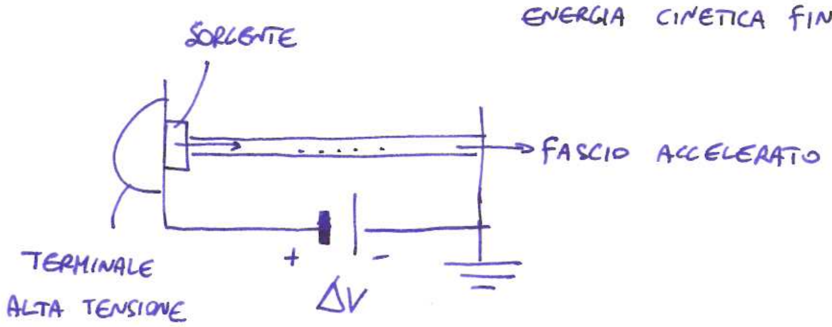
elettra SINCROTRONE TRIESTE
Società Consortile per Azioni

ACCELERATORI ELETTROSTATICI

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 \Rightarrow \oint \vec{E}\,d\vec{l} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla} V \\ T = q\,\Delta V \end{cases}$$

ENERGIA CINETICA FINALE

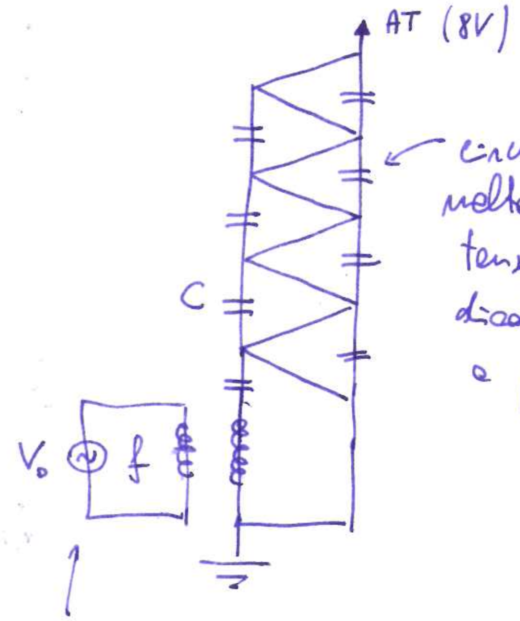


Problematiche e limiti:

1) isolamento elettrico ad alte ΔV

2) potenza dissipata / invecchiamento dei componenti elettrici

- COCKROFT – WALTON (fino a ~ 10's MV)



circuito moltiplicatore di tensione a diodi e condensatori, a più stadi (N)

alimentatore in alternata a bassa tensione

corrente media estratta

$$V_N = 2NV_0 - \frac{\langle i \rangle}{12 f C}\left(8N^3 + 9N^2 + N\right)$$

$\Rightarrow$ poiché $2NV_0 \geq V_N$, maggiore è l'energia finale di accelerazione, minore è la corrente estratta (valido in generale per tutti gli acc. e.s.).

$\Rightarrow$ V_N fluttua nel tempo per il processo di carica/scarica dei C : $\Delta V_N = \frac{1}{2}\frac{N(N+1)\langle i \rangle}{fC}$

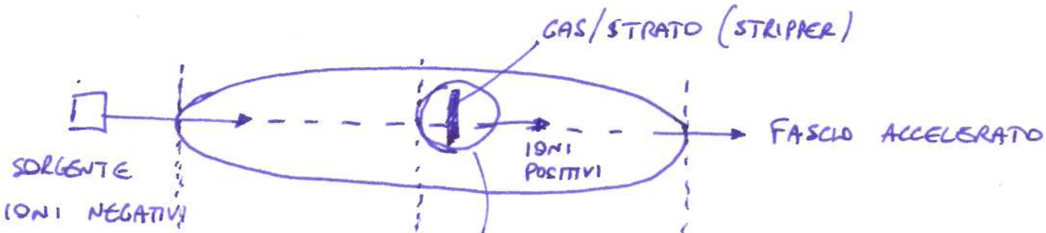
• VAN DE GRAAF (fino a ~10 MV)

L'accumulo di alta tensione è generato in questo caso dalla deposizione meccanica (per afflusso) di carica su un terminale metallico. Quest'ultimo si carica ad alta tensione tale da produrre correnti estratte, accelerando le particelle accelerate verso terra ($V=0$). Sistema elettro-meccanico.

Problematiche e limiti: isolamento ad alte tensioni,
sforzi meccanici ad elevati campi elettrici

Vantaggi rispetto al C-W: stabilità di tensione

• TANDEM VAN DE GRAAF (fino a ~200 MV)



$T \approx 0$ (Au^-, $m=-1$)

$T = qV$ (stripper, $m=13$) $eV = 15\,MeV$

$T = \underline{(1+m)}\,qV$ (200 MeV)

elettroni "strappati" agli ioni negativi (per ione).

ACCELERATORI ELETTRODINAMICI.

