF} \quad (3.4.2)$$

nella quale h , detto numero di armonica, è un intero positivo⁵.

Lo schema secondo il quale si può realizzare in pratica il funzionamento descritto è mostrato nella Fig. 3.6.

⁵ h è detto 'numero di armonica' in quanto la frequenza ω_{RF} è armonica della ω_c .

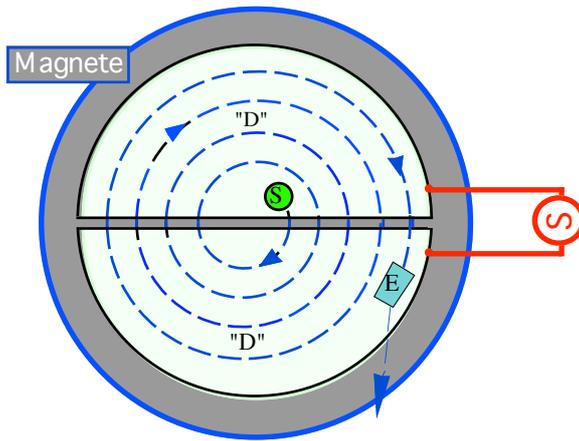


Fig. 3.6 - Il Ciclotrone; schema di funzionamento

Un elettromagnete a poli circolari pieni, quasi piani e orizzontali, produce fra le espansioni polari un campo verticale quasi perfettamente uniforme⁶.

Fra le espansioni polari stesse è alloggiata una cavità risonante, costituita da due scatole metalliche affacciate (vuote) a forma di 'D' all'interno delle quali non vi è campo e circola il fascio; la cavità opera a frequenza fissa, f_{RF} . Una vista schematica delle 'D' è data in Fig. 3.7. La gap di accelerazione è quella fra le due 'D' e si estende quindi su di un intero diametro del magnete. Le scatole hanno la stessa funzione dei tubi di deriva dell'acceleratore di Widerøe, e cioè quella di schermare la particella dall'influenza di campi elettromagnetici nell'intervallo fra due successivi passaggi nella gap accelerante.

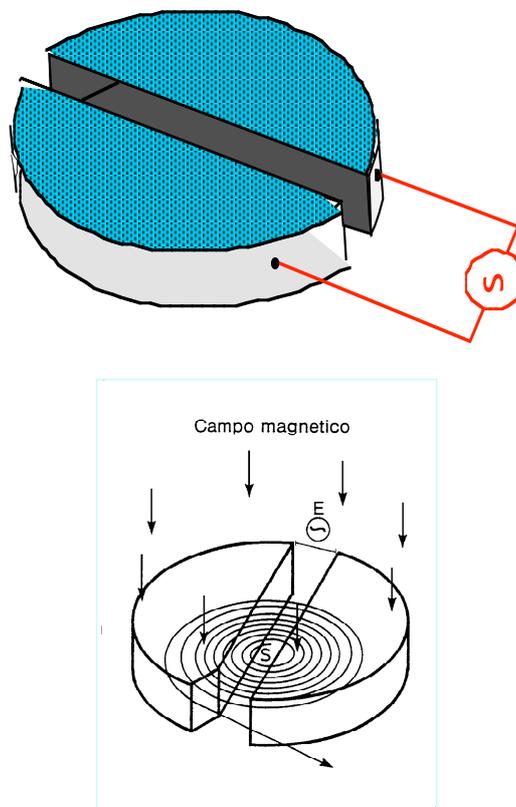


Fig. 3.7 - Le 'D' di un ciclotrone - Schema.

⁶ Come vedremo più avanti, è in realtà necessario un piccolo gradiente di campo radiale per stabilizzare la traiettoria delle particelle sia nel piano radiale che in quello verticale.

Le particelle, generate da una sorgente (S) posta vicino al centro del magnete (o comunque portate vicino al centro stesso da un sistema di iniezione), ricevono un incremento di energia - che fa crescere il raggio della loro orbita - ad ogni passaggio fra le D (una volta ogni mezzo giro); percorrono quindi un'orbita spiraliforme, costituita da archi di cerchio (v. Fig.3.6). Si tratta quindi di orbite 'aperte'.

Si noti che, nello specifico caso, il numero di armonica h che compare nella (3.4.2) deve essere dispari.

Infatti, poiché fra un passaggio nella gap ed il successivo la direzione della velocità della particella si inverte, anche il campo elettrico deve aver cambiato segno (v. Fig 3.6) e quindi il tempo impiegato dalla particella a fare un mezzo giro deve corrispondere ad un numero dispari di mezze oscillazioni del campo elettrico.

E' anche evidente che, detta V la differenza di potenziale ai capi della gap, oscillante a frequenza ω_{RF} , con

$$V = V_0 \sin(\omega_{RF} t + \varphi), \quad (3.4.3)$$

e detta
$$\varphi_S = \omega_{RF} t_S + \varphi \quad (3.4.4)$$

la fase di passaggio della particella nella gap, l'incremento di energia della particella per ciascun passaggio sarà⁷ :

$$\Delta T = qV_0 \sin\varphi_S. \quad (3.4.5)$$

Poiché poi il raggio della traiettoria semicircolare di impulso p è dato dalla

$$\rho = p / (|q| B) \quad (3.4.6)$$

e p è legato all'energia cinetica T dalla:

$$p = \sqrt{2 m_0 T} . \quad (3.4.7)$$

la differenza di raggio da un passaggio al successivo è

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{T} . \quad \text{da cui} \quad \Delta\rho = \frac{1}{2} \frac{p}{|q|B} \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{|q|B} \sqrt{\frac{m_0}{2T}} \Delta T. \quad (3.4.8)$$

Si osservi che l'ordine di grandezza di ΔT è di 100 KeV per una particella di carica unitaria: ne segue che per raggiungere un'energia finale ad esempio di 100 MeV, la stessa particella dovrà percorrere ≈ 1000 giri e che $\Delta\rho/\rho$ da un giro al successivo è, alla fine del ciclo, dell'ordine di $5 \cdot 10^{-4}$.

⁷ Nota che T , senza alcun indice, rappresenta l'energia cinetica della particella. Non confondere con i periodi T_c e T_{RF} di cui sopra!

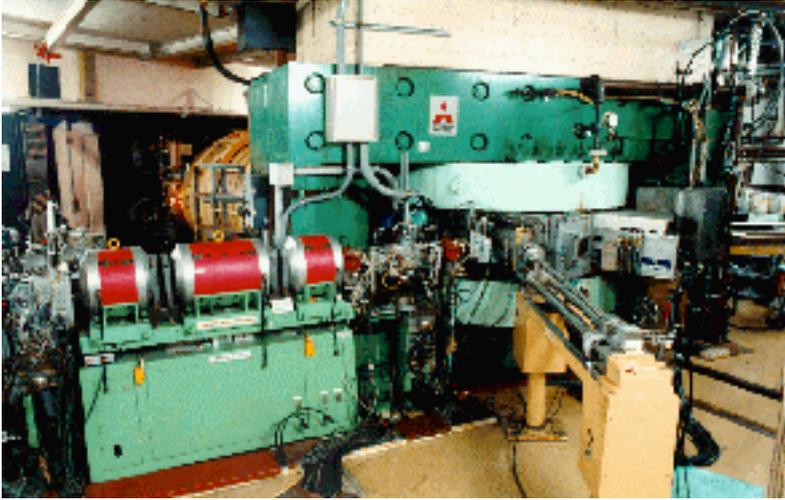


Fig. 3.7.1 Vista di un ciclotrone (K=68), post-acceleratore di un Tandem. A sinistra il canale magnetico del fascio estratto.

3.2.2. Energia cinetica massima e costante del ciclotrone

L'energia cinetica massima raggiungibile, T_{\max} , è determinata - oltre che dalla condizione di non-relativisticità - dai valori massimi del campo magnetico B , e del raggio R della zona utile di campo magnetico. Va notato che il costo del magnete è proporzionale all'incirca al cubo di R !

T_{\max} verrà raggiunta quando $\rho_{\max} = R$, cioè quando :

$$\frac{\sqrt{2 m_0 T_{\max}}}{|q| B} = R \quad (3.4.9).$$

L'energia cinetica massima ottenibile (sempre assumendo di essere nel caso non relativistico) vale quindi in definitiva:

$$T_{\max} = \frac{R^2 q^2 B^2}{2 m_0} \quad (3.4.10).$$

Raggiunto il raggio massimo del magnete, R , e completata quindi l'accelerazione, le particelle vengono estratte - mediante campi elettrici o magnetici localizzati in posizione opportuna - ed avviate all'utilizzo.

I ciclotroni a campo uniforme sono dunque adatti ad accelerare particelle non relativistiche o comunque non troppo veloci, ed in particolare ioni pesanti (ad elevato stato di carica) quali quelli producibili con un Tandem.

Supponiamo di accelerare uno ione con numero di massa A e carica $n \cdot e$ (con $n \leq Z$); la (3.4.10) si può allora scrivere come segue :

$$T_{\max} = \frac{R^2 n^2 e^2 B^2}{2 m_A} \quad (3.4.11)$$

dove con m_A abbiamo indicato la massa a riposo dello ione.

Se inoltre, detta m_{op} la massa a riposo del protone, poniamo

$$m_A \approx A m_{op} , \quad (3.4.12)$$

e dividiamo ambo i membri della (3.4.11) per A, otteniamo infine :

$$\boxed{\frac{T_{\max}}{A} = \frac{R^2 e^2 B^2}{2m_{op}} \left(\frac{n}{A}\right)^2 \equiv K_c \left(\frac{n}{A}\right)^2} \quad (3.4.13)$$

K_c , così definita, è la cosiddetta 'costante del ciclotrone' e T/A è l'energia cinetica per nucleone.

3.2.3. Valori numerici ed esempi

Esprimendo - come d'uso - l'energia cinetica divisa per il numero di massa in "MeV per nucleone", la (3.4.13) si può mettere nella forma:

$$\begin{aligned} \frac{T_{\max}}{eA} &= c^2 \frac{e}{2m_o c^2} R^2 B^2 \left(\frac{n}{A}\right)^2 \Rightarrow = c^2 \frac{1}{2(m_o c^2 / e)} R^2 B^2 \left(\frac{n}{A}\right)^2 \\ \Rightarrow \left(\frac{T_{\max}}{A}\right)_{(MeV/A)} &= \frac{1}{10^6} \left[9 \cdot 10^{16} \frac{1}{2 \cdot 9.38 \cdot 10^8} R^2 B^2 \left(\frac{n}{A}\right)^2 \right] = 48 R^2 B^2 \left(\frac{n}{A}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

con R espresso in metri [m] e B in Tesla [T].

L'elettromagnete delle machine di più alta energia viene oggi spesso realizzato utilizzando avvolgimenti superconduttivi per realizzare campi magnetici più elevati di quelli ottenibili con un magnete convenzionale; si parla in tal caso di ciclotroni superconduttivi.

Uno di essi è appunto il CS (ciclotrone superconduttivo) costruito a Milano ed ora installato nei Laboratori di Catania dell'INFN; ha un raggio massimo di .7 m ed il suo magnete raggiunge un campo di ≈ 4.6 T.

