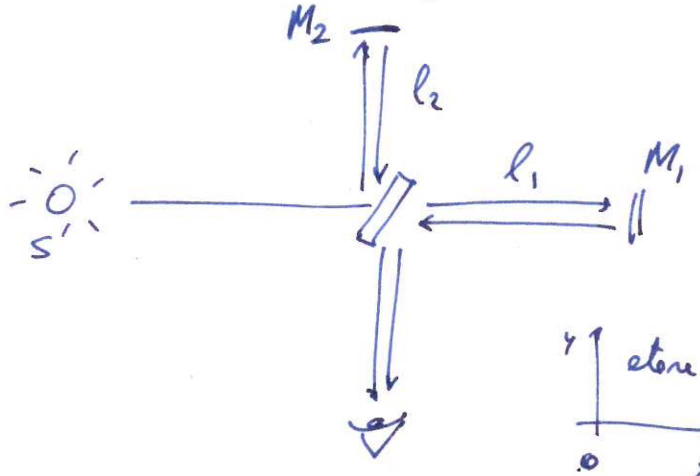
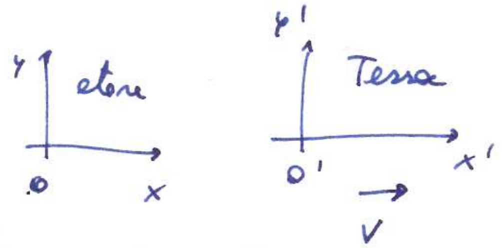
1) Trasformazioni di Galilei: posizione ($\vec{x}$), velocità ($\vec{v}$), tempo assoluto ($t = t'$)

2) Meccanica di Newton:
- i) legge d'inerzia (def. sist. isolato)
- ii) massa inerziale, $\vec{F} = m\vec{a}$
- iii) legge di azione e reazione (conservazione dell'impulso per un sist. isolato)

3) Teoria dell'etere (onde e.m. ~ onde meccaniche)
↳ "vento d'etere"

4) Esperimento di Michelson & Morley:





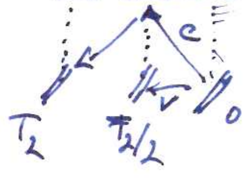
$(\vec{c} \equiv)\ \vec{c}_e = \vec{c}_t + \vec{V}$
(composizione classica delle velocità)

A) Calcoliamo T_1 nel SR' (Terra).
La luce lungo la direzione $\hat{l}_1$ è contrastata dal vento d'etere ($\rightarrow$) pari a $c_{t,\rightarrow} = c - v$ e per egualità ($\leftarrow$) pari a $c_{t,\leftarrow} = c + v$. Quindi:

$$T_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2l_1}{c}\,\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

B) Calcoliamo T_2 nel SR' (Terra).

$T_2 = \frac{2l_2}{c_{t,\perp}}$. Calcoliamo $c_{t,\perp}$ in funzione di c e v osservando che il vento d'etere ritarda tutto il sistema nella direzione $\hat{v}$ tale che il percorso della luce è:



La geometria del percorso fornisce quindi $c_{T,\perp} = \sqrt{c^2 - v^2}$, tale che:

$$T_2 = \frac{2l_2}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

c) La differenza di fase dell'onda all'osservatore, ad una frequenza di oscillazione ν, vale:

$$\Delta\phi_0 = \nu(T_1 - T_2) = \frac{2\nu}{c}\left[\frac{l_1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{l_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]$$

Calcolano le stesse quantità con il sistema dell'interferometro ruotato di 90°, tale da sottrarre contributi al tempo di percorrenza dovuti a componenti di velocità $\vec{v}$ ortogonali ($\nearrow$):

$$\Delta\phi_{\pi/2} = \nu(\tilde{T}_1 - \tilde{T}_2) = \frac{2\nu}{c}\left[\frac{l_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right].$$

Se la teoria dell'etere (fisica classica) è vera, dovremmo osservare una differenza di fase tra i 2 esperimenti pari a:

$$\Delta\phi = \Delta\phi_0 - \Delta\phi_{\frac{\pi}{2}} \underset{\beta := \frac{v}{c}}{=} \frac{2\nu}{c}\left[\frac{l_1}{1-\beta^2} - \frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{l_1}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{l_2}{1-\beta^2}\right] =$$

$$= \frac{2\nu}{c}\left[\frac{(l_1+l_2) - (l_1+l_2)\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta^2}\right] = \frac{2\nu}{c}(l_1+l_2)\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta^2} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\beta \ll 1]{} \simeq \frac{2\nu}{c}(l_1+l_2)\left[1 - 1 + \frac{\beta^2}{2}\right] = \underbrace{\frac{\nu}{c}(l_1+l_2)\left(\frac{v}{c}\right)^2}_{0.37 \text{ rad nell'esp. di M\&M.}} \neq 0$$

D) Tuttavia, l'osservazione sperimentale con accuratezza $\ll \Delta\phi$ rivelò nessuno spostamento delle frange di interferenza. Questo può essere spiegato con una modifica ad hoc delle lunghezze percorse dalla luce (CONTRAZIONE) nella direzione di propagazione (Fitzgerald):

$$l_1 \rightarrow l_1\sqrt{1-\beta^2} \Rightarrow T_1 = \frac{2l_1}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{t.c.} \quad \Delta\phi_0 = \Delta\phi_{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\nu}{c}\frac{l_1 - l_2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

quindi $\Delta\phi = \Delta\phi_0 - \Delta\phi_{\pi/2} = 0$.