Eqs. di Maxwell per campi e.m. variabili nel tempo:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla} V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \text{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{d\vec{B}}{dt} \end{cases}$$

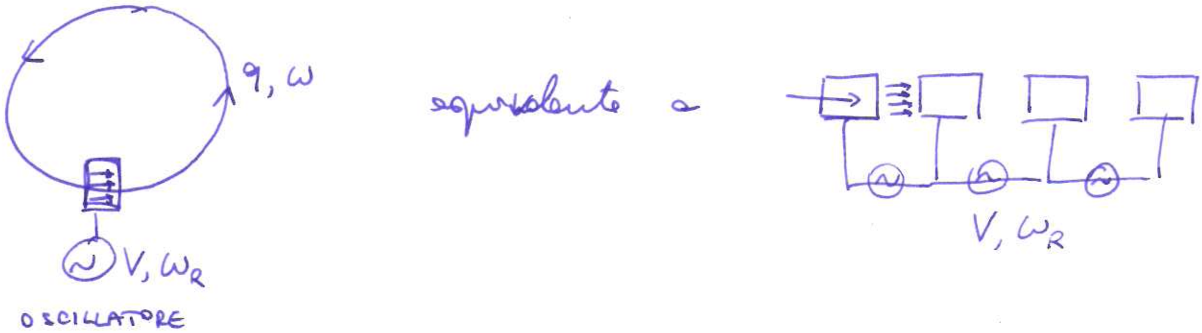
← esiste un potenziale elettrico che genera $\vec{E}$ tale per cui questo è reso nullo al di fuori di una certa regione a $\vec{\nabla} V \neq 0$ dal potenziale vettore magnetico $\vec{A}(t)$.

$$\Rightarrow \oint \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

è possibile costruire percorsi chiusi sui quali $\vec{E}$ NON-ROTAZIONALE (NON-CONSERVATIVO) fornisca aumento di energia

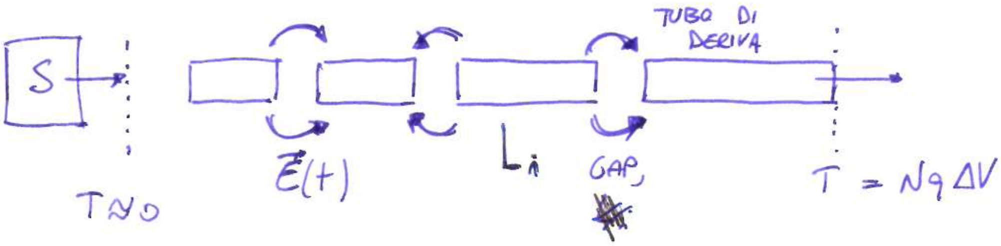
è possibile modulare $\vec{B}(t)$ su una certa regione spaziale per creare $\vec{E}$ NON-CONSERVATIVO.

SINCROTRONE TRIESTE
Società Consortile per Azioni



In entrambi i casi, la presenza di un oscillatore impone la richiesta di SINCRONISMO tra il verso del $\vec{E}$ accelerante e il passaggio della particella nell'elemento a RADIOFREQUENZA (RF). L'accelerazione finale (guadagno di energia) è fornita dal passaggio consecutivo delle particelle - generate ALTROVE - nell'elemento RF.

• ACCELERATORE LINEARE di WIDERÖE



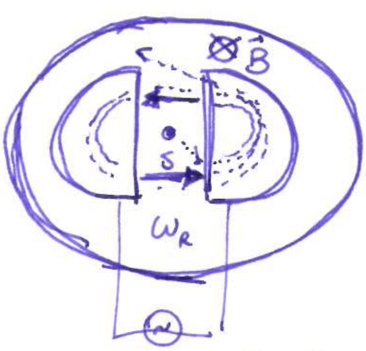
$2h\omega = \omega_R$, $h \in \mathbb{N}$

$$\frac{2h\beta_i c}{L_i} = f_R \Rightarrow \boxed{L_i = 2h\lambda_R\beta_i}$$

← limitato a basse frequenze, le dimensioni lo rendono tecnicamente inadeguato.

← quando $\lambda_R \approx$ dimensioni dei componenti elettrici (COSTANTI CONCENTRATE), questi iniziano ad IRRAGGIARE, diminuendo l'efficienza energetica del sistema.

• CICLOTRONE di LAWRENCE ($\vec{B}$ UNIFORME) ed EVOLUZIONI



$V_0 \sin(\omega_{RF} t + \phi_0)$

$T_i \approx 0$

EQUILIBRIO: $m\frac{v^2}{\rho} = qvB$

$\omega_c = \frac{qB}{\gamma m_0 c}$, $\omega_R \equiv h\omega$

$p = \frac{q}{\cancel{c}} B\rho$

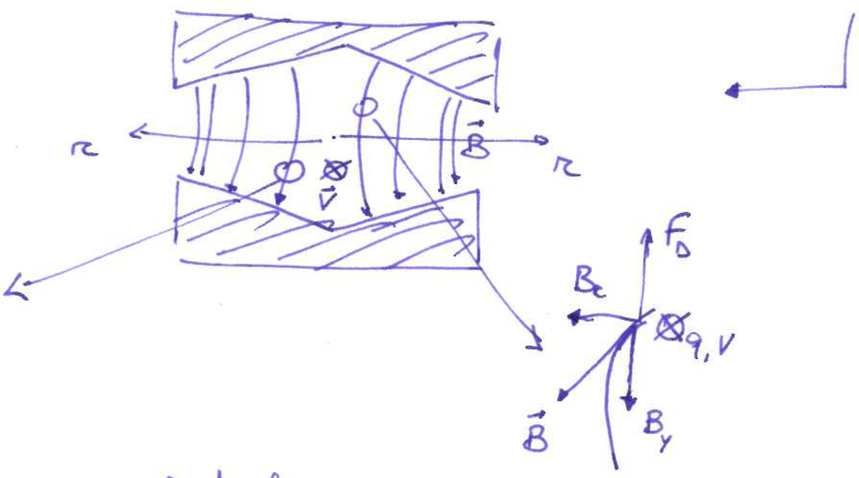
- Si modula ω_R nel tempo all'aumentare di ω (p). In questo caso, p AUMENTA ma T_{RIV} = cost., ad ogni giro
  ⇒ SINCRO-CICLOTRONE
- $B(r)$ viene sagomato in modo da ~~mantenere~~ ω_c COSTANTE all'aumentare di ρ (p)
  ⇒ CICLOTRONE A SETTORI