Il valore della relativa costante K_c è dunque:

$$K_c = 48 \cdot R_{(m)}^2 \cdot B_{(T)}^2 \approx 500 \text{ MeV /nucleone} \quad (3.4.17)$$

In realtà, le massime energie ottenibili sono poi limitate anche da altri fattori come difficoltà di iniezione, problemi di stabilità, problemi di estrazione, sopravvenienza di effetti relativistici, eccetera.

Le energie massime raggiungibili dai ciclotroni sono relativamente basse ma la corrente media dei fasci accelerati può raggiungere valori relativamente molto elevati ($\geq \approx 1$ mA).

Le particelle vengono accelerate indipendentemente dalla loro fase rispetto al campo accelerante (nell'intervallo $0 < \phi < \pi$) ma ad energia massima diversa a seconda della fase stessa. In pratica, se si desidera una dispersione di energia non troppo grande, occorre restringere la fase delle particelle iniettate ad un piccolo intervallo; ne risulta un fascio formato da un treno continuo di impulsi.

Unite alla semplicità di funzionamento ed alle dimensioni relativamente compatte queste caratteristiche rendono i ciclotroni particolarmente interessanti per applicazioni mediche, diagnostiche e terapeutiche, e per studi di Fisica nucleare; sono questi infatti i campi in cui trovano oggi più frequente applicazione.

Il primo ciclotrone, a campo uniforme, fu costruito da E.O.Lawrence nel 1932.

3.2.4. Accelerazione di particelle relativistiche

La condizione di (quasi) sincronismo, ottenuta sotto le ipotesi - oltre che di quasi non-relativisticità - di campo magnetico uniforme e costante nel tempo, e di frequenza fissa del campo accelerante, viene a cadere quando γ inizia a crescere rapidamente. L'equazione (3.4.1) che riscriviamo nella forma

$$\omega_c = \frac{|q|B}{\gamma m_0} = \frac{\omega_{c0}}{\gamma}, \quad (3.48)$$

lascia tuttavia intravedere le più semplici strade da seguire per superare tale limitazione:

a) variare B proporzionalmente a γ , così da mantenere ancora fissa la frequenza ω_c , e quindi anche quella, ω_{RF} , del campo accelerante.

Questa scelta porta al '**Ciclotrone a settori**'.

b) lasciare che ω_c varii con γ secondo la (3.48), ma modulare la frequenza del campo accelerante seguendo il valore di ω_c .

Questa scelta porta al '**Sincrociclotrone**'.

Per il caso relativistico estremo (elettroni), i ciclotroni non sono comunque - per motivi pratici - utilizzabili. Si usa, in questo caso, una variante del ciclotrone detta 'Microtrone'.

3.2.5. Il ciclotrone a settori

Nel Ciclotrone a Settori la frequenza f_{RF} è mantenuta fissa mentre il campo magnetico medio che la particella vede lungo la sua orbita viene fatto variare con la distanza dal centro dell'orbita stessa - che aumenta quando l'energia cresce - in modo da mantenere il sincronismo con f_{RF} .

La condizione che il campo medio visto dalla particella di massa m lungo la sua traiettoria, $\langle B \rangle$, deve soddisfare è'

$$\left(\frac{e}{m_0}\right) \langle B \rangle(\rho_0) = \left(\frac{e}{m}\right) \langle B \rangle(\rho(m)) \quad (3.49)$$

in cui ρ è il raggio medio dell'orbita corrispondente alla massa m. Ponendo $B(\rho_0) = B_0$, si ha:

$$\langle B \rangle(\rho(m)) = B_0 \left(\frac{m}{m_0}\right) = \gamma B_0. \quad (3.50)$$

Una soluzione semplice come quella schematicamente indicata in Fig. 3.9., per realizzare la condizione (3.50), non è applicabile per un motivo che vale la pena di approfondire.

Le linee di forza del campo magnetico, determinate dalla forma dei poli, sono tali che - fuori dal piano mediano e con B_z diretto verso l'alto - esiste una componente B_r diretta come in figura e cioè, verso l'esterno al di sopra, e verso l'interno al di sotto del piano mediano.

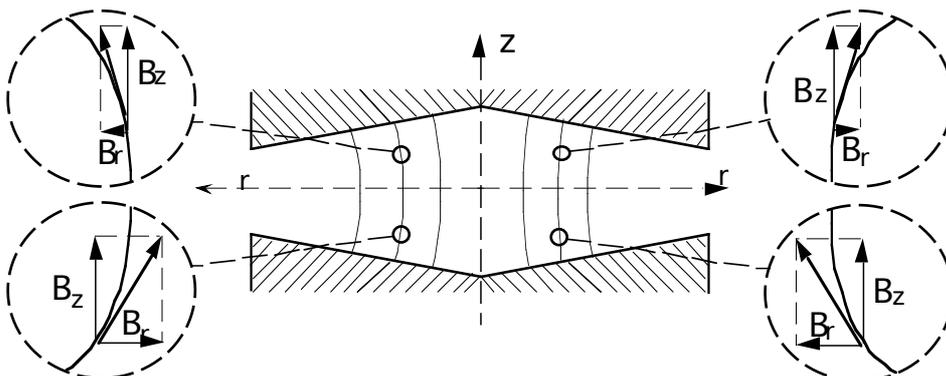


Figura 3.9. - Schema di traferro con campo magnetico che cresce con r

E' facile convincersi del fatto che, una particella che gira guidata da B_z (e quindi nel caso specifico in senso orario) fuori dal piano mediano, viene deflessa verso l'alto al di sopra, e verso il basso al di sotto del piano mediano stesso. Viene cioè allontanata dal piano mediano stesso e finisce per perdersi sulla camera da vuoto⁸.

Il moto sul piano mediano è quindi in equilibrio instabile ed in pratica, per effetto di inevitabili errori e fluttuazioni nei parametri, non sarà in generale possibile accelerare un fascio di intensità finita.

Occorre pertanto ricorrere ad un sistema più complicato: variando il traferro fra i poli del magnete, secondo settori - diritti o a spirale (si parla di valli (V) e di creste o rilievi (R), v. Fig. 3.10) si fa variare il valore del campo magnetico in funzione dell'azimuth; questo risulta inversamente proporzionale all'altezza del traferro e quindi maggiore sulle creste che nelle valli.

La traiettoria di una particella con energia costante, che in un ciclotrone normale sarebbe il cerchio tratteggiato di raggio R , diviene in un ciclotrone a quattro settori la curva allungata indicata a tratto pieno, con raggio ρ_v nelle zone di valle e ρ_R sulle creste (schematicamente ed avendo esagerato l'effetto per chiarezza del disegno).

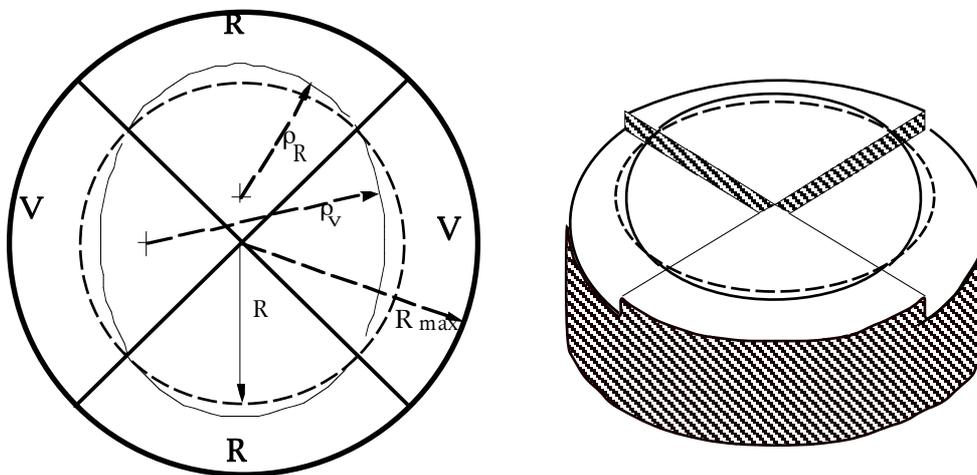


Figura 3.10. - Schema di una traiettoria (isoenergetica) in un ciclotrone a quattro settori.

Poiché la lunghezza della traiettoria è maggiore nelle zone di cresta dove il campo magnetico è più alto ed è minore nelle zone di valle dove il campo è minore, e poiché la differenza fra le due lunghezze tende a crescere all'aumentare di R , il valor medio del campo magnetico lungo l'orbita cresce con R , come richiesto per il sincronismo.

Si può però in questo caso mostrare⁹ anche che le componenti del campo magnetico dovute agli effetti di bordo sul confine fra valli e creste ed il passaggio della traiettoria nella zona di bordo ad un angolo rispetto al bordo del polo stesso, producono un effetto foccheggiante del moto in verticale.

Infine, settori sagomati a spirale forniscono una focalizzazione ancor più efficace, anche nel piano radiale, permettendo così di accelerare correnti più alte e sono quindi quelli poi più usati in pratica.

⁸ Un campo costruito come quello della figura 3.9 si dice infatti 'defoccheggiante (in verticale)'. Notiamo per inciso che se il campo fosse decrescente al crescere del raggio r , l'effetto sarebbe contrario e la particella sarebbe richiamata verso il piano mediano. Una tale situazione si descrive come 'foccheggiante (in verticale)'.

⁹ v.ad es. Humphries, §15.3, pag 513 e segg.

Il calcolo delle traiettorie e la valutazione del valor medio di B lungo di esse è in genere molto complicato e va eseguito numericamente.

Notiamo anche - per inciso - che le cavità risonanti a D vengono sostituite da altre, di forma più complessa, alloggiate nelle valli del magnete.

I settori magnetici possono anche essere fisicamente separati (*in tal caso si parla di Ciclotroni a settori separati*) per realizzare economie nella costruzione del magnete e per disporre, fra l'uno e l'altro di maggior spazio per l'installazione di cavità risonanti ed altra strumentazione.

I ciclotroni a settori di grandi dimensioni, non superconduttivi (normalmente a settori separati) raggiungono $K \approx 600$ MeV/A con $B_{\max} \approx 2$ T ed $R_{\max} \approx 2.5$ m. I ciclotroni superconduttivi, assai più compatti, raggiungono anch'essi valori di $K \approx 600$ MeV/A con $B_{\max} \approx 5$ T ed $R_{\max} \approx 1$ m.

Per motivi tecnici le particelle da accelerare devono essere iniettate su un'orbita interna di raggio ed energia non troppo piccoli. Necessitano quindi di un iniettore, normalmente un piccolo ciclotrone a campo uniforme o un Tandem.