E) Il risultato è immediato se si assume $\vec{c}_e = \vec{c}_T = \vec{c}$.
(in ogni SR)

RELATIVITÀ SPECIALE di EINSTEIN

Le leggi di trasformazione delle coordinate di un punto materiale da un SR ad un altro in Rel. Sp. – leggi di Lorentz-Fitzgerald – possono essere dedotte dai seguenti postulati:

0) Mappe lineari
1) $c =$ cost. in tutti i SR (inerziali) e t.c. $|\vec{V}| \le c \quad \forall v$
2) OMOGENEITÀ dello SPAZIO ($|\vec{c}|$ è identica in tutte le direzioni)
3) ISOTROPIA dello SPAZIO (le proprietà fisiche dello spazio sono le stesse ovunque)

$$\Downarrow$$

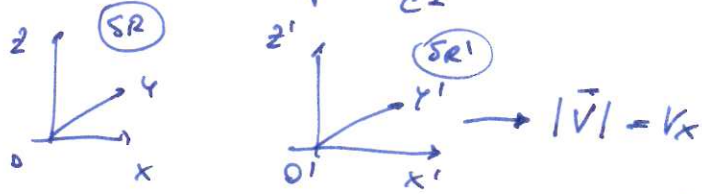
def. 4-vettore $x^\mu = (ct, \vec{x})$ + trasf. L-F., tale che le eq. di MAXWELL sono INVARIANTI per trasf. di coordinate

&

le eq. del moto si riducono alla meccanica newtoniana per $v \ll c$

EQUAZIONI di LORENTZ-FITZGERALD:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - v_x t) \\ y' = y, \quad z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{x v_x}{c^2}\right) \end{cases}, \quad \text{dove } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$



Valgono per SR INERZIALI, cioè $\forall \vec{V} =$ cost. (moto rettilineo uniforme). Tuttavia, è consentito che nei SRI i corpi si muovano con moto ACCELERATO.

Per una direzione generale di $\vec{V}$,

$$\begin{cases} x'_\parallel = \gamma(x_\parallel - vt) \\ \vec{x}'_\perp = \vec{x}_\perp \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{\vec{x}\cdot\vec{v}}{c^2}\right) \end{cases}$$

CONTRAZIONE delle LUNGHEZZE (dei corpi in movimento):

$l_0 = x_2' - x_1' :=$ lunghezza PROPRIA, cioè dell'oggetto in QUIETE nel SR'.

$$L_0 = \gamma(x_2 - v_x t_2) - \gamma(x_1 - v_x t_1) = \gamma(x_2 - x_1) + \gamma v_x (t_1 - t_2)$$

la lunghezza viene misurata in SR nello stesso istante $t_1 = t_2$

in SR'

in LAB

$$\Rightarrow \; l_0 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma l$$

$$\Rightarrow \; \boxed{l = \frac{l_0}{\gamma}}$$

DILATAZIONE dei TEMPI (di orologi in movimento):

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma\underbrace{(t_2' - t_1')} + \gamma \frac{v_x}{c^2}(x_1' - x_2')$$

(in LAB)

Δt_0 è intervallo di tempo PROPRIO

l'intervallo di tempo Δt_0 viene misurato con orologio in QUIETE in SR', $x_2' = x_1'$

$$\Rightarrow \; \boxed{\Delta t = \gamma \Delta t_0}$$

- LEGGE DI TRASFORMAZIONE delle VELOCITA'

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\left(\frac{dt'}{dt}\right)^{-1} = \dots = \frac{u_x - V_x}{\left(1 - \frac{u_x V_x}{c^2}\right)} .$$

$$\frac{d}{dt}\gamma(x - V_x t) = \gamma(u_x - V_x)$$

$$\left[\frac{d}{dt}\gamma\left(t - \frac{xV_x}{c^2}\right)\right]^{-1} = \left[\gamma\left(1 - \frac{u_x V_x}{c^2}\right)\right]^{-1}$$

$$u_{y,z}' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt}\left(\frac{dt'}{dt}\right)^{-1} = \frac{u_{y,z}}{\gamma\left(1 - \frac{u_x V_x}{c^2}\right)} .$$

(ultra - relativistico)

FORMALISMO COVARIANTE della REL. SPECIALE

Il 1° postulato della REL. SP. afferma l'invarianza delle leggi di Natura, e quindi della loro descrizione matematica, dal cambiamento di sistema di riferimento INERZIALE. Le equazioni ~~invarianti~~ sono dette essere espresse nella FORMA COVARIANTE (invarianti alle trasform. di Lorentz)

Legge di trasformazione di un VETTORE (≡ tensore a rango 1),

CONTROVARIANTE, $A'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} A^{\beta}$

COVARIANTE, $A'_{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} A_{\beta}$

dove si intende A' nel SR', e somma sugli indici ripetuti.
$\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$

Il PRODOTTO SCALARE di 2 QUADRIVETTORI (propriamente definiti nella REL. SP.) è un INVARIANTE di LORENTZ, e viene calcolato con la seguente METRICA :

$$A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = (A^0 B_0 - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \equiv A\cdot B = A'\cdot B'$$

TENSORE METRICO $(1, -1, -1, -1)$
per lo spazio-tempo EUCLIDEO
(geometria "piatta")

In particolare, dato un vettore controvariante $A^\mu = (A^0, \vec{A})$, il corrispondente vettore covariante avrà componenti $A_\mu = (A_0, -\vec{A})$.