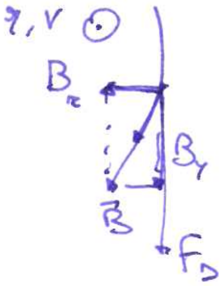
$$T = \frac{p^2}{2m} \underset{\gamma \approx 1}{\approx} \left(\frac{q}{\cancel{c}}\right)^2 (B\rho)^2 \frac{1}{2m_0}$$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T}$$

$\Delta T \approx 100$ keV/giro; T finale, ≈ 100 MeV

$\approx 5 \cdot 10^{-4}$/giro





Defocheggiamento VERTICALE:

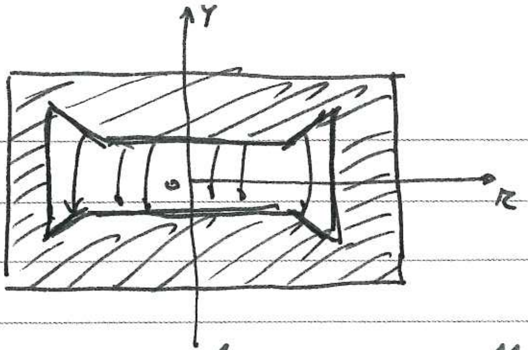
$$F_D = \frac{q}{\cancel{c}} v B_r$$

⇒ instabilità del moto delle particelle, che non rimangono confinate nel piano verticale.

⇒ La sagomatura dei poli ~~ferromagnetici~~ permette di focalizzare nel complesso il moto delle particelle. I SETTORI consentono inoltre di introdurre DIAGNOSTICA del fascio nell'accelera-tore.

Principale limite: costo ~ dimensioni ~ ρ^3, per alti $\vec{B}$ (anche superconduttori)

• BETATRONE



$$\begin{cases} \oint \mathcal{E}_\theta \, dl = -\dfrac{d\phi(\bar{B}_Y(t))}{dt} \\[2ex] \dfrac{dp_z(r)}{dt} = q\,\mathcal{E}_\theta(r) \end{cases}$$

$$\left\{ 2\pi r\, \mathcal{E}_\theta(r) = -\pi r^2 \frac{d\bar{B}(r)}{dt} \right.$$

induzione magnetica MEDIA sulla superficie di area πr^2 racchiusa dalla circonferenza con raggio r. $\mathcal{E}_\theta(r)$ è il campo elettrico (tangenziale) calcolato al raggio r.

dal rotore $|_Y$ di $\vec{E}$:

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r\mathcal{E}_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial \theta}\right] = -\frac{dB_Y(r)}{dt};$$

Scegliamo un r specifico, così che $r = \text{cost.}$, e troviamo:

$$\frac{\mathcal{E}_\theta}{r} - \underbrace{\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial \theta}}}_{0} = -\frac{dB_Y(r)}{dt}.$$

il sistema è a simmetria CILINDRICA, cioè $\vec{E}$ non dipende da θ,

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial \theta} = 0$$

assumiamo $B_Y = B_Y(r,t) = B_Y(t)$ ad un r specifico

$$\begin{cases} \mathcal{E}_\theta(r) = -\dfrac{r}{2}\dfrac{d\bar{B}_Y(r)}{dt} \\[2ex] \mathcal{E}_\theta(r) = -r\dfrac{dB_Y(r)}{dt} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{dB_Y(r)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\bar{B}_Y(r)}{dt}}$$

variazione in t del campo B_Y LOCALE (r)

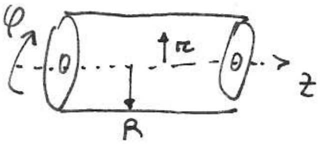
variazione in t del campo B_Y MEDIO (su πr^2)

Questa relazione garantisce la stabilità del moto nel piano di curvatura in quanto l'orbita è circolare (chiusa) e l'accelerazione da parte di $\mathcal{E}_\theta$ è continua e uniforme in modulo.

La distribuzione delle linee di forza di B_Y è OPPOSTA a quella del CICLOTRONE di LAWRENCE, al fine di garantire la relazione suddetta (B_Y è più intenso al centro che a grandi r) $\Rightarrow$ il BETATRONE fornisce un FOCHEGGIAMENTO VERTICALE naturale (OSCILLAZIONI DI BETATRONE)

STRUTTURE RF (RISONANTI)

- CELLA PILL-BOX



Cavità ideale (conducibilità infinita) metallica cilindrica.