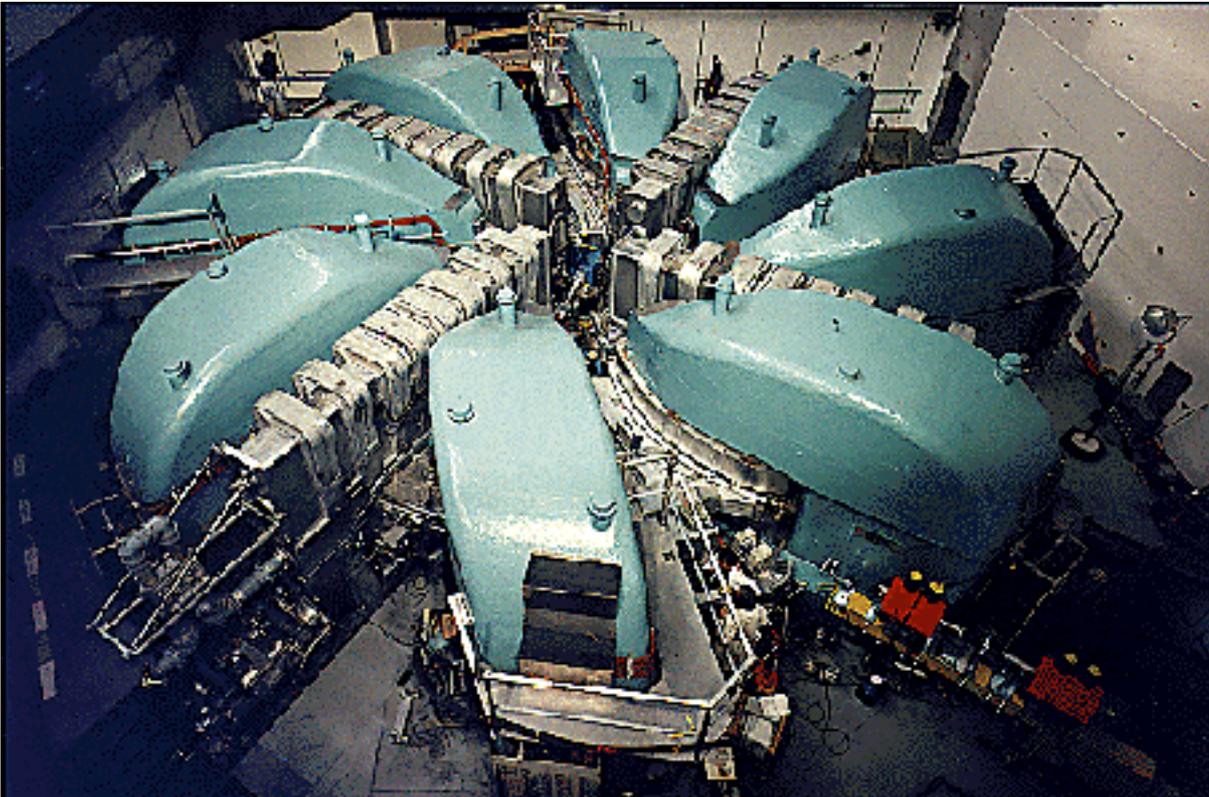


Fig. 3.10.2 - Ciclotrone a settori separati di Zurigo (PSI). Accelera protoni a 590 MeV con corrente media fino a 1.9 mA (0.9 MW), per una sorgente di neutroni di 'spallazione'.

3.3. Il Sincrociclotrone

Nel Sincrociclotrone il campo magnetico è costante e, per mantenere in sincronismo particelle relativistiche, si ricorre alla variazione di f_{RF} con l'energia, e dunque con il tempo.

Poiché ogni particella iniettata deve vedere la stessa evoluzione temporale di f_{RF} occorre iniettare un impulso di fascio, fargli compiere tutto il ciclo di accelerazione e ripristinare le condizioni di iniezione prima di potere iniettare un secondo impulso.

Il funzionamento è quindi impulsivo e la corrente media accelerata corrispondentemente minore. In compenso si raggiungono dei valori di $K \approx 1000$ MeV/nucleone (o poco maggiori).

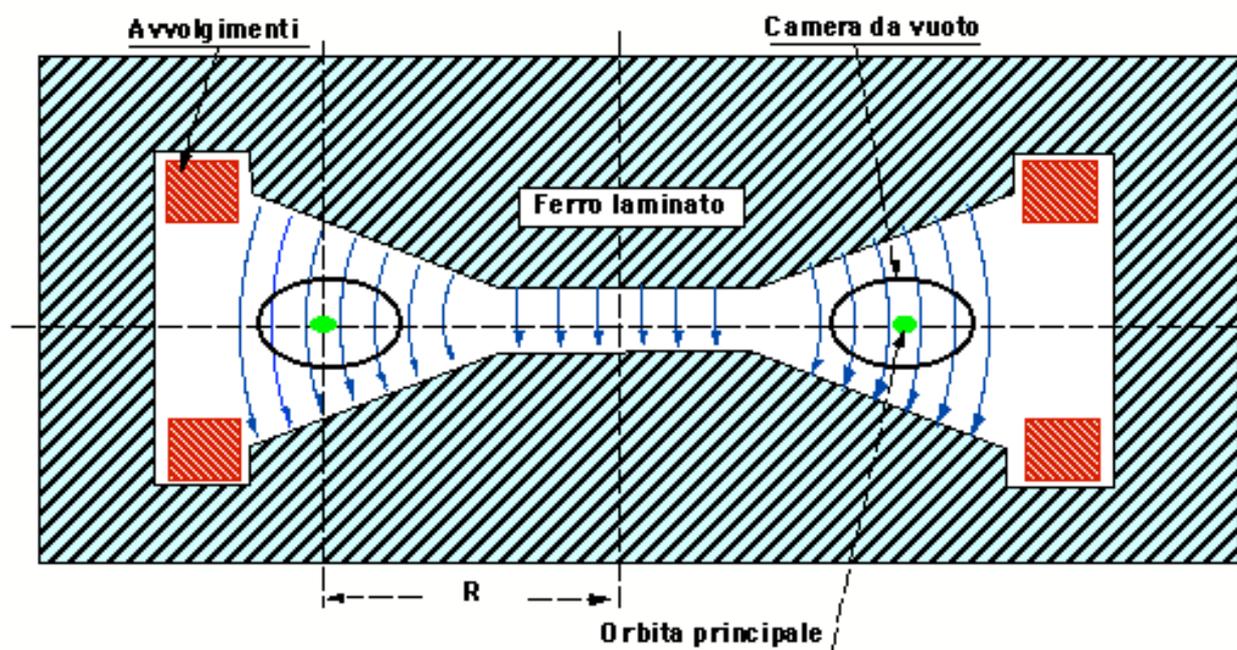
I costi dei grandi magneti monolitici e dei complessi sistemi risonanti a frequenza variabile rendono non economica la loro estensione ad energie più alte.

3.4. Il Betatrone

3.4.1. Principio di funzionamento

Il betatrone è un acceleratore a induzione: il campo elettrico accelerante non è generato in una cavità risonante ma deriva direttamente dalla variazione del flusso magnetico concatenato con l'orbita.

Uno schema del betatrone è mostrato in Fig. 3.18.



Fi

Figura 3.18. - Schema del magnete e della camera da vuoto di un betatrone, che mostra il campo B_0 sull'orbita (di raggio $r = R$) ed il campo B_c attraverso la zona centrale.

L'elettromagnete a simmetria cilindrica, del quale torniamo a parlare più avanti, viene alimentato con una corrente che varia nel tempo. Il campo magnetico variabile che ne risulta produce un campo elettromotore dato dall'equazione di Maxwell

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial B}{\partial t} \quad (3.67)$$

le cui linee di forza sono cerchi concentrici, di raggio generico ρ , aventi per asse l'asse del magnete.

Per la simmetria del problema, sul piano mediano del magnete le uniche componenti diverse da zero dei campi magnetico ed elettrico sono B_z , ed E_θ ; la (3.67) si riduce pertanto, nel sistema di coordinate cilindrico (r, θ, z) , a

$$\oint r \vec{E} \cdot d\vec{\theta} = 2\pi r E_\theta(r) = - \frac{d\Phi(B(r))}{dt} \quad (3.68)$$

Ciascuno dei cerchi di raggio r può costituire l'orbita (questa volta chiusa!) di una particella, guidata dal campo magnetico $B(r)$ ed accelerata dal campo elettromotore $E_\theta(r)$, purché siano verificate le opportune condizioni che ci accingiamo a studiare.

3.4.2. Condizioni di betatrone

Una particella di momento P_0 iniettata nella macchina lungo la tangente al cerchio di raggio R corrispondente a P_0 , giacente nel piano mediano del magnete e con centro sul suo asse, continua a percorrere il cerchio stesso che chiamiamo "orbita di equilibrio principale".

Sia $B_R(t) = B_z(R, t)$ il valore del campo sull'orbita principale.

Perché durante l'accelerazione la particella il cui momento varia continui a percorrere la stessa orbita (principale), il campo magnetico di guida ed il campo elettrico accelerante devono evidentemente essere tali che il raggio R , legato al modulo del momento della particella, P , ed al valore del campo magnetico in R dalla

$$P = qB_z(R, t)R = qB_R R, \quad (3.69)$$

rimanga costante nel tempo.

Ma l'evoluzione del valore di P è determinata dalla

$$\dot{P} = -qE_\theta(R) = -qE_R, \quad (3.70)$$

che, per effetto della (3.68) diviene

$$\dot{P} = -qE_R \equiv \frac{q}{2\pi R} \frac{d\Phi(B)}{dt}. \quad (3.71)$$

Il flusso di B è invece dato dalla

$$\Phi(B) = \int_{\pi R^2} \vec{B} \cdot \vec{n} dS \equiv \pi R^2 \bar{B}, \quad (3.72)$$

in cui si è fatto uso, per la seconda eguaglianza, del teorema della media, definendo un campo magnetico medio, \bar{B} , sull'area racchiusa dall'orbita; sostituendo la derivata della (3.72) nella (3.71) si ottiene

$$\dot{P} = \frac{q}{2\pi R} \pi R^2 \frac{d\bar{B}}{dt} = \frac{qR}{2} \frac{d\bar{B}}{dt} \quad (3.73)$$

D'altra parte la (3.69) fornisce

$$\dot{P} = qR \frac{dB_R}{dt} \quad (3.74)$$

cosicché, infine, si ottiene la relazione cercata

$$\boxed{\frac{dB_R}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\bar{B}}{dt}}. \quad (3.75)$$

La condizione trovata fa comprendere la ragione per la variazione dell'altezza del traferro in funzione del raggio schematizzata in Fig. 3.18: il campo sull'orbita principale deve essere la metà di quello mediato sull'area dell'orbita stessa.

Le forme d'onda del campo magnetico medio, del campo sull'orbita e del campo elettrico accelerante, nel caso elementare di eccitazione del magnete con una corrente sinusoidale, sono rappresentate nella Fig. 3.19; le particelle vengono iniettate in prossimità degli zeri del campo magnetico - corrispondenti al massimo del campo elettrico - ed estratte, o comunque utilizzate, in prossimità del massimo del campo magnetico.

Schemi più complicati, che combinano il campo magnetico oscillante con un opportuno campo statico di polarizzazione (che fornisce il campo di guida iniziale col giusto segno) permettono di utilizzare la derivata positiva del campo oscillante su di un arco di fase più ampio [5].

Si noti la natura essenzialmente impulsiva del funzionamento: ad ogni ciclo del magnete viene accelerato il fascio iniettato nella camera da vuoto, che occupa una regione di spazio nell'intorno dell'orbita principale: al termine del ciclo viene quindi estratto un 'impulso' di fascio la cui durata è $\approx 2\pi R/c$ o maggiore - a seconda di come viene effettuata l'estrazione - ma che è comunque una frazione piccola del quarto di periodo dell'onda di eccitazione.