QUADRIVETTORE "SPAZIO-TEMPO".

$$x^\mu = (x^0, \vec{x}) = (ct', \vec{x}') \quad , \quad \vec{x}' = (x', y', z')$$

$$s^2 := x^\mu x_\mu = (ct')^2 - |\vec{x}'|^2 = \dots \text{ applichiamo le trasf. di Lorentz} \dots =$$

$$= c^2\gamma^2\left(t - \frac{V_x x}{c^2}\right)^2 - \gamma^2(x - V_x t)^2 - y^2 - z^2 =$$

$$= c^2\gamma^2 t^2 + \gamma^2\frac{V_x^2 x^2}{c^2} - \cancel{2\gamma^2 \frac{V_x x}{c^2} c^2 t} - \gamma^2 x^2 - \gamma^2 V_x^2 t^2 + \cancel{2\gamma^2 x V_x t} +$$
$$- y^2 - z^2 =$$

$$= c^2 t^2 \cancel{\gamma^2(1-\beta^2)} - x^2 \cancel{\gamma^2(1-\beta^2)} - y^2 - z^2 =$$

$$= c^2 t^2 - |\vec{x}|^2. \quad \text{CVD}$$

Vale anche: $ds^2 = dx^\mu dx_\mu = (c\,dt)^2 - (d\vec{x})^2$.

$$\equiv g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu.$$
tensore metrico.

QUADRIVETTORE "MOMENTO" e LEGGI DI TRASFORMAZIONE.

$$p^\mu = (\epsilon, \vec{p}c)$$

$$p^\mu p_\mu = \epsilon^2 - (\vec{p}c)^2 = m_0^2 c^4 \quad (\text{invariante})$$

proprietà intrinseca delle particelle, che non dipende dalla velocità.

Ricaviamo la legge di trasformazione per p^μ dalle precedenti regole per vettori controvarianti ($SR \to SR'$):

$$p'^\mu = \frac{dx'^\mu}{dx^\nu} p^\nu \qquad \text{dove} \quad \begin{cases} x'^\mu = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) \\ x^\nu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \\ p^\nu = (\epsilon, \vec{p}c) \end{cases}$$

Trasf. di Lorentz x lo spazio-tempo

$$p'^0 \equiv \epsilon' = \frac{dx'^0}{dx^0}p^0 + \frac{dx'^0}{dx^1}p^1 + \frac{dx'^0}{dx^2}p^2 + \frac{dx'^0}{dx^3}p^3 =$$
$$= \frac{c\,dt'}{c\,dt}\epsilon + \frac{c\,dt'}{dx}p_x c + \frac{c\,dt'}{dy}p_y c + \frac{c\,dt'}{dz}p_z c =$$

$$= \gamma E - \gamma \frac{v_x}{c^2} p_x c^2 + \phi + \phi \Rightarrow \boxed{E' = \gamma(E - v_x p_x)}$$

$$p'^1 = \frac{dx'^1}{dx^0} p^0 + \frac{dx'^1}{dx^1} p^1 + \frac{dx'^1}{dx^2} p^2 + \frac{dx'^1}{dx^3} p^3 =$$

$$= \frac{dx'}{c\,dt} E + \frac{dx'}{dx} p_x c + \frac{dx'}{dy} p_y c + \frac{dx'}{dz} p_z c =$$

$$= -\gamma \frac{v_x}{c} E + \gamma p_x c + \phi + \phi \Rightarrow \boxed{p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{v_x E}{c^2}\right)}$$

$$p'^{2,3} = \ldots = p^{2,3} \Rightarrow \boxed{p'_{y,z} = p_{y,z}}$$

EQUAZIONE DEL MOTO e QUADRIVETTORE FORZA.

- Si dimostra che $d\tau$ = intervallo di tempo PROPRIO è un invariante relativistico. → Se la particella si muove in SR' t.c. $d\vec{x}' = 0$, $dt' = d\tau$ (x def).
  Allora $ds^2 = (c\,dt)^2 - (d\vec{x})^2 = (c\,dt')^2 - (d\vec{x}')^2 = c^2 d\tau^2$ INVARIANTE
- Si calcola il 4-VETTORE CONTROVARIANTE

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(E, \vec{p}c) = \left(\frac{d(\vec{F}\cdot d\vec{s})}{d\tau}, c\frac{d\vec{p}}{d\tau}\right) = \left(\gamma \vec{F}\cdot\vec{u}, c\gamma\vec{F}\right)$$

$(dt = \gamma d\tau)$

In analogia al caso classico, imponiamo una dipendenza LINEARE di E dalla energia CINETICA T, a meno di una COSTANTE pari al livello minimo di energia ("potenziale") della particella libera; dalla precedente otteniamo dunque la seguente uguaglianza:

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \equiv (T + C_1)^2 = T^2 + 2TC_1 + C_1^2$$

Perché per definizione deve essere $T = T(\vec{p})$, uguagliando membro a membro la precedente eq. troviamo:

$$\begin{cases} pc = \sqrt{T^2 + 2TC_1} \\ C_1 = m_0c^2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} pc = \sqrt{T^2 + 2m_0c^2T} \\ E = T + m_0c^2 \end{cases}}$$

Utilizziamo la legge $T = T(\vec{p})$ per identificare il REGIME di MOTO RELATIVISTICO della singola particella:

$T \ll m_0c^2 \Rightarrow T = \frac{|\vec{p}|^2}{2m_0} \propto p^2$ ("debolmente" relativistico → classico)

$T \gtrsim m_0c^2 \Rightarrow pc = \sqrt{T^2 + 2m_0c^2T} \longrightarrow T$ per $T \gg m_0c^2$ ("ultra-relativistico")

→ VAI A: ESERCIZIO REGIME RELATIVISTICO.