Condizioni al contorno per $\vec{E}$, $\vec{B}$:

$$\begin{cases} E_z(r=R) = 0 & \leftarrow \text{campo accelerante nullo sulla parete} \\ B_\varphi(r=0) = 0 & \leftarrow \text{campo magnetico nullo sull'asse} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_r}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial B_r}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \quad \text{dalla simmetria cilindrica}$$

Eq. Maxwell:

$$\begin{cases} (\vec{\nabla}\times\vec{E})_\varphi = -\dfrac{\partial B_\varphi}{\partial t} \\ (\vec{\nabla}\times\vec{B})_z = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{\cancel{\dfrac{\partial E_r}{\partial z}}}_{0} - \dfrac{\partial E_z}{\partial r} = -\dfrac{\partial B_\varphi}{\partial t} & \cdot\, \partial_r \\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial (r B_\varphi)}{\partial r} - \underbrace{\cancel{\dfrac{\partial B_r}{\partial \varphi}}}_{0}\right] = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_z}{\partial t} & \cdot\, \partial_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} = \dfrac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r \partial t} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial B_\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r \partial t} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_z}{\partial r} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}}$$

Risolvo per separazione delle variabili, cercando una soluzione del tipo: $E_z(r,t) \sim A(r)\, e^{i(\omega t + \phi_0)}$. Dalla sostituzione:

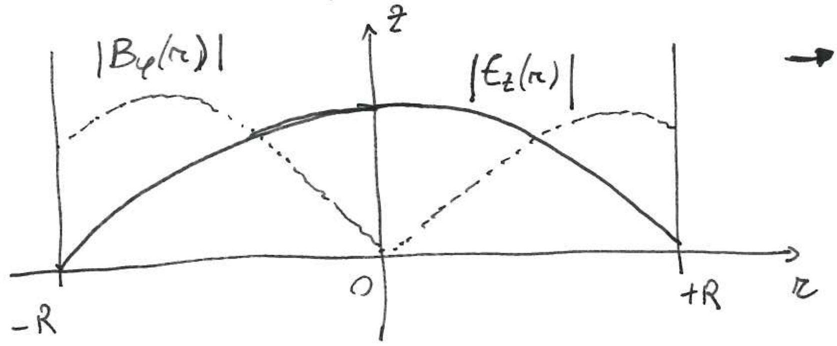
$A(r) = a_0 J_0\left(\dfrac{\omega r}{c}\right) \leftarrow$ funzione di Bessel di ordine 0.

La condizione $E_z(r=R) = 0$ è soddisfatta dal primo zero (in r) di J_0, cioè: $\dfrac{\omega r}{c} = 2.405 \Rightarrow \boxed{\omega_{rf} \propto \dfrac{1}{R}}$

Per fasci accelerati in prossimità dell'asse della cella, $r \approx 0$, abbiamo $J_0(r\approx 0) \approx 1 \Rightarrow E_z \approx E_{z,0}\cos(\omega t + \phi_0)$.

N.B.: a differenza di un'onda e.m. nel vuoto, le condizioni al contorno imposte dalla geometria della cella metallica consentono di avere $E_z \neq 0$ lungo la direzione di propagazione dell'onda.

Distribuzione dei campi E_z, B_φ nella cella :



→ per fasci accelerati sull'asse della cella e le cui dimensioni trasverse sono $\ll R$, possiamo considerare $B_\varphi = 0$ e $E_z \neq 0$ ai fini della dinamica.

• STRUTTURA PERIODICA : "TRAVELLING WAVE".

Consideriamo una sequenza periodica di celle (identiche). Il TEO di FLOQUET stabilisce che la componente E_z all'interfaccia degli elementi ripetitivi (celle) differisce al più di una costante (in generale, numero complesso). Consideriamo il caso di una ONDA VIAGGIANTE (Travelling Wave):

$$E_z^{TW} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_m J_0(k_m, r)\underbrace{\cos(\omega t - k_m s + \phi_0)}$$

essendo PERIODICO, posso espanderlo in serie di FOURIER

onde propaganti alla stessa ω_{RF} ma diverso numero d'onda, dove: $\boxed{k_m = k_0 + \frac{2\pi m}{d}}$,
d = distanza tra 2 celle

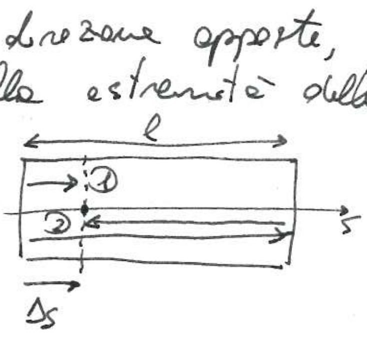
La velocità di fase $v_{ph}^m = \frac{\omega}{k_m}$ è differente per ogni MODO. In genere si costruisce la struttura con IRIDI interne t.c. solo il MODO FONDAMENTALE ($m=0$) abbia $v_{ph} \simeq c$. Dunque le particelle ultra-relativistiche sono SINCRONE con il modo fondamentale (con il fronte dell'onda).

$$\Rightarrow E_z^{TW} \underset{\substack{m=0\\ r\simeq 0}}{\simeq} E_{z,0}^{TW}\cos(\omega t - ks + \phi_0).$$

• STRUTTURA PERIODICA : "STANDING WAVE".