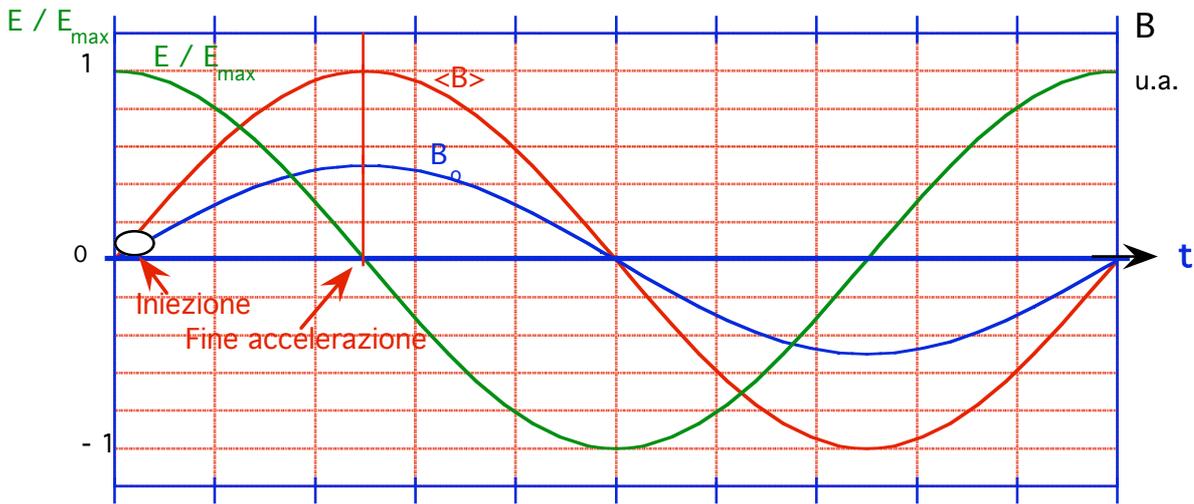


Figura 3.19 - Forme d'onda dei campi magnetici e del campo elettrico accelerante per un betatrone.

Si può ancora osservare che, proprio per le caratteristiche del sistema di accelerazione ad induzione e per la semplicità del sistema di focalizzazione, la corrente accelerata può essere molto grande, arrivando - in alcune macchine molto recenti - fino all'ordine dei kA.

ESEMPIO

Si abbia un betatrone con raggio dell'orbita principale $R = .7$ m e campo massimo $B_{max} = 1$ T. Sia inoltre pari a 10 Hz la frequenza, f_r , di ripetizione del funzionamento.

L'energia massima si ricava dalla $P_{max} = e B_{max} R$ (3.76)

In unità pratiche :

$$P_{max} = 300 \cdot 1 \cdot 0.7 \text{ MeV/c} = 210 \text{ MeV/c}, \quad (3.77)$$

che, per elettroni corrisponde ad una energia cinetica di ≈ 210 MeV; per protoni, usando la relazione approssimata (A1.2.12), si otterrebbe invece

$$T \approx p^2 c^2 / (2 E_0) = (210)^2 / 1876 \text{ MeV} \approx 23.5 \text{ MeV}. \quad (3.78)$$

Confrontando quest'ultimo valore di energia con quello ottenuto per un ciclotrone all' incirca delle stesse dimensioni al par. 3.2.3, si vede che per protoni il **ciclotrone** fa meglio di un betatrone. E' per questo che i betatroni sono usati esclusivamente per elettroni.

Il campo elettrico sull'orbita si trova utilizzando le (3.71) e (3.74) che danno

$$E_R = R \dot{B}_0 \quad (3.78)$$

ed il fatto che la variazione di B_0 è sinusoidale con frequenza f_r , così che il valore massimo della sua derivata è

$$\dot{B}_{0 \max} = 2 \pi f_r B_0 . \quad (3.79)$$

Si ottiene in definitiva:

$$E_R(t \approx 0) = R 2 \pi f_r B_0 = 0.7 \cdot 2\pi \cdot 10 \cdot 1 \text{ V/m} \approx 44 \text{ V/m} \quad (3.80)$$

pari a circa 200 V/giro.

Se \dot{B}_0 restasse costante al suo valore massimo, il numero di giri, N , necessario per raggiungere l'energia T sarebbe pari a

$$N \approx 23.5 \cdot 10^6 / 200 \approx 1.18 \cdot 10^5 . \quad (3.81)$$

Il numero effettivo sarà maggiore o uguale a questo valore: si tratta come si vede di un numero molto grande.

3.4.3. Stabilità dell'orbita principale

Iniettando nell'acceleratore un fascetto di particelle, le condizioni iniziali relative alla direzione ed al modulo del momento non potranno essere esattamente tutte uguali a quelle ideali ma saranno distribuite in un intorno di quelle

$$P_\theta = qBR \quad ; \quad P_r = P_z = \dot{P}_r = \dot{P}_z = 0 \quad ; \quad z = 0 . \quad (3.82)$$

secondo una certa distribuzione di larghezza finita.

Possiamo però osservare che, in virtù del fatto che il campo magnetico diminuisce al crescere del raggio vettore r , le linee di forza del campo stesso nella zona occupata dal fascio sono incurvate verso l'esterno, al contrario cioè di quelle della figura 3.9, § 3.2.5.

Applicando lo stesso ragionamento qualitativo allora fatto si trova che, in questo caso, le componenti orizzontali del campo al di fuori del piano mediano forniscono una forza che richiama le particelle verso il piano mediano stesso quando queste tendono ad allontanarsene.

3.5. Evoluzione degli acceleratori circolari verso la classe dei risonanti ad orbite chiuse L'energia massima raggiungibile da acceleratori circolari il cui magnete di guida e focalizzazione è 'pieno' - siano essi risonanti e ad orbite aperte come i ciclotroni ed i microtroni, o non risonanti e ad orbite chiuse come i betatroni - è limitata, oltre che dai problemi e dagli effetti specifici di ciascun tipo brevemente discussi nei precedenti paragrafi, anche, in ultima analisi, dalle dimensioni e dal costo del magnete stesso.

Come infatti abbiamo più volte ricordato il peso ed (approssimativamente) anche il costo di un magnete pieno sono proporzionali al cubo del suo diametro e quindi al cubo dell'energia massima raggiungibile.

D'altra parte, l'esempio del betatrone ci ha mostrato che esiste la possibilità di accelerare delle particelle su di un'orbita stabile, chiusa e di raggio costante.

E' quindi logico pensare ad un canale magnetico anulare che realizzi le volute condizioni di campo soltanto nella regione direttamente interessata dall'orbita di accelerazione.

Dalla relazione generale (3.69) è infatti facile concludere che, per mantenere il raggio costante al variare dell'energia, è sufficiente far aumentare il valore locale del campo magnetico proporzionalmente al momento delle particelle.

Il costo di un tale magnete è (all'incirca) proporzionale alla prima potenza del diametro della macchina (o minore) e quindi per energie e diametri elevati enormemente meno costoso di un magnete 'pieno'.

Si arriva così agli acceleratori di tipo 'sincrotrone'.

Bibliografia

- [1] a) *Ising* , Ark.Math.Astron.Phys., 18, n.30, Heft 4, p.45 (1925)
b) *R.Wiederø* , Arch.Electrotechn., 21, 387, (1928).
- [2] *S.Humphries Jr.*, "Principles of charged particle A.", J.Wiley&Sons (1986)
- [3] *J. Le Duff* , CERN Accelerator School, Gif-sur-Yvette, Int.Rep. CERN 85-19, 127e128 (1985)
- [4] *E.Persico, E.Ferrari, S.E. Segre*, "Principles of Particle A.", W.A. Benjamin, Inc (1968)
- [5] *M.S.Livingston, J.P. Blewett* , "Particle A.", Mc Graw-Hill Book Co. Inc. (1962)
P.J.Bryant, K.Johnsen, "Circular A. and Storage Rings", Cambridge University Press, 1993 ; *P. Heikkinen*, "Cyclotrons", CERN A. School, V General a. Course, Cern Rep.94/01, Jan 1994.
- [6] *H.Herminghaus* , "The Polytron as a c.w. Electron A. in the 10 GeV range', NI&M (Phys. res.) , 1991.
- [7] *D.Senatra* , "Il microtrone: Teoria e principali elementi di progetto", Rapporto Interno LNF - 66/45, Ott. 1966.;
U.Bizzarri e A.Vignati , "The 12 MeV Microtron used as injector of the Frascati Electrosynchrotron", Rapp.Int. LNF-69/78, Dic. 1969 ; *P. Lidbjörk*, "Microtrons", CERN A. School, V General a. Course, Cern Rep.94/01, Jan 1994.

CAPITOLO IV : STRUTTURE ACCELERANTI	2
4.1. – INTRODUZIONE	2
4.1.1. <i>Ricapitolo di nozioni sui circuiti oscillanti</i>	2
4.1.2 <i>Le cavità risonanti. Un modello semplice</i>	4
4.2 CAVITÀ CILINDRICA	8
4.2.1 <i>Frequenza di risonanza</i>	8
4.2.2 <i>Fattore di tempo di transito</i>	11
4.2.3 <i>Fattore di merito e impedenza shunt</i>	12
4.2.3.1 <i>Definizioni</i>	12
4.2.4 <i>Sequenza di cavità cilindriche</i>	14
4.2.4.1 - <i>Sistema di cavità disaccoppiate - Equivalenza ad un' onda viaggiante</i>	14
4.2.5 <i>Accelerazione per mezzo di onde elettromagnetiche viaggianti - un'introduzione</i>	15
BIBLIOGRAFIA	17

Capitolo IV : Strutture acceleranti

4.1. – Introduzione

Abbiamo visto che per accelerare particelle veloci con lo schema di acceleratore lineare proposto da Widerøe occorre disporre di campi elettrici variabili ad alta frequenza ma che, al crescere della frequenza, il semplice sistema di tubi di drift, il cui circuito equivalente è essenzialmente capacitivo, diviene tecnicamente inadeguato.

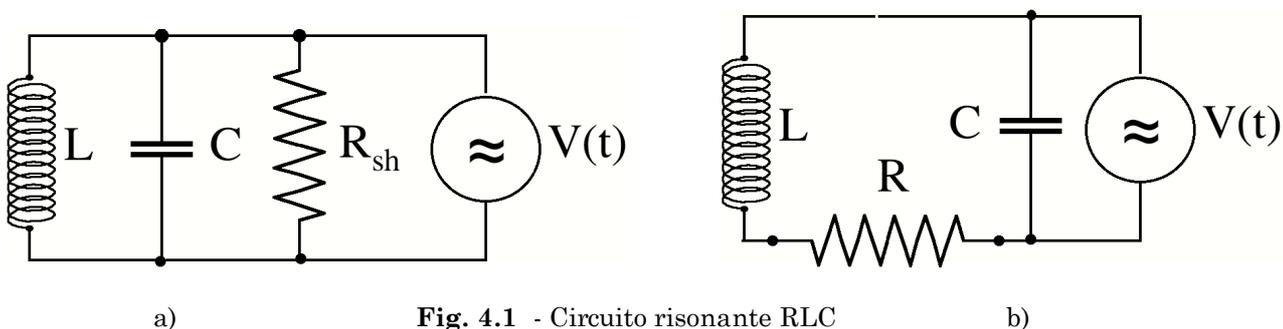
Per salire in frequenza è quindi in pratica necessario ricorrere a circuiti accordati nei quali le capacità delle gap e dei tubi appaiano al generatore come gli elementi capacitivi di circuiti risonanti.