Derivazione euristica della MASSA RELATIVISTICA. (4a)

Abbiamo ricavato le seguenti relazioni per l'ENERGIA TOTALE della particella:
$$\begin{cases} \mathcal{E}^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \\ \mathcal{E} = T + m_0c^2 \equiv \alpha m_0 c^2 \end{cases}$$

imponiamo una relazione di proporzionalità lineare tra $\mathcal{E}$ ed m_0, tramite il coefficiente α

Quanto vale α?
Sostituendo la seconda eq. nella prima:

$$p^2c^2 = \mathcal{E}^2 - m_0^2c^4 = \alpha^2 m_0^2 c^4 - m_0^2 c^4;$$

Introduciamo la definizione di $|\vec{p}| = \alpha m_0 \beta c$, che per consistenza mantiene la "correzione" α alla massa iniziale m_0.
Quindi:

$$\alpha^2\beta^2 \cancel{m_0^2c^4} = \alpha^2 \cancel{m_0^2c^4} - \cancel{m_0^2c^4};$$

$$\alpha^2(\beta^2-1) = -1; \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma ! \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = \gamma m_0 c^2}$$

EQUIVALENZA MASSA-ENERGIA

SINTESI

1) Def. p^μ e calcolo $p^\mu p_\mu = \mathcal{E}^2 - p^2c^2 \equiv m_0^2c^4$

SCALARE, INVARIANTE, PROPRIETÀ INTRINSECA indipendente da $\vec{v}$

2) Impongo $\mathcal{E} = T + C_1$ e dalla (1) ricavo $C_1 = m_0c^2$.

3) Impongo $\begin{cases} \mathcal{E} = \alpha m_0 c^2 \\ \vec{p} = \alpha m_0 \vec{\beta} c \end{cases}$ e dalla (1)+(2) ricavo $\alpha = \gamma$,

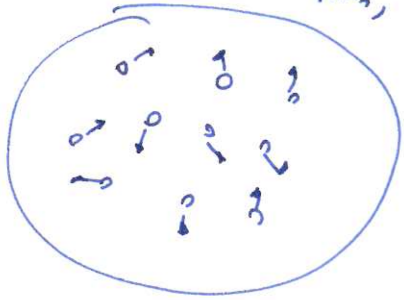
$m = \gamma m_0$

$\boxed{\vec{p}c = \vec{\beta}\mathcal{E}}$

4) Ricavo la forza relativistica, ecc...

MASSA PROPRIA di UN SISTEMA DI CORPI

$m_i,\ \vec{V}_i,\ \vec{x}_i$



Variabili del CENTRO DI MASSA (CM):

$$\vec{X}_{CM} = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 + \dots + m_n\vec{x}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{1}{m_{tot}}\sum_1^n{}_i\, m_i\vec{x}_i .$$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{m_{tot}}\sum_1^n{}_i\, m_i\vec{V}_i = \frac{1}{m_{tot}}\Sigma_i\,\vec{p}_i = \frac{\vec{P}_{tot}}{m_{tot}} . \Rightarrow \vec{P}_{CM} = m_{tot}\vec{V}_{CM} = \vec{P}_{tot}.$$

Tuttavia, il contenuto energetico del sistema non può ridursi a quello del CM. Infatti, potremmo definire:

$$\epsilon_{CM}^2 = (\vec{P}_{CM}c)^2 + (m_{tot}c^2)^2 \quad t.c. \quad \epsilon_{CM}^2 = P_{tot}^2c^2 + m_{tot}^2c^4$$

Per l'energia totale del sistema abbiamo invece:

$$\epsilon_{tot}^2 = (\Sigma_i\,\epsilon_i)^2 = \left(\Sigma_i\sqrt{(\vec{p}_ic)^2 + (m_{0i}c^2)^2}\right)^2 \geq \underbrace{\left(\Sigma_i(\vec{p}_ic)\right)^2}_{(\vec{P}_{tot}c)^2} + \underbrace{\left(\Sigma_i m_{0i}c^2\right)^2}_{(m_{tot}c^2)^2}$$

cosicché $\epsilon_{tot}^2 - (\vec{P}_{tot}c)^2 \geq (m_{tot}c^2)^2$

In altre parole, possiamo definire un $P_{tot}^\mu = (\epsilon_{tot}, \vec{P}_{tot}c)$ t.c. l'invariante relativistico $P_{tot}^\mu P_{\mu\,tot} = \epsilon_{tot}^2 - (\vec{P}_{tot}c)^2 \equiv (M_0c^2)^2$

~~Sia~~ la MASSA PROPRIA del SISTEMA e dalle precedenti:

$$P_{tot}^\mu P_{tot\,\mu} = (M_0c^2)^2 \geq (\Sigma_i\, m_{0i}c^2)^2$$

La differenza $M_0^2 - (\Sigma_i\, m_{0i})^2$ = energia cinetica dei componenti + energia di interazione (urti anelastici)

→ CREAZIONE di particelle (NON FONDAMENTALI) dalla collisione di FASCI ACCELERATI

→ LIBERAZIONE di ENERGIA CINETICA dalla fissione di elementi non fondamentali, pari all'ENERGIA di LEGAME.

→ nel sistema in cui $\vec{P}_{CM}' = \vec{P}_{tot}' = 0$, vale $M_0c^2 = \epsilon_{tot}'$, quindi la MASSA PROPRIA del sistema è l'ENERGIA A RIPOSO nel SR in cui il CM è in QUIETE.

DE BROGLIE : DUALISMO ONDA - PARTICELLA.