Un'onda stazionaria in una struttura periodica può essere intesa come la sovrapposizione lineare di 2 onde viaggianti in direzione opposte, una come nel caso precedente, l'altra RIFLESSA dalla estremità della struttura :

$$E_z^{SW} \underset{\substack{m=0\\ r\simeq 0}}{\simeq} E_{z,0}^{TW}\cos(\omega t - ks) + E_{z,0}^{TW}\cos(\omega t - k(2l - s))$$



In notazione complessa troviamo:

$$e^{i(\omega t - ks)} + e^{i(\omega t - k(2l-s))} = e^{i\omega t}e^{-iks} + e^{i\omega t}e^{-ik(2l-s)} =$$

$$= e^{i\omega t}e^{-iks}\left(1 + e^{-i2k(l-s)}\right) = e^{i\omega t}e^{-iks}\underbrace{\left(\frac{1+e^{-i2k(l-s)}}{2e^{-ik(l-s)}}\right)}_{\cosh}\cdot 2e^{-ik(l-s)} =$$

$$= 2e^{-ikl}e^{i\omega t}\cosh\left(ik(l-s)\right) = \underbrace{2\cos(kl)}_{\substack{\text{const.} \\ \approx 1}}\cos(\omega t)\cos\left(k(l-s)\right)$$

per $kl \ll 1$, singola cella

Ridefinendo la variabile di propagazione per le SW, possiamo scrivere in generale:

$$\epsilon_{z}^{SW} \simeq \epsilon_{z,0}^{SW}\cos(\omega t)\cos(ks)$$

La dinamica della particella generica riferita alla particella sincrona e il campo può essere parametrizzata come:

$$t = t_s + \Delta t \underset{\beta \to 1}{\simeq} t_s + \frac{z}{c}$$

In tal caso:

$$\epsilon_z^{TW} = \epsilon_{z,0}^{TW}\cos\big(\overbrace{\omega t - ks + \phi_0}^{\varphi_{RF}^{TW}} + kz\big) \equiv \epsilon_{z,0}^{TW}\cos\left(\varphi_{RF}^{TW} + kz\right)$$

$$\epsilon_z^{SW} = \epsilon_{z,0}^{SW}\cos\big(\underbrace{\omega t + \phi_0}_{\varphi_{RF}^{SW}} + kz\big)\underbrace{\cos(ks)}_{\substack{\approx 1\ ks \ll 1, \\ \text{singola cella}}} \simeq \epsilon_{z,0}^{SW}\cos\left(\varphi_{RF}^{SW} + kz\right)$$

TEMPO DI TRANSITO

Calcoliamo il guadagno di energia di una particella generica che attraversa una struttura RF in modalità SW: la singola cella è lunga $[-\delta/2, \delta/2]$. Il guadagno totale sarà la somma dei guadagni nelle singole celle (SINCRONISMO).

$$\Delta\epsilon^{SW}(g,z) = q\int_{-g/2}^{g/2}\epsilon_z^{SW}ds = q\,\epsilon_{z,0}^{SW}\int_{-g/2} ds\,\cos(\omega t + kz + \phi_0)\cos(ks) \approx$$

≈ 1 se supponiamo che $k\Delta s = kg \ll 1$, cioè l'ampiezza di ϵ_z ad un certo t, lungo la cella, è $\approx$ cost.

$$\approx q\,\epsilon_{z,0}^{SW}\int_{-g/2}^{g/2} ds\left[\cos(\omega t)\cos(kz+\phi_0) - \sin(\omega t)\sin(kz+\phi_0)\right] =$$

$$= q\,\epsilon_{z,0}^{SW}\int_{-g/2}^{g/2} ds\left[\cos\left(\frac{\omega s}{\beta_z c}\right)\cos(kz+\phi_0) - \sin\left(\frac{\omega s}{\beta_z c}\right)\sin(kz+\phi_0)\right] =$$

$$\int_{-g/2}^{g/2}\sin(\ )ds = 0$$

$$= q\,\epsilon_{z,0}^{SW}\frac{1}{\left(\frac{\omega}{\beta_z c}\right)}\sin\left(\frac{\omega s}{\beta_z c}\right)\Bigg|_{-g/2}^{g/2}\cos(kz+\phi_0) =$$

$$= q\,\epsilon_{z,0}^{SW}\, g\cdot\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{<1}\cdot\cos(kz+\phi_0) = ,\quad x := \frac{\omega g}{2\beta_z c}$$

$$\boxed{\equiv q\,\Delta V_0^{SW}(g)\,T_{tr}\cos(kz+\varphi_{RF})}$$

T_{tr} tiene conto del fatto che le cariche attraversano la cella in un tempo finito $\Delta t = \frac{g}{\beta_z c}$, nel quale l'ampiezza di $\epsilon_z(t)$ cambia (si riduce) rispetto al valore nominale atteso. Tipicamente $T_{tr}\in[0.85, 0.95]$.

$$\Delta\epsilon^{TW}(g,z) = q\int_{-g/2}^{g/2}\epsilon_z^{TW}ds = q\,\epsilon_{z,0}^{TW}\int_{-g/2}^{g/2}ds\,\cos(\underbrace{\omega t - ks + \phi_0}_{\to\,\phi_0 \text{ per } \beta_z\to 1} + kz) \simeq$$

$$\boxed{\simeq q\,\epsilon_{z,0}^{TW}\, g\cos(kz+\varphi_{RF})}$$

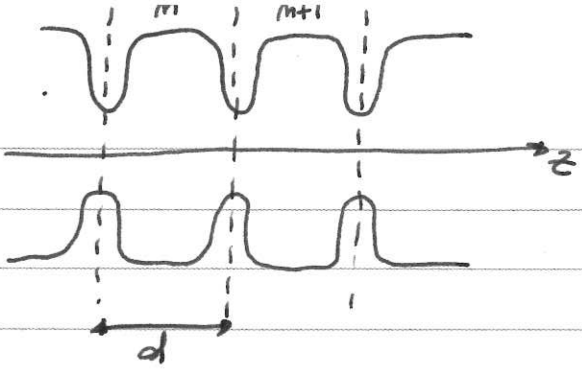
Nel caso di una TW, il sincronismo tra carica e campo accelerante è garantito $\forall s$, $\forall t$ nella cella, dal fatto che il campo è associato ad un'onda che VIAGGIA insieme con la particella, cioè $\boxed{v_{ph} = v_z}$.
Questo SINCRONISMO impone anche (per $z = 0$):