Per introdurre una trattazione più dettagliata del problema ricordiamo in questo primo paragrafo le principali proprietà dei circuiti risonanti a costanti concentrate, una schematizzazione che sappiamo valida fintanto che i campi elettrici e magnetici presenti possono essere considerati 'lentamente variabili' e cioè fintanto che le dimensioni fisiche del circuito sono molto minori delle lunghezze d'onda dei campi stessi. Nei paragrafi successivi tratteremo sistemi più perfezionati: risuonatori a cavità, più comunemente detti cavità risonanti, e accenneremo ai sistemi a guida d'onda.

4.1.1. Ricapitolo di nozioni sui circuiti oscillanti

I circuiti risonanti RLC a costanti concentrate della figura 4.1, alimentati da un generatore di tensione $V(t, \omega) = V_0 \sin(\omega t)$, hanno una propria frequenza di risonanza, data dalla

$$2\pi f_R = \omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (4.1.1)$$



Dall'esame del circuito *parallelo* di figura 4.1.a) si deriva immediatamente che l'impedenza $Z_{||}$ vista dal generatore è data dalla

$$\frac{1}{Z_{||}} = \frac{1}{R_{sh}} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R_{sh}} - j \frac{(1 - \omega^2/\omega_R^2)}{\omega L}, \quad (4.1.2)$$

che, alla frequenza di risonanza e cioè per $\omega = \omega_R$, è puramente resistiva e vale R_{sh} . Ciò significa che, a quella frequenza e in condizioni di regime, l'energia immagazzinata nei componenti reattivi

$$U = \frac{1}{2} (C V^2 + L I^2) = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} L I_0^2 \quad (4.1.3)$$

si trasferisce periodicamente dal campo magnetico, localizzato nell'induttanza, al campo elettrico, localizzato nella capacità, senza richiedere l'intervento del generatore. Questo deve quindi rifornire soltanto l'energia dissipata nella resistenza. Al limite di circuito perfetto, e cioè per R_{sh} tendente all'infinito, nel circuito si può mantenere accumulata dell'energia elettromagnetica a costo zero.

Il naturale fattore di merito adimensionale di un tale circuito è dunque il rapporto, calcolato alla frequenza di risonanza, fra l'energia U immagazzinata nei componenti reattivi e l'energia dissipata nella resistenza in dato tempo. In pratica si definisce un fattore Q come il rapporto, moltiplicato per 2π , fra U e l'energia dissipata in un periodo di oscillazione $2\pi/\omega_R$.

Detto $\langle P_d \rangle$ il valore medio sul periodo della potenza dissipata sulla resistenza si ha per l'energia dissipata in un periodo

$$\langle P_d \rangle T = \frac{\langle V^2 \rangle}{R_{sh}} \frac{2\pi}{\omega_R} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R_{sh}} \frac{2\pi}{\omega_R}, \quad (4.1.4)$$

dalla quale segue, per $\omega = \omega_R$, e utilizzando la (4.1.3), l'espressione di Q

$$Q = \frac{2\pi U}{\langle P_d \rangle T} = C R_{sh} \omega_R \equiv \frac{R_{sh}}{Z_0}, \quad \text{con} \quad Z_0 \equiv \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (4.1.5)$$

Come era da attendersi, il fattore di merito dipende soltanto dai valori degli elementi circuitali ed è tanto più alto quanto più alto è il valore di R_{sh} .

Utilizzando l'espressione di Q la (4.1.2) può essere riscritta nella forma più consueta:

$$\tilde{Z}_1 = \frac{R_{sh}}{1 + j Q (\omega / \omega_R - \omega_R / \omega)}. \quad (4.2)$$

Si può infine facilmente verificare che, se come schema del circuito risonante si adotta quello serie, più vicino all'effettiva struttura fisica, di figura 4.1.b), la relazione fra R ed R_{sh} risulta essere

$$R = \frac{Z_0^2}{R_{sh}}, \quad \text{dalla quale segue} \quad Q = \frac{Z_0}{R}. \quad (4.3)$$

Q è quindi, come deve, tanto più alto quanto più R è bassa.

Si noti che Q è uguale a 2π volte il numero di periodi che sarebbe necessario, in assenza di alimentazione ed ove l'energia dissipata nella resistenza restasse costante nel tempo, per esaurire completamente l'energia accumulata negli elementi reattivi.

Più rigorosamente, sempre in assenza di alimentazione, eguagliando $\langle P_D \rangle$ a $-dU/dt$ e usando la prima delle (4.1.5) si ottiene, ,

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{\omega_R U}{Q}, \quad \text{ovvero} \quad U(t) = U_o e^{-\frac{\omega_R t}{Q}} \equiv U_o e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (4.4)--$$

in cui $\tau = \frac{Q}{\omega_R}$ è la costante di tempo caratteristica del circuito.

Le (4.1.5) e (4.4) chiariscono il significato fisico della relazione fra τ e Q : tanto più grande è Q tanto maggiore è l'energia accumulata e quindi tanto più lungo è, a parità di altre condizioni, il tempo di decadimento.

Tornando al problema dell'accelerazione con sistemi a costanti concentrate come quello di Widerøe, da quanto sopra esposto risulta chiaro che, per la generazione di alte tensioni con buona efficienza energetica ai capi di una gap per sua natura capacitiva, conviene che questa venga resa parte di un circuito risonante ad alto Q . Va tenuto presente che l'ordine di grandezza dei massimi valori ottenibili di Q è per degli ottimi circuiti a costanti concentrate al massimo di qualche centinaio.

Resta però irrisolto il problema della limitazione in frequenza. Quando infatti le lunghezze d'onda corrispondenti alla frequenza di oscillazione divengono dell'ordine o più corte delle dimensioni lineari dei circuiti, si entra nel regime di campi rapidamente variabili ed una parte crescente con la frequenza dell'energia fornita dal generatore viene irraggiata nello spazio circostante e quindi, ai fini dell'accelerazione, dissipata¹. È quindi evidente che frequenze di qualche diecina di MHz, corrispondenti a lunghezze d'onda dell'ordine di qualche metro, costituiscono già un limite estremo per l'utilizzo di circuiti risonanti a costanti concentrate di dimensioni adatte ad un acceleratore.

Per salire in frequenza oltre tale limite, a parità di dimensioni, occorre ricorrere ai risonatori a cavità. Nel paragrafo che segue ne diamo alcune nozioni introduttive.

4.1.2 Le cavità risonanti. Un modello semplice

Una cavità risonante è una struttura metallica chiusa che circonda uno spazio dielettrico, all'interno della quale campi elettromagnetici variabili possono restare confinati e che si comporta come un circuito oscillante RLC². Le frequenze, e si vedrà che possono essere più d'una, alle quale la cavità può oscillare sono legate alla sua forma ed alle sue dimensioni. Vediamo ora come un semplice modello di cavità possa essere costruito come caso limite di un normale circuito oscillante formato da un condensatore circolare piano ed un'induttanza.

Cominciamo ad osservare che, dato un valore della capacità del circuito risonante, per la (4.1.1) la frequenza di oscillazione cresce al calare del valore dell'induttanza e che perciò, immaginando il condensatore (ideale) formato da due piatti circolari (forati), la massima frequenza si otterrà semplicemente collegando i due piatti fra loro, come in fig. 4.1.1.a, con un

¹ Oltre a costituire una sorgente di intollerabile disturbo per ogni apparato elettronico circostante, sensibile alla frequenza interessata !

² Un'elegante discussione di come un'oscillazione risonante di campo elettromagnetico possa essere mantenuta all'interno di una scatola cilindrica chiusa, ovvero di come si possa realizzare una cavità risonante viene fatta anche nella referenza [4.1].

conduttore di lunghezza pari alla loro distanza (minima induttanza di un collegamento), i cui valori di induttanza e resistenza indichiamo genericamente con L_1 ed R_1 .

Volendo salire ancora con la frequenza si possono moltiplicare i collegamenti: le induttanze e le resistenze dei vari conduttori vengono a trovarsi tutte in parallelo (Fig. 4.1.1.b), cosicché, detto n il numero dei collegamenti stessi, la frequenza sale con $n^{1/2}$ mentre allo stesso tempo la resistenza totale diminuisce di un fattore n (vedi circuito risonante serie), facendo così aumentare di altrettanto il fattore di merito. Al limite per n tendente all'infinito si ottiene una scatola cilindrica chiusa, salvo che per i fori centrali nel piatto della capacità, le cui pareti laterali costituiscono l'induttanza. Questa forma, a scatola cilindrica, di cavità viene spesso indicata con il termine inglese di *'pillbox'*.

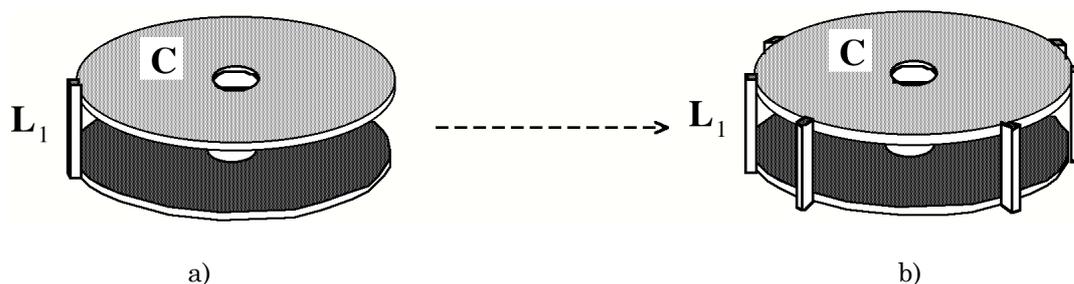


Fig. 4.1.1 - Schema di costruzione di una cavità risonante

Il modello è estremamente schematico, ma calcolando come variano i campi all'aumentare del numero di conduttori fino ad ottenere una parete continua si può mostrare [4.1] che la frequenza di risonanza tende ad un valore finito

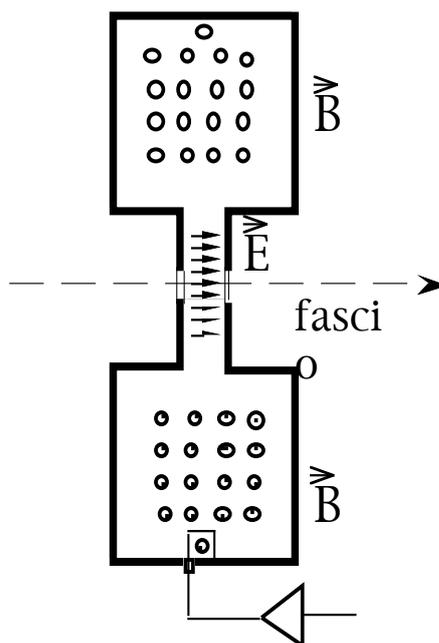


Fig. 4.1.2 - Schema di cavità risonante (sezione passante per il fascio).

La forma della cavità può essere variata per cambiare il rapporto fra induttanza e capacità [4.1], [4.2]. Ad esempio, la fig.4.1.2 mostra la sezione trasversale di una cavità 'rientrante' a simmetria cilindrica. Per aumentare la capacità, i piatti sono stati avvicinati tra loro nella zona nella quale le regioni occupate dal campo elettrico e da quello magnetico sono ben distinte .