Assumiamo la quantizzazione di un'onda e.m. in pacchetti di energia unitari ("quanti") pari a $\epsilon = h\nu$, h = cost. di Planck = $6.626 \cdot 10^{-34}$ Js.

Dalla relazione $pc = \beta E = E \Rightarrow p = h\frac{\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$.

[DIM: dalle def. di p ed $E \propto m_0 c^2$] $(\beta = 1)$

Il 4-vettore momento dell'onda e.m. sarà:

$$p^\mu = \left(\frac{\epsilon}{c}, \vec{p}\right) = \left(h\frac{\nu}{c}, h\frac{\nu}{c}\hat{n}\right) \quad t.c. \quad p^\mu p_\mu = m_\gamma = 0 \; !$$

$\Rightarrow$ i FOTONI sono particelle a massa a riposo nulla.

Viceversa, possiamo associare ad ogni particella con $m_0 \neq 0$ una FUNZIONE D'ONDA caratterizzata da (ν, λ, v).

Così come la LUCE deve essere caratterizzata da $\lambda \leq$ scala spaziale della struttura della materia che si vuole analizzare (es., diffrazione), allo stesso modo occorrono particelle MASSIVE ad alte energie per rompere legami (atomici, nucleari, sub-nucleari) a scale spaziali sempre più piccole:

$$\boxed{p = \frac{h}{\lambda}}$$

momento della particella incidente (FASCIO COLLISORE)

lunghezza d'onda associata alla particella (RISOLUZIONE SPAZIALE) $\lesssim$ lunghezza d'onda (scala spaziale) del legame da investigare.

Il limite fisico ultimo nella RISOLUZIONE spaziale/energetica è dato dal PRINCIPIO di INDETERMINAZIONE DI HEISENBERG:

$$\boxed{\Delta x \Delta p_x \leq h}$$

MINIMO errore nella MISURA della posizione e del momento di una particella qualora le misure siano effettuate SIMULTANEAMENTE.

EFFETTO DOPPLER RELATIVISTICO e ABERRAZIONE STELLARE.

Si dimostra che la FASE di un'ONDA (in particolare, e.m.) è un INVARIANTE di L.:

$$\phi := x^\mu p_\mu = (Et - \vec{p}\cdot\vec{x}) = h\nu\left(t - \frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{E}\right) = h\nu\underbrace{\left(t - \frac{\vec{x}\cdot\hat{n}}{c}\right)}_{\text{FASE}}$$

FASE, $\hat{n} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ nel piano (x, y).

Imponiamo $\phi = \phi'$ (in SR e SR'):

$$\nu t - \frac{y\sin\theta}{\lambda} - \frac{x\cos\theta}{\lambda} = \nu' t' - \frac{y'\sin\theta'}{\lambda'} - \frac{x'\cos\theta'}{\lambda'};$$

Applico le trasf. di Lorentz ($x' = x'(x)$, ecc.)

$$\nu'\gamma\left(t - \frac{xV_x}{c^2}\right) - y\frac{\sin\theta'}{\lambda'} - \frac{\gamma(x - V_x t)}{\lambda'}\cos\theta' = \nu t - \frac{y\sin\theta}{\lambda} - \frac{x\cos\theta}{\lambda};$$

Raggruppo membro a membro per x, y, t e uguaglio i termini:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin\theta}{\lambda} = \dfrac{\sin\theta'}{\lambda'} \\ \nu'\gamma t + \gamma\dfrac{V_x t}{\lambda'}\cos\theta' = \nu t \implies \boxed{\nu = \gamma\nu'(1 + \beta_x\cos\theta')} \\ -\nu'\gamma\dfrac{V_x}{c^2} - \dfrac{\gamma}{\lambda'}\cos\theta' = -\dfrac{\cos\theta}{\lambda} \implies \dfrac{\cos\theta}{\lambda} = \dfrac{\gamma}{\lambda'}(\cos\theta' + \beta) \end{cases}$$

EFF. DOPPLER

Dalla 1a e 3a eq. ricavo il rapporto:

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta'}{\gamma(\cos\theta' + \beta_x)}}$$

ABERR. della LUCE

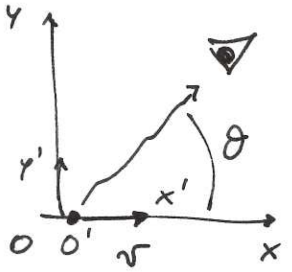
N.B.: in queste espressioni, β_x è la velocità relativa dei 2 SR come vista da SR' (nel quale l'onda e.m. viene emessa da una sorgente in QUIETE). θ': l'angolo tra $\hat{n}'$ (direzione di emissione in SR') e il moto relativo di SR rispetto a SR'.

- ν (in SR) è sempre $\gamma\nu'$ quando l'onda è emessa a $\theta' = \frac{\pi}{2}$ (in SR'). ν può aumentare o diminuire a seconda di $\theta' = 0, \pi$ per $\beta_x \gtrless 0$.

- Un'onda emessa a $\theta' = \frac{\pi}{2}$ viene vista (collimata) ad un angolo $1/\gamma$ nel SR. (ex: radiazione di sincrotrone dal SR' della particella a quello SR del laboratorio).