$$\omega t_m \underbrace{-\, ks_m + \phi_0}_{\phi_m} = \omega t_{m+1}\underbrace{-\,ks_{m+1} + \phi_0}_{\phi_{m+1}} = \omega\left(t_m + \frac{d}{\beta_z c}\right) + \phi_{m+1}$$

$$\Rightarrow\quad \Delta\phi_m = 2\pi\frac{d}{\beta_z\lambda_{RF}}$$, AVANZAMENTO di FASE del CAMPO PER CELLA.

$\beta_z\to 1$, $\frac{d}{\lambda_{RF}}\in\mathbb{Q}$

ex. $\Delta\phi_m = \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{4}\pi$, ecc.



La scelta* geometrica $\frac{d}{\lambda_{RF}} \in \mathbb{Q}$ garantisce che la particella sia soggetta alla STESSA FASE del E_z al passaggio in ogni cella.
In altre parole, quando la particella è nella cella (n) e vede una fase ϕ_n, la fase del campo nella cella (n+1) (nello stesso istante) è ϕ_{n+1}. Al momento in cui la particella arriverà alla cella (n+1), la fase del campo sarà nuovamente $\phi_{n+1} + \Delta\phi_n = \phi_n$.

EXCURSUS sulla VELOCITÀ di FASE e di GRUPPO di un'ONDA.

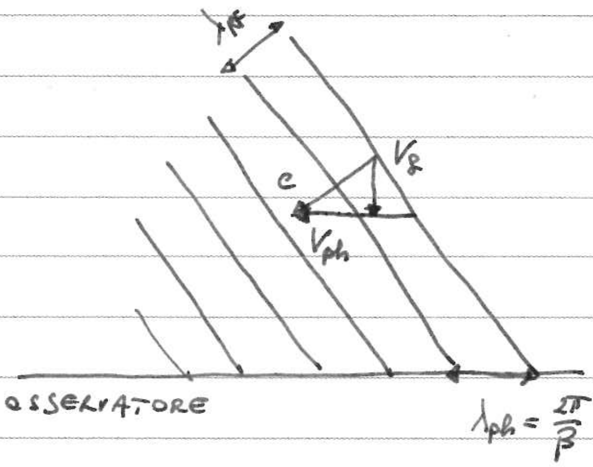
$k := \frac{\omega}{c}$, VETTORE D'ONDA

$v_{ph} := \frac{\omega}{\beta}$ $(\gtrless c)$

$v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$ $(\leq c)$

$\beta^2 = |k^2 - k_c^2|$, COSTANTE DI PROPAGAZIONE

ω_c di CUTOFF, dipende dalla geometria della struttura



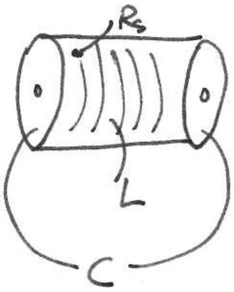
c = velocità di propagazione dell'onda e.m. nel vuoto

v_g = velocità di propagazione dell'ENERGIA associata all'onda e.m.

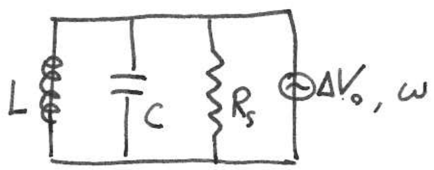
v_{ph} = velocità di trasporto del FRONTE D'ONDA verso l'osservatore.

In strutture risonanti (TW), $v_{ph} \leq c$ per costruzione e dipende dalla dimensione delle IRIDI della cella.

CAVITÀ ACCELERANTI RISONANTI ~ CIRCUITO RLC a "costanti concentrate"



~



$$U_0 = \frac{1}{2} C \Delta V_0^2$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ frequenza di RISONANZA, alla quale si ha la massima trasmissione di energia agli elementi REATTIVI (L, C)

RESISTENZA DI SHUNT:

$$\boxed{R_s := \frac{\Delta V_0^2}{\bar{P}_d}}$$

← ΔV_0: potenziale accelerante di picco

← $\bar{P}_d$: potenza media dissipata (in un periodo RF) negli elementi RESISTIVI

FATTORE DI MERITO:

$$\boxed{Q := \frac{U_0 \omega}{\bar{P}_d}} = \frac{\text{energia accumulata in } T_{RF}}{\text{potenza media dissipata}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{1}{2} C \Delta V_0^2 \frac{R_s}{\Delta V_0^2} = \frac{R_s}{2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

impedenza RESISTIVA (R_s)

impedenza REATTIVA ($2\sqrt{\frac{L}{C}}$)

Definiamo le variabili introdotte sopra PER UNITÀ DI LUNGHEZZA della cavità: $u := \frac{dU_0}{dz}$, $\frac{d\bar{P}_d}{dz}$, $r_s = \frac{R_s}{l}$

$$\Rightarrow \quad Q = \frac{\omega u}{\frac{d\bar{P}_d}{dz}}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V_0 = \sqrt{\bar{P}_d r_s l}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E}_{z,0}^2 \simeq \left(\frac{\Delta V_0}{l}\right)^2 = \frac{\bar{P}_d r_s l}{l^2} \simeq r_s \frac{d\bar{P}_d}{dz}$$