Il campo elettrico, usato per l'accelerazione, è infatti principalmente concentrato nella zona capacitiva ed il campo magnetico, la cui variazione fornisce la parte rotazionale del campo elettrico stesso, in quella induttiva.

I campi elettrico e magnetico –quello elettrico perpendicolare ai piatti del condensatore e quello magnetico concentrico al loro asse - restano inoltre confinati all'interno della scatola. Il sistema pertanto non irraggia, almeno fino a frequenze corrispondenti a lunghezze d'onda dell'ordine o inferiori alle dimensioni delle aperture.

Inoltre, proprio per la loro struttura fisica, le cavità risonanti per acceleratori che lavorano a temperatura ambiente salgono facilmente fino a valori di Q dell'ordine di $10^4 \div 10^5$ e , se superconduttive, possono arrivare a $Q \geq 10^{11}$.

La cavità viene eccitata mediante un'antennina (che alimenta il campo elettrico) o, più comunemente, da una spira (che alimenta il campo magnetico) come quella mostrata schematicamente in fig.4.1.2.

La frequenza di risonanza è evidentemente, per quanto detto sopra, legata ai valori di L e C e quindi alle dimensioni geometriche dell'oggetto: una formula approssimata è data nella referenza [4.3].

Un altro caso particolare è la cavità costruita attorno a due tubi di drift di un acceleratore tipo Widerøe, schematizzata in Fig. 4.1.3 : la capacità è fornita principalmente dalle estremità affacciate dei tubi e l'induttanza dalla scatola cilindrica che li ingloba.

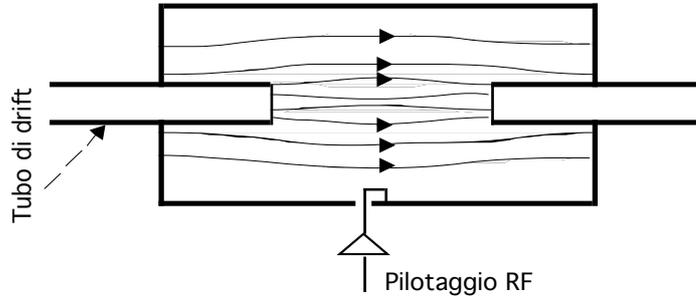


Fig.4.1.3 - Schema di risuonatore con tubi di drift .

Un'altra variante per un acceleratore a tubi di drift consiste nel porre tutti i tubi in uno stesso involucro, formando così un unico, più complesso risuonatore; fu ideata da Alvarez nel 1945 per un acceleratore di protoni, con energia finale di 32 MeV che funzionava alla frequenza di 200 MHz (fig. 4.1.4 e 4.1.5) ed ancor'oggi usata per accelerare sia protoni e sia ioni più pesanti. Quando si hanno più gap in serie, la trattazione diviene più complicata perché i risuonatori sono tra loro accoppiati; un'introduzione alle strutture multiple viene data in ref. [4.4].

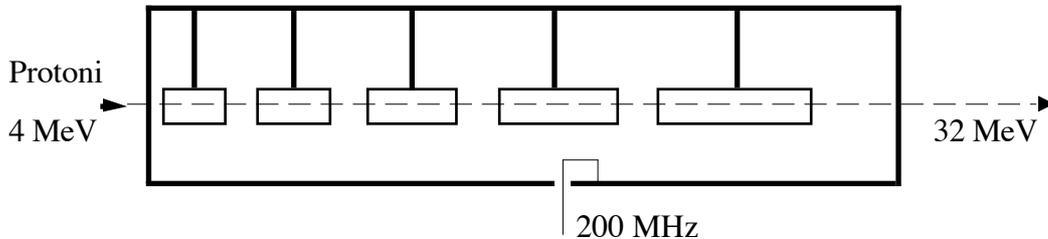


Fig. 4.1.4 - Schema di cavità del tipo Alvarez.

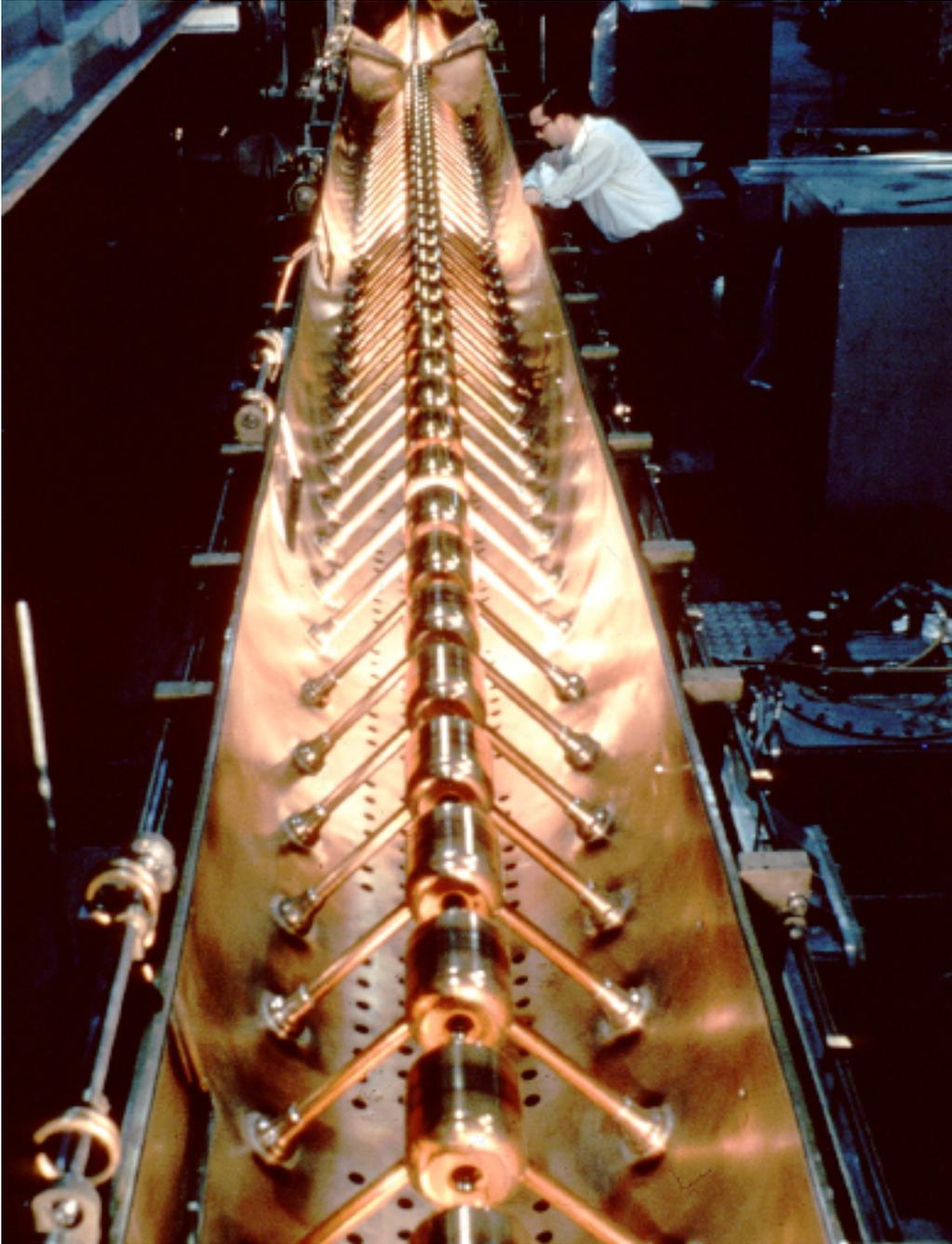


Fig .4.1.5 - Cavità del tipo Alvarez del Linac per protoni del CERN

4.2 Cavità cilindrica

4.2.1 Frequenza di risonanza

Dopo la breve discussione qualitativa sui principi di funzionamento delle cavità risonanti, passiamo a studiare quantitativamente un modello particolarmente semplice, costituito dalla cavità cilindrica.

Questa viene schematizzata come un tronco di cilindro chiuso agli estremi e privo di ogni altra apertura, di altezza h e raggio R , realizzato in materiale perfettamente conduttore. Assumiamo anche che al suo interno sia praticato il vuoto.

La schematizzazione permette di ottenere delle soluzioni analitiche semplici per i campi in cavità e quindi di calcolare esattamente il comportamento della cavità stessa.

Va però tenuto presente che il modello, pur descrivendo bene e in maniera semplice le proprietà fondamentali dell'oggetto e la fisica del problema, è pur sempre molto semplificato. Una cavità reale è generalmente, per vari motivi, di forma assai più complicata, è necessariamente dotata di aperture per il passaggio del fascio e per l'alimentazione, può contenere dielettrici ed ha pareti di conducibilità finita, così che il problema del calcolo dei suoi parametri è in generale assai più complesso e deve essere affrontato utilizzando appositi codici.

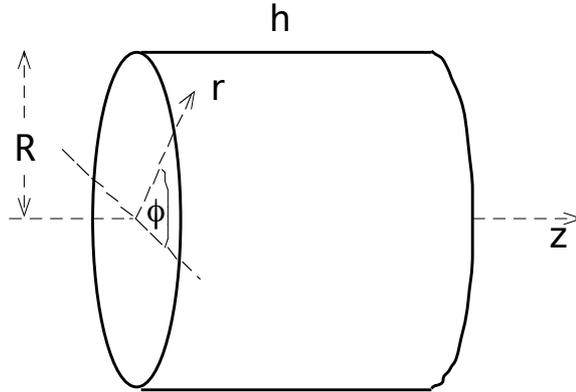


Fig. 4.6 - Schema di cavità risonante cilindrica.

Definito un sistema di riferimento cilindrico, (r, φ, z) , come in fig. 4.6, con lo zero dell'asse z situato al centro della cavità, sia la velocità delle particelle da accelerare diretta come l'asse z .

Il campo elettrico in cavità deve allora avere una componente secondo tale asse. Conviene quindi anzitutto, considerata la simmetria dell'oggetto, cercare un modo di oscillazione del campo elettromagnetico in essa tale che vi siano un'unica componente del campo elettrico, diretta secondo z , ed un'unica componente del campo magnetico, diretta secondo φ .

Le equazioni di Maxwell nel vuoto, scritte in coordinate cilindriche, si riducono in tal caso alle due equazioni di primo ordine

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_\varphi)}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (4.5)$$

Differenziando la prima rispetto a r e la seconda rispetto al tempo ed eliminando B_φ , si ottiene l'equazione del second'ordine equivalente:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}. \quad (4.6)$$

Per risolverla, una tecnica standard è quella di cercare una soluzione a variabili separate del tipo $E_z = A(r) e^{i\omega t}$; sostituendo questa soluzione di prova nell'equazione e indicando con apici le derivate rispetto ad r , si ottiene per l'ampiezza $A(r)$ del campo elettrico l'equazione di Bessel di ordine zero

$$A'' + A'/r + (\omega/c)^2 A = 0 \quad (4.7)$$

la cui soluzione è

$$A(r) = E_0 J_0(x) \quad \text{con} \quad x = \frac{\omega r}{c} = k_c r \quad (4.8)$$

L'ampiezza del campo elettrico in funzione del raggio è cioè proporzionale alla funzione di Bessel di ordine zero, $J_0(x)$ e k_c , definito dalla seconda delle (4.8), è il numero d'onde ($2\pi/\lambda_c$) corrispondente alla frequenza ω ed alla velocità c .