EFFETTO DOPPLER RELATIVISTICO e ABERRAZIONE STELLARE (COLLIMAZIONE ANGOLARE)

dalla trasformazione del 4-vettore impulso p^μ. 4c



① $\boxed{\nu = \nu(\nu', \theta')}$: (angolo di emissione nel SR')

$$\epsilon = \gamma(\epsilon' + \vec{p}'\cdot\vec{v});$$

$$h\nu = \gamma\left(h\nu' + h\frac{\nu'}{c}v\cos\theta'\right);$$

$$\boxed{\nu = \gamma\nu'(1+\beta\cos\theta')}$$

② $\boxed{\nu = \nu(\nu', \theta)}$: (angolo di emissione nel SR)

$$\epsilon' = \gamma(\epsilon - \vec{p}\cdot\vec{v});$$

$$h\nu' = \gamma\left(h\nu - h\frac{\nu}{c}v\cos\theta\right);$$

$$\nu' = \gamma\nu(1-\beta\cos\theta);$$

$$\boxed{\nu = \frac{\nu'}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}}$$

Dalla conservazione dei momenti trasversi (SR $\leftrightarrow$ SR'): $p_y = p_y'$, troviamo $\nu\sin\theta = \nu'\sin\theta'$.

Inoltre: $p_x = \gamma\left(p_x' + \frac{\epsilon'}{c}v\right)$;

$$\nu\cos\theta = \gamma(\nu'\cos\theta' + \beta\nu') = \gamma\nu'(\beta + \cos\theta').$$

$$\frac{\nu\sin\theta}{\nu\cos\theta} = \frac{\nu'\sin\theta'}{\gamma\nu'(\beta+\cos\theta')};$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\sin\theta'}{\gamma(\beta+\cos\theta')}}$$

$\theta' = 0, \pi \Rightarrow \theta = 0, \pi$

$\theta' = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \pm\frac{1}{\beta\gamma} \xrightarrow{\gamma\gg1} \pm\frac{1}{\gamma}$

In conclusione, la radiazione emessa in $0<|\theta'|<\frac{\pi}{2}$ risulta essere COLLIMATA nel SR entro $|\theta| < \frac{1}{\gamma}$ nel caso ultra-relativistico $\beta \to 1$.

TRASFORMAZIONE DELLA FORZA

- Consideriamo il caso più semplice in cui la particella è in QUIETE in SR' t.c. istantaneamente $\vec{u}' = 0$ $(\vec{u} = \vec{v})$.
- Applichiamo la legge di trasf. per un vettore controvariante:

$$f'^{\mu} = \frac{dx'^{\mu}}{dx^{\nu}} f^{\nu} \qquad \text{dove} \quad f'^{\mu} = \left(\gamma'\vec{F}'\cdot\vec{u}', c\gamma'\vec{F}'\right) \text{ e nel caso in esame } = \left(0, c\vec{F}'\right).$$

$$f'^{1} = cf_x' = \frac{dx'^1}{dx^0} f^0 + \frac{dx'^1}{dx^1} f^1 + \frac{dx'^1}{dx^2} f^2 + \frac{dx'^1}{dx^3} f^3 =$$

$$= \frac{dx'}{c\,dt}\gamma\vec{F}\cdot\vec{v} + \frac{dx'}{dx} c\gamma f_x + 0 + 0 =$$

$$= -\gamma^2 \frac{v^2}{c} f_x + c\gamma^2 f_x ;$$

$$f_x' = f_x \gamma^2 (1-\beta^2) = f_x .$$

$$f'^{2} = c f_y' = \frac{dx'^2}{dx^0} f_0 + \frac{dx'^2}{dx^1} f^1 + \frac{dx'^2}{dx^2} f^2 + \frac{dx'^2}{dx^3} f^3 =$$

$$= \underbrace{\frac{dy'}{c\,dt}}_{0}\gamma\vec{F}\cdot\vec{v} + 0 + \underbrace{\frac{dy'}{dy}}_{1} c\gamma f_y + 0 ;$$

$$f'_{y,z} = \gamma f_{y,z}$$

$\Rightarrow$ la forza nel rif. in cui la particella è istantaneamente in quiete è sempre $\geq$ della forza percepita in qualsiasi altro SR inerziale.

N.B.: nel caso + generale $\vec{u}' \neq 0$, si ha:

$$\begin{cases} f_x' = f_x'(f_x, f_y, f_z) \\ f'_{y,z} = f'_{y,z}(f_{y,z}) \end{cases}$$

• TRASFORMAZIONI DI LORENTZ per CAMPO E.M.

Consideriamo una particella di carica q in QUIETE nel SR'. Questo si muove con $\vec{V} = V_x$ rispetto a SR.

Dalle trasformazioni della FORZA sappiamo che:

$$\begin{cases} F_x = F_{x'} \\ F_{y,z} = \dfrac{F_{y,z}'}{\gamma} \end{cases}$$

$\{u_y' = 0 \Rightarrow u_y =$
$u_z' = 0 \Rightarrow u_z =$

e $u_x = V$

Consideriamo la FORZA DI LORENTZ sulla carica nel SR:

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B})$ per generici $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Le sue componenti sono:

$$F_x = q[E_x + (V_y B_z - V_z B_y)] = q E_x$$

$$F_y = q[E_y + (V_z B_x - V_x B_z)] = q(E_y - V_x B_z)$$

$$F_z = q(E_z + (V_x B_y - V_y B_x)) = q(E_z + V_x B_y)$$

Dalle trasf. di $\vec{F}$ troviamo:

$$\begin{cases} E_x' = E_x \\ E_y' = \gamma(E_y - V_x B_z) \\ E_z' = \gamma(E_z + V_x B_y) \end{cases}$$

Per una generica direzione di $\vec{V}$, def. componenti // e $\perp$ a $\vec{V}$ tali che:

$$\begin{cases} E_{//}' = E_{//} \\ E_{\perp}' = \gamma[E_{\perp} + (\vec{V} \times \vec{B})_{\perp}] \end{cases}$$