L'EFFICACIA di ACCELERAZIONE è espressa come il rapporto tra il campo accelerante (GRADIENTE) e la quantità di energia immessa nella cavità, per unità di lunghezza:

$$\boxed{\frac{r_s}{Q}} = \frac{\mathcal{E}_{z,0}^2}{\frac{d\bar{P}_d}{dz}} \frac{\frac{d\bar{P}_d}{dz}}{\omega u} = \boxed{\frac{\mathcal{E}_{z,0}^2}{\omega u}}$$

La variazione di energia immessa nel tempo dipende dalla P_d nella cavità:

$$P_d = -\frac{dU}{dt} = \frac{\omega U}{Q} \quad \Rightarrow \quad U(t) = U(t=0)\, e^{-\frac{\omega}{Q} t}$$

$$t_f := \frac{Q}{\omega}$$, TEMPO DI RIEMPIMENTO

Significato di Q :

- Q grande vuol dire che l'energia U_0 immessa in cavità viene dissipata negli elementi resistivi dopo un tempo + lungo. Quindi Q è il numero di cicli RF dopo il quale $U \to U_0/e$.
- Q grande implica che il campo accelerante associato ad U_0 RISUONI nella cavità per tempi lunghi ($Q \approx 10^3 \div 10^4$ in NC ÷ SC linacs).

Significato di R_s :

- R_s grande vuol dire che è possibile generare un ΔV_0 grande a parità di potenza dissipata P_d

$\Downarrow$

r_s/Q grande implica un gradiente accelerante grande a parità di energia immessa.

Il modello RLC trattato finora si applica ad una cavità in cui l'energia immessa in cavità genera un'onda e.m. accelerante che PERMANE nella struttura $\Rightarrow$ SW.

Nel caso di TW, $P_d \to -P$, potenza viaggiante nella struttura, t.c.:

$$\boxed{P = \frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dz}\frac{dz}{dt} = u \cdot v_g}$$

$\frac{dz}{dt}$: velocità di propagazione dell'energia

In tal caso, il TEMPO di RIEMPIMENTO t_f è il tempo impiegato dall'impulso di energia U ad attraversare la struttura

$$\boxed{t_f := \frac{\ell}{v_g}}$$

In generale, v_g viene definita dalla GEOMETRIA delle IRIDI, $v_g \propto \left(\frac{a}{b}\right)^4 c \approx 0.1 \div 0.01\,c$

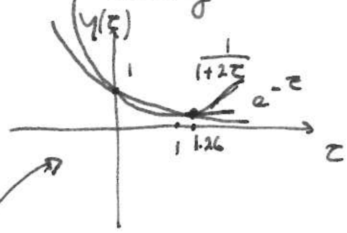
TW - IMPEDENZA COSTANTE (la geometria delle celle è IDENTICA per tutte le celle)

$$\begin{cases} Q = -\dfrac{\omega u}{\frac{dP}{dz}} \\ P = u v_g \end{cases} \Rightarrow \frac{dP}{dz} = -\frac{\omega}{Q}\frac{P}{v_g} \Rightarrow P(\xi) = P_0\, e^{-\frac{\omega}{Q v_g}\xi}$$

$$\begin{cases} \dfrac{r_s}{Q} = \dfrac{\mathcal{E}_z^2}{\omega u} \\ P = u v_g \end{cases} \Rightarrow \mathcal{E}_z^2 = \frac{\omega r_s}{Q v_g} P \Rightarrow \mathcal{E}_z^2(\xi) = \frac{\omega r_s}{Q v_g} P_0\, e^{-\frac{\omega}{Q v_g}\xi}$$

Definiamo il FATTORE DI ATTENUAZIONE (del campo accelerante) TOTALE :

$$\tau := \frac{\omega l}{2 Q v_g} \quad [\text{NEPER}] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} E_z(s) &= \sqrt{2\tau \frac{P_0 r_s}{l}}\; e^{-\tau \frac{s}{l}} \\ \Delta V_0 &= -\underbrace{T_{tr}}_{\approx 1} \int_0^l E_z(s)\,ds = \sqrt{2\tau P_0 r_s l}\left(\frac{1-e^{-\tau}}{\tau}\right) \end{aligned}}$$



Il max. guadagno di energia è dato da $\frac{d\Delta V_0}{d\tau} \equiv 0$, cioè

$$\tau = \frac{1}{2}\left(e^{\tau}-1\right) \Rightarrow \tilde{\tau} = 1.26. \Rightarrow \Delta \hat{V}_0(\tilde{\tau}) \cong 0.9\sqrt{P_0 r_s l}.$$

N.B.: nella realizzazione pratica di TW-CI, è sufficiente garantire $\tau \gtrsim 0.8$ per massimizzare ΔV_0 senza dover diminuire oltremodo v_g, quindi evitando $t_f = \frac{l}{v_g} = 2\tau\frac{Q}{\omega}$ eccessivamente lunghi.