Osserviamo poi che, poiché le pareti sono per ipotesi perfettamente conduttrici, la componente tangenziale del campo elettrico su di esse deve annullarsi; ne segue che deve essere $A(R) = 0$ e quindi $J_0(R) = 0$.

Poiché il primo zero della funzione di Bessel si ha per $x = 2.405$, dalla condizione al contorno segue che la frequenza di risonanza fondamentale, ω_{R0} , dipende soltanto dal raggio R e vale

$$\omega_{R0} = 2.405 (c / R). \quad (4.9)$$

Per avere un'idea degli ordini di grandezza delle frequenze in gioco assumiamo $R = 30$ cm: dalla (4.9) otteniamo

$$f_{R0} = \omega_{R0} / (2\pi) = 2.405 (c / R) / (2\pi) \approx 0.383 \cdot 3 \cdot 10^8 / 0.3 \text{ Hz} = 383 \text{ MHz}. \quad (4.10)$$

Il campo magnetico si ricava dalla $\text{rot}\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$. Usando le proprietà delle funzioni di Bessel si trova per la componente φ la soluzione:

$$B_\varphi = -j \frac{E_0}{Z_0} J_1(x), \quad [4.11]$$

con $Z_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2} = 377 \text{ ohm}$ e $J_1(x)$ funzione di Bessel di ordine 1.

I campi elettrico e magnetico sono indipendenti da z mentre i loro andamenti in funzione di r sono quelli illustrati in **Fig. 4.7**.

Il modo di oscillazione trovato è il modo fondamentale della cavità e cioè quello a frequenza più bassa.

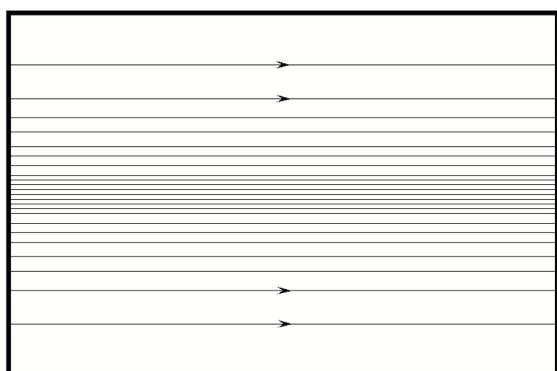
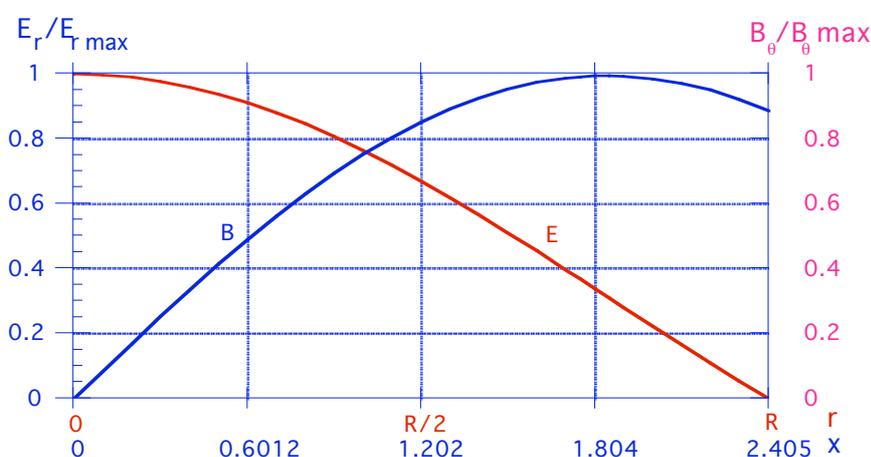
Viene descritto dalla sigla TM_{010} in cui: TM sta per *Trasverso Magnetico* ad indicare che il campo magnetico è trasverso alla direzione di propagazione, il primo indice è il "numero azimutale", uguale al numero di zeri del campo magnetico stesso nell'intervallo $0 < \varphi \leq 2\pi$, il secondo indice è il *numero radiale*, pari al numero di zeri del campo magnetico nell'intervallo

$0 \leq r < R$, ed il terzo, il *numero longitudinale*, è pari al numero di zeri dello stesso campo nell'intervallo $-h/2 \leq z < h/2$.

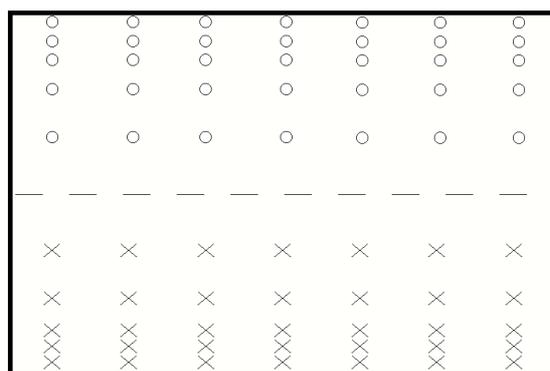
Altri modi TM di oscillazione, a frequenze più alte, si trovano in corrispondenza degli zeri successivi della funzione di Bessel ed alle diverse possibili configurazioni di campo che soddisfano le condizioni al contorno.

I modi TM che hanno il campo elettrico in direzione z si dicono modi acceleranti; fra questi, come vedremo più avanti parlando del tempo di transito, quelli il cui numero longitudinale è uguale a zero sono i più efficaci.

Esiste inoltre un'altra famiglia di modi, i modi TE o deflettenti, per i quali è il campo elettrico ad essere trasverso alla direzione di propagazione. Non sono utili per l'accelerazione ma possono giocare un ruolo importante, per lo più di disturbo, nella dinamica trasversa delle particelle accelerate.



Linee di forza del campo elettrico



Linee di forza del campo magnetico

Fig. 4.7 - Andamenti del campo elettrico e magnetico in una cavità cilindrica

4.2.2 Fattore di tempo di transito

Non abbiamo sin qui dovuto porre alcuna limitazione all'altezza h della scatola cilindrica costituente la cavità. Se però pensiamo che le particelle da accelerare impiegano un tempo

finito ad attraversare la cavità e che durante questo tempo il campo elettrico varia secondo la $E_z = A(r) e^{i\omega t}$, risulta chiaro che il tempo di passaggio stesso non può essere lungo rispetto al periodo di oscillazione, altrimenti la media nel tempo del campo accelerante tenderebbe ad annullarsi.

Più precisamente - avendo posto l'origine dell'asse z ($z=0$) nella mezziera della cavità - per una particella che passi con velocità βc ad una distanza r dall'asse, il campo elettrico ha il valore $E_z(r,z) = E_{z0}(r)\cos(\omega t + \phi) = E_{z0}(r)\cos(\omega z/\beta c + \phi)$. In particolare, per $z=0$, il campo ad una distanza r dall'asse ha il valore $E_z(r,0) = E_{z0}(r)\cos(\phi)$, con ϕ fase arbitraria.

Il lavoro L fatto dal campo elettrico sulla particella nel corso dell'intero passaggio in cavità è:

$$L(r) = q \int_{-h/2}^{+h/2} E_z(r,z) \cdot dz = q \int_{-h/2}^{h/2} E_{z0}(r) \cos\left(\frac{\omega z}{\beta c} + \phi\right) \cdot dz \quad (4.12)$$

Si usa definire in maniera del tutto generale un **fattore di tempo di transito**, τ_t , come il rapporto fra L (guadagno di energia effettivo) e l'energia (massima), $L_M = q \int E_z(r,0) \cdot dz = q \int E_{z0}(r) \cos \phi \cdot dz$, che la particella acquisterebbe nel transito se il campo restasse costante al valore $E_z(r,0)$ dell'origine $z=0$.

Facciamo però notare che il concetto stesso va preso con una certa cautela: ad esempio, nel caso generale di un modo di oscillazione del campo elettrico che abbia anche una dipendenza da z , l'integrale dell'energia $L_M = q \int E_z(r,z) dz$ potrebbe risultare nullo, cosicché la definizione verrebbe a perdere di significato.

Osserviamo a questo punto che, per utilizzare in maniera efficiente il sistema di accelerazione, il fattore di tempo di transito non deve discostarsi molto da 1. Ciò evidentemente pone dei limiti sulla lunghezza utile h della cavità'.

4.2.3 Fattore di merito e impedenza shunt

4.2.3.1 Definizioni

Poiché una cavità risonante si comporta come un oscillatore, si possono ad essa estendere alcune definizioni relative a questi ultimi. In particolare, per ogni modo di oscillazione, il fattore di merito 'a vuoto' (e cioè in assenza di fascio) Q_0 si definisce come

$$Q_0 \equiv \frac{\omega_r U}{\langle P_{do} \rangle} = \frac{2\pi U}{\langle P_{do} \rangle T} \quad (4.15)$$

con U energia immagazzinata nel volume della cavità e $\langle P_{do} \rangle$ potenza media dissipata. Quest'ultima consiste essenzialmente in quella dissipata sulle pareti della cavità stessa.

Quando una cavità viene utilizzata per fornire energia ad un fascio di particelle, il parametro importante è la tensione che si riesce a sviluppare lungo l'asse del gap della cavità stessa nel modo accelerante fondamentale.

Possiamo anche, come per un circuito oscillante, definire una resistenza di shunt della cavità, R_{sh} , come il rapporto fra il valor medio del quadrato della tensione agli estremi della gap diviso per la potenza dissipata nel crearla:

$$R_{sh} = \frac{\langle V^2 \rangle}{P_d} . \quad (4.19)$$

in cui

$$\langle V^2 \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \iint_{L,T} E^2(z,t) \cdot dz \cdot dt. \quad (4.20)$$

Si può notare che:

- La resistenza di shunt non è univocamente definita per ogni cavità. Infatti il suo valore dipende dal cammino di integrazione scelto per definire la tensione.
- A causa del fattore tempo di transito, la tensione non coincide con quella effettivamente vista dalle particelle
- Q è definito per ognuno dei modi della cavità, la resistenza di shunt no.
- Nel progettare una cavità, la resistenza di shunt descrive la dissipazione di potenza in funzionamento 'a regime'.

4.2.4 Sequenza di cavità cilindriche

4.2.4.1 - Sistema di cavità disaccoppiate - Equivalenza ad un' onda viaggiante

Il lavoro che una cavità può fare su di un fascio, ovvero la variazione di energia del fascio in un passaggio attraverso la cavità stessa, sono dati dalla (4.12) ed il loro valor massimo è limitato da condizionamenti di natura tecnica (massimo campo elettrico raggiungibile senza scariche, massima potenza del generatore, ecc.).