Analoghe trasformazioni si ottengono considerando $\vec{V} = (0, V_y, V_z)$:

$$\begin{cases} B_x' = B_x \\ B_y' = \gamma\left(B_y + \dfrac{V_x}{c^2} E_z\right) \\ B_z' = \gamma\left(B_z - \dfrac{V_x}{c^2} E_y\right) \end{cases}$$

e per una generica direzione di $\vec{V}$:

$$\begin{cases} B_{//}' = B_{//} \\ B_{\perp}' = \gamma\left[B_{\perp} - \dfrac{1}{c^2}(\vec{V} \times \vec{E})_{\perp}\right] \end{cases}$$

→ VAI A: ESERCIZIO sul CICLOTRONE e FREQ. DI LAWRENCE.
ESERCIZIO CAMPO DI CARICA PUNTIFORME

~~Segue che l'ipotesi $m(v) = \gamma(v) m_0$, v = velocità della particella nel SR è VALIDA. $m_0 :=$ MASSA A RIPOSO (PROPRIA)~~.

- QUANTITÀ DI MOTO e FORZA RELATIVISTICA $\rightarrow$ ACCELERAZIONE.

$\vec{p} = m\vec{v} \rightarrow$ diventa $\vec{p} = m\vec{v} = \gamma \vec{\beta} m_0 c$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m_0 c \frac{d}{dt}(\gamma\vec{\beta}) = \gamma m_0 \vec{a} + m_0 c \vec{\beta} \frac{d\gamma}{dt} =$$

$$= \gamma m_0 \vec{a} + m_0 c \vec{\beta} \gamma^3 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) =$$

$$= \boxed{\underbrace{\gamma m_0 \vec{a}}_{\text{componente } /\!/ \vec{a}} + \underbrace{\gamma^3 m_0 \vec{v} \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\right)}_{\text{componente } /\!/ \vec{v}}}.$$

$$\Rightarrow F_{/\!/} \; (\vec{v} /\!/ \vec{a}) = \gamma m_0 \vec{a} + \gamma^3 m_0 \beta^2 \vec{a} = \gamma m_0 \vec{a} (1 + \beta^2\gamma^2) = \boxed{\gamma^3 m_0 \vec{a}}$$

$$\Rightarrow F_{\perp} \; (\vec{v} \perp \vec{a}) = \boxed{\gamma m_0 \vec{a}}.$$

N.B.: in un acceleratore lineare, l'accelerazione relativistica subita da una particella è γ^3-volte maggiore che in approssimazione classica. In un acceleratore circolare, la accelerazione centripeta è γ-volte maggiore che in approssimazione classica.

- ENERGIA TOTALE e CINETICA

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} = \underbrace{\gamma m_0 \vec{a}\cdot\vec{v}}_{= \frac{c^2}{\gamma^2} m_0 \frac{d\gamma}{dt}} + \underbrace{\gamma^3 m_0 \beta^2 \vec{a}\cdot\vec{v}}_{= m_0 v^2 \frac{d\gamma}{dt}} = m_0 \frac{d\gamma}{dt} c^2 \underbrace{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \beta^2\right)}_{1} =$$

dalla derivazione di $\vec{F}$ di cui sopra

$$= \frac{d\gamma}{dt} m_0 c^2 ; \quad \Rightarrow \boxed{E = \gamma m_0 c^2}, \text{ energia TOTALE}$$

Dalla def. di QUANTITÀ di MOTO troviamo inoltre:

$$pc = \beta\gamma m_0 c^2 = \beta E$$

Da cui segue che:

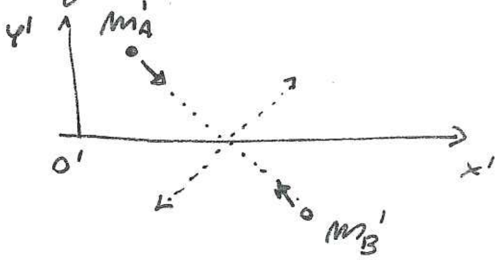
$$E^2 = \frac{p^2c^2}{\beta^2} = \frac{p^2c^2\gamma^2}{(\gamma^2 - 1)} ; \quad \cancel{\gamma^4} m_0^2 c^4 - \cancel{\gamma^2} m_0^2 c^4 = \cancel{\gamma^2} p^2 c^2 ;$$

$$\boxed{E^2 = p^2c^2 + m_0^2 c^4}$$

• MASSA RELATIVISTICA (derivazione "classica").

Consideriamo un urto perfettamente ELASTICO nel SR' che si muove a velocità V_x rispetto a SR. Assumiamo in generale $m_A \neq m_A'$ e $m_B \neq m_B'$

Per semplicità scegliamo:



$$\begin{cases} m_A = m_B = m_0 \quad (\text{in SR}) \\ u_{xA} = -u_{xB} \\ u_{yA} = -u_{yB} \end{cases} \quad \text{e} \quad V_x = u_{xA} \equiv V$$

Il sistema è isolato sia in SR che in SR', quindi il momento x (x') e y (y') è conservato. Nel piano y' di SR' abbiamo:

$$m_A' u_{yA}' + m_B' u_{yB}' = 0$$

Dimostriamo che tale uguaglianza è soddisfatta da una legge per la massa che dipende dalla velocità della particella, cioè: $m' = \gamma' m_0$. Se questo è vero, dobbiamo risolvere:

$$\gamma_A' u_{yA}' + \gamma_B' u_{yB}' = 0$$

$$u_{yA}' = \frac{u_{yA}}{\gamma\left(1 - \frac{u_{xA} V_x}{c^2}\right)} = \frac{u_{yA}}{\gamma\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} = \gamma u_{yA}$$

$$u_{yB}' = \frac{u_{yB}}{\gamma\left(1 - \frac{u_{xB} V_x}{c^2}\right)} = \frac{-u_{yA}}{\gamma\left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right)} = -\gamma u_{yA}\left(\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\right), \quad \beta := \frac{V}{c}$$

$$\gamma'_A = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2_{xA}+u'^2_{yA}}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\gamma u_{yA}}{c}\right)^2}}.$$

$= 0$ perché è la velocità x' nel SR', cioè u'_A che velocità orizzontale NULLA su SR'

$(\gamma u_{yA})^2$ dalla precedente trasformazione

$$\gamma'_B = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2_{xB}+u'^2_{yB}}{c^2}}} = \ldots = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4\beta^2}{(1+\beta^2)^2}-\left(\frac{\gamma u_{yA}}{c}\right)^2\frac{(1-\beta^2)^2}{(1+\beta^2)^2}}} =$$

$$\left\{\begin{aligned}&\left[\frac{u_{xB}-V_x}{\left(1-\frac{u_{xB}V_x}{c^2}\right)}\right]^2 = \left[\frac{u_{yB}}{\gamma\left(1-\frac{u_{xB}V_x}{c^2}\right)}\right]^2 = \left[\frac{-u_{yA}}{\gamma\left(1+\frac{V^2}{c^2}\right)}\right]^2 = \\ &= \left[\frac{-2V}{\left(1+\frac{V^2}{c^2}\right)}\right]^2; \qquad = \left[-\gamma u_{yA}\frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{V^2}{c^2}\right)}\right]^2;\end{aligned}\right\}$$

$$= \frac{(1+\beta^2)}{\sqrt{(1-\beta^2)^2-\left(\frac{\gamma u_{yA}}{c}\right)^2(1-\beta^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\gamma u_{yA}}{c}\right)^2}}\left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right) =$$

$$= \gamma'_A\left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right);$$

Sostituendo infine nella eq. iniziale:

$$m_A' u_{yA}' + m_B' u_{yB}' = 0;$$

$$\frac{1}{\cancel{\sqrt{1-\left(\frac{\gamma u_{yA}}{c}\right)^2}}}\cdot\gamma u_{yA} - \frac{1}{\cancel{\sqrt{1-\left(\frac{\gamma u_{yA}}{c}\right)^2}}}\cancel{\left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)}\cdot\gamma u_{yA}\cancel{\left(\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\right)} \equiv 0 \quad \text{CVD}$$

• TRASFORMAZIONE delle EQ. DI MAXWELL

Per mostrarlo consideriamo l'eq. $\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ nel SR, limitatamente alla componente $\vec{B} = B_y$. Si assume SR' in moto rispetto a SR con velocità $\vec{V} = V_x$ t.c. $\beta = \frac{V_x}{c}$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Applicando le trasf. di Lorentz alle coordinate $(\vec{x}, t)$ nelle derivate, e ai campi e.m., ci aspettiamo di trovare l'eq. di Maxwell nella stessa FORMA nel SR', cioè: $\text{rot}\,\vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}_y'}{\partial t'}$.

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}\underbrace{\frac{\partial x'}{\partial x}}_{\gamma} + \frac{\partial}{\partial y'}\underbrace{\frac{\partial y'}{\partial x}}_{0} + \frac{\partial}{\partial z'}\underbrace{\frac{\partial z'}{\partial x}}_{0} + \frac{\partial}{\partial t'}\underbrace{\frac{\partial t'}{\partial x}}_{-\gamma\frac{V_x}{c^2}} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{V_x}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'}\underbrace{\frac{\partial x'}{\partial t}}_{-\gamma V_x} + \frac{\partial}{\partial y'}\underbrace{\frac{\partial y'}{\partial t}}_{0} + \frac{\partial}{\partial z'}\underbrace{\frac{\partial z'}{\partial t}}_{0} + \frac{\partial}{\partial t'}\underbrace{\frac{\partial t'}{\partial t}}_{\gamma} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right);$$

$$E_x = E_x';$$

$$E_z = \gamma(E_z' - V_x B_y' - \underbrace{V_y}_{0} B_x') = \gamma(E_z' - v_x B_y');$$

$$B_y = \gamma\left(B_y' - \frac{V_x}{c^2}E_z'\right);$$

Sostituendo le 6 eqs. di trasformazione di cui sopra nella eq. di Maxwell, troviamo:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_x'}{\partial z'};$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial t} = \gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{V_x}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)(E_z' - v_x B_y') - \gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v_x\frac{\partial}{\partial x'}\right)\left(B_y' - \frac{V_x}{c^2}E_z'\right) =$$

$$= \frac{\partial E_z'}{\partial x'}\underbrace{\gamma^2(1-\beta^2)}_{1} - \cancel{\gamma^2\frac{V_x}{c^2}\frac{\partial E_z'}{\partial t'}} - \frac{\partial B_y'}{\partial t'}\underbrace{\gamma^2(1-\beta^2)}_{1} + \cancel{\gamma^2\frac{V_x}{c^2}\frac{\partial E_z'}{\partial t'}};$$

Quindi: $\frac{\partial E_x'}{\partial z'} - \frac{\partial E_z'}{\partial x'} = -\frac{\partial B_y'}{\partial t'}$. CVD.