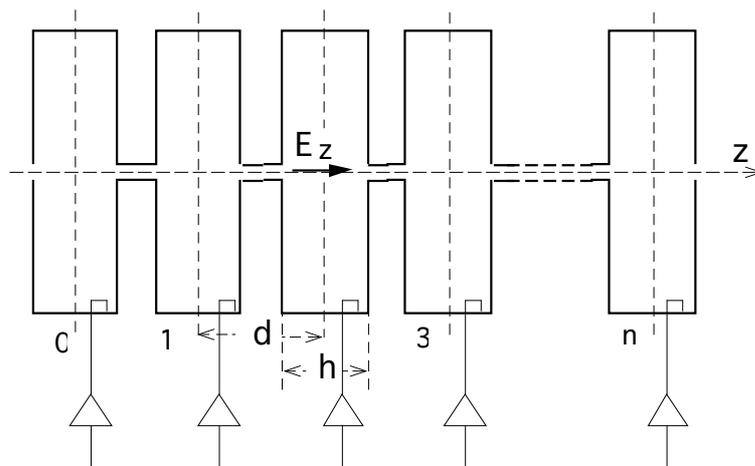


Fig.4.8 - Catena di accelerazione formata da n cavità indipendenti.

Si possono però mettere in serie un certo numero di cavità³, che assumiamo per ora siano pilotate individualmente, ciascuna da un suo generatore come in Fig.4.8, e aggiustarne le fasi di oscillazione in modo che la particella che le attraversa trovi sempre in ciascuna lo stesso campo elettrico accelerante, con la stessa fase. E' chiaro che, perché la condizione di sincronismo ipotizzata possa verificarsi, deve esistere una ben precisa relazione fra la velocità delle particelle, βc , la distanza d fra i centri delle cavità e le frequenze di oscillazione del campo elettrico.

Per procedere ad un calcolo assumiamo che le cavità abbiano tutte la stessa frequenza di risonanza ω_{R0} e lo stesso campo di picco, e che a questa frequenza siano perfettamente isolate l'una dall'altra⁴.

Assumiamo inoltre, per semplicità, che le particelle da accelerare siano ultrarelativistiche, quindi con β costante ≈ 1 e che la distanza d sia fissa.

Nelle ipotesi fatte l'andamento del campo elettrico nella cavità n^{ma} sarà del tipo

$$E_n(t) = E_0 e^{i(\omega t + \phi_n)} \quad (4.37)$$

e affinché la particella incontri un campo avente sempre la stessa fase dovrà essere

³ Che da qui in poi chiameremo anche, indifferentemente, 'celle'.

⁴ Quest'ultima condizione è in pratica ben verificata se il tubo metallico che le collega e nel quale passa il fascio ha un diametro molto minore del diametro delle celle.

$$\omega t_{n+1} + \phi_{n+1} = \omega \left(t_n + \frac{d}{\beta c} \right) + \phi_{n+1} = \omega t_n + \phi_n \quad \rightarrow \quad \phi_{n+1} = \phi_n - \frac{\omega d}{\beta c} , \quad (4.38)$$

cosicché, chiamando ϕ_0 la fase nella prima cella, la (4.37) potrà esser riscritta come

$$E_n(t) = E_0 e^{i\left(\omega t - \frac{\omega n d}{\beta c} + \phi_0\right)} = E_0 e^{i\left(\omega \left(t - \frac{n d}{\beta c}\right) + \phi_0\right)} = E_0 e^{i(\omega t - k n d + \phi_0)} \quad (4.39)$$

Si vede così immediatamente che, al centro di ogni cella, e cioè per $z=nd$ con $n=0,1,2..n$, i campi dati dalla (4.39) coincidono esattamente con quelli che produrrebbe un'onda viaggiante in direzione delle z positive con **velocità di fase** $v_f = \beta c = \omega/k$ avendo definito il numero d'onda $k = \omega/v_f$.

Infatti, la generica superficie di fase costante di un'onda piana di ampiezza E , $E = E(\vec{r}) e^{i(\omega t \pm kz)}$, che viaggia in direzione z , ha l'equazione

$$\omega t \pm k z = \text{costante} \equiv \varphi_0, \quad \text{ovvero} \quad z = \frac{\varphi_0}{k} \pm \frac{\omega}{k} \cdot t \equiv \frac{\varphi_0}{k} \pm v_f t . \quad (4.39.1)$$

Il risultato (4.39) è molto interessante perché un'onda progressiva (o 'viaggiante') che si propagasse con velocità di fase $\omega/k = \beta c$ uguale in modulo e direzione alla velocità della particella e con campo elettrico parallelo alla velocità stessa avrebbe, rispetto al sistema di cavità di fig. 4.8, il vantaggio di rendere uguale ad 1 il fattore di tempo di transito. In secondo luogo il sistema di alimentazione delle cavità potrebbe divenire più semplice, più pratico e meno costoso. Non è infatti un problema semplicissimo quello di mantenere esattamente 'al passo' tra loro un sistema di oscillatori alimentati da generatori diversi: basti pensare al fatto che, se il Q della cavità è alto, piccolissime variazioni della frequenza di pilotaggio provocano grandi variazioni di fase.

4.2.5 Accelerazione per mezzo di onde elettromagnetiche viaggianti - un'introduzione

La possibilità di utilizzare un'onda elettromagnetica viaggiante per l'accelerazione di particelle esiste.

Onde che si propagano nel vuoto con velocità di fase, ω/k , anche inferiori a c e che hanno una componente E parallela alla direzione di propagazione del fascio possono essere generate, in uno spazio vuoto confinato da superfici conduttrici. Le superfici conduttrici stesse costituiscono una guida d'onda che funziona da struttura accelerante 'a onda viaggiante'.

In particolare, se la guida metallica è liscia, la velocità di fase delle onde che in essa possono propagarsi è ancora maggiore di quella della luce, ma se invece la geometria della guida assomiglia a quella della figura 4.9 (guida corrugata, 'caricata' con dischi), si possono ottenere velocità di fase uguali od inferiori (anche se di poco!) a c .

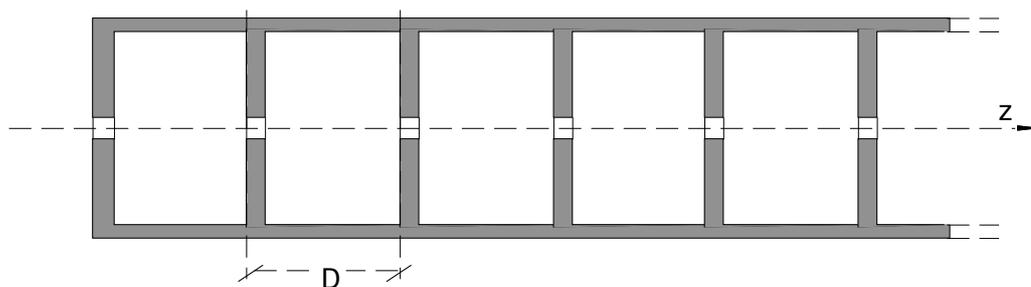


Fig. 4.9 - Schema di guida cilindrica caricata con dischi

Il sistema è quindi utilizzabile, ma soltanto per particelle ultrarelativistiche (elettroni).

Le frequenze di lavoro economicamente più favorevoli sono nelle cosiddette bande L ed S delle microonde, tipicamente intorno a 1.5 o 3 GHz. Si realizzano comunemente campi acceleranti efficaci di $20 \div 30$ MV/m ma, a frequenze più alte o per impulsi brevi si è arrivati a valori fino a ≈ 100 MV/m. Data la quantità di potenza dissipata per effetto Joule, che cresce con il quadrato dell'intensità dei campi, strutture a temperatura ambiente generalmente non possono - per problemi termici - lavorare a tali valori di campo se non in regime impulsivo, con fattori di utilizzo tipici dell'ordine di $10^{-2} \div 10^{-3}$.

Normalmente la durata del singolo impulso di potenza viene reso pari alla somma del tempo di riempimento e della durata del pacchetto di fascio. Passato il fascio si interrompe l'immissione di potenza fino all'inizio del ciclo successivo. I parametri vengono normalmente scelti in modo che il fascio assorba, durante il passaggio, quanta più possibile della potenza che il generatore fa fluire in guida, così da massimizzare l'efficienza energetica globale del processo di accelerazione.

La necessità di far funzionare la sezione (guida) acceleratrice in regime impulsivo esclude l'utilizzo di strutture di questo tipo ad onda viaggiante in anelli, nei quali l'energia deve essere fornita ai fasci da accelerare in maniera praticamente continua. Le strutture stesse trovano quindi il loro naturale campo di applicazione negli acceleratori lineari.

Si noti che per particelle più lente (protoni e ioni) è indispensabile, o comunque più vantaggioso, l'utilizzo di cavità singole (vedi sistema di fig. 4.8, per il quale la velocità di fase equivalente può evidentemente essere qualsiasi ed anche variabile lungo la catena; viceversa, per ottenere basse velocità di fase in una guida d'onda, quest'ultima dovrebbe essere caricata al punto da rendere proibitiva la potenza dissipata) o di strutture alla Alvarez (paragrafo 4.1.2) operanti in regime di onda stazionaria.

Le considerazioni di cui sopra si riferiscono principalmente a strutture acceleranti "calde", operanti cioè a temperatura ambiente. Strutture superconduttive nelle quali le perdite per effetto Joule sono trascurabili anche ai più alti valori di campo raggiungibili possono invece tranquillamente operare in regime continuo. Inoltre, poiché l'energia accumulata si mantiene praticamente indefinitamente senza bisogno di rifornimento, il funzionamento in onda

stazionaria risulta più conveniente di quello in onda viaggiante, nonostante l'inevitabile riduzione del fattore tempo di transito.

Bibliografia

- [4.1] *R.P.Feynman, R.B.Leighton, M.Sands* , "Lectures on Physics", Addison-Wesley Publ.Co.Inc., II, 23-1 e segg., (1964).
 - [4.2] *M.Puglisi*, "Conventional RF cavity design", Proc. CERN Accelerator School on RF Engineering for Particle Accelerators; CERN 92-03, I, 181 .
 - [4.3] *M.Puglisi*, *ibid.*, pag.177 .
 - [4.4] *H. Klein* , "Basic Concepts I", *ibid*, pag.107 .
 - [4.5] *M. Month & M.Dienes, Eds* , 'Physics of Particle Accelerators', AIP Conf.Proc.-Am.Inst. of Phys, II, 19 (1989)
 - [4.6] *S.Humphries Jr* , 'Principles of Charged Particle Acceleration', John Wiley & Sons, §12.2 .
 - [4.6.1] *G. Toraldo di Francia e P.Buscaglioni*, "Onde Elettromagnetiche", Zanichelli, 1988.
 - [4.6.2] *Landau e Lifschitz*, "Teoria dei Campi", par.78.
 - [4.6.3] *Nuove tecniche di accelerazione (Lawson,, ...)*
 - [4.6.4] *M. Weiss*, "Introduction to Linear RF a.", CERN A. School, V General a. Course, Cern Rep.94/01, II Vol., p. 913, Jan 1994.
 - [4.7.] *G.Dôme*, "Basic RF theory, waveguides and cavities", Proc. CERN Accelerator School on RF Engineering for particle accelerators; CERN 92-03, I, 1 .
 - [4.8] *S. Ramo, J.R. Whinnery, and T. Van Duzer* , "Fields and Waves in Communication Electronics", J.Wiley & Sons, New York.
 - [4.9] *D.H. Whittum*, "Introduction to electrodynamics for microwave Linear accelerators", Proc.Joint US-CERN-Japan International School, Hyama/Tsukuba, Japan, Sept 1996, eds S.I. Kurokawa, M.Month, S.Turner and SLAC-PUB-7802, Apr 1998.
- L. Schächter*, "Beam-Wave Interaction in Quasi Periodic Structures", Springer, 1996