TW - GRADIENTE COSTANTE

Si impone $E_z^2(s) = -r_s \frac{dP}{ds} \equiv \text{const.} \Rightarrow P(l) = P_0 + Cl;$

$$P(s) = P_0 + Cs = P_0 + \left(\frac{P_l - P_0}{l}\right)s;$$

Definiamo (x analogia col caso TW-CI): $P_l = P_0 e^{-2\tau}$

$$\Rightarrow P(s) = P_0 + \left[P_0 e^{-2\tau} - P_0\right]\frac{s}{l} = P_0\left[1 - \left(1-e^{-2\tau}\right)\frac{s}{l}\right];$$

$$\Rightarrow v_g(s) = \frac{P(s)}{u} = P(s)\frac{\omega}{Q\frac{dP}{ds}} = \frac{\omega l}{Q}\,\frac{P_0\left[1-\left(1-e^{-2\tau}\right)\frac{s}{l}\right]}{P_0\left(1-e^{-2\tau}\right)} =$$

$$= \frac{\omega l}{Q}\left[\left(\frac{1}{1-e^{-2\tau}}\right) - \frac{s}{l}\right];$$

le IRIDI si restringono lungo la cavità per modificare $v_g(s)$. Al decrescere di $P(s)$, $v_g(s)$ diminuisce per mantenere $E_z = \text{const.}$

$$\boxed{E_z(s)} = \sqrt{r_s\frac{dP}{ds}} = \sqrt{\frac{\omega r_s}{Q v_g}P(s)} = \left\{\frac{\omega r_s}{Q}\,\frac{P_0\left[1-\left(1-e^{-2\tau}\right)\frac{s}{l}\right]}{\frac{\omega l}{Q}\frac{\left[1-\left(1-e^{-2\tau}\right)\frac{s}{l}\right]}{\left(1-e^{-2\tau}\right)}}\right\}^{1/2} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\left(1-e^{-2\tau}\right)\frac{P_0 r_s}{l}} = \text{const}} \quad (\text{CVD})$$

$$\boxed{|\Delta V_0| \simeq E_{z,0}\,\ell = \sqrt{(1-e^{-2\tau})\, P_0 r_s\, \ell}}$$

Per il tempo di riempimento :

$$t_f = \frac{\ell}{v_g} \longrightarrow \int_0^\ell \frac{ds}{v_g(s)} = \cancel{\frac{Q}{\omega}\frac{2(1-e^{-2\tau})}{(1+e^{-2\tau})}} = 2\tau\frac{Q}{\omega}$$

, come già nella TW-CI.

ESERCIZIO :

dimostrare che : $\Delta V_0^{SW}(\ell) \geq \Delta V_0^{CG}(\ell) \geq \Delta V_0^{CI}(\ell)$

fattore $\frac{1}{\sqrt{(1-e^{-2\tau})}}$ fattore $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\tau(1-e^{-2\tau})}{(1-e^{-\tau})^2}}$ ($\to 1$ per $\tau \to 0$)

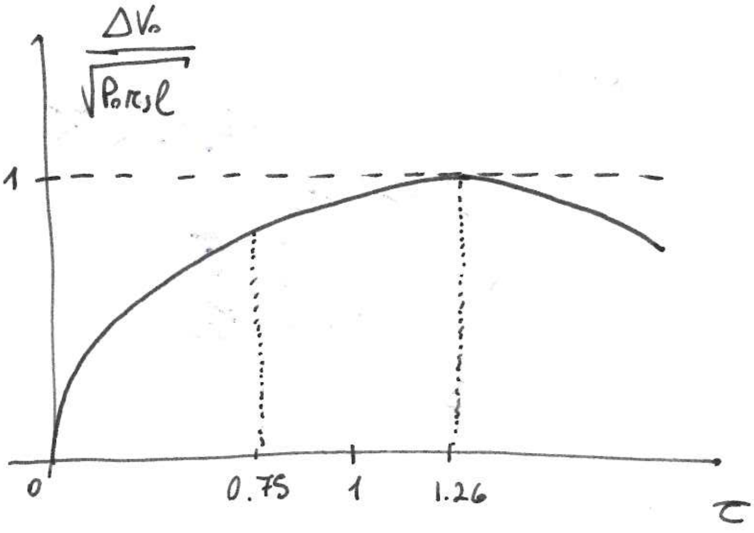
e che : $E_{z,0}^{SW} \geq E_{z,0}^{CI} \geq E_{z,0}^{CG}$

fattore $\frac{1}{\sqrt{2\tau}}$ fattore $\sqrt{\frac{2\tau}{1-e^{-2\tau}}}$

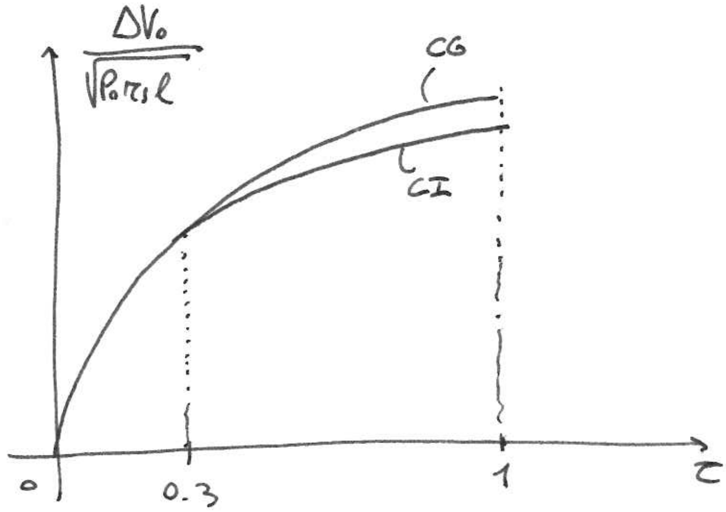
NOTE GENERALI.

1) SW fornisce una maggiore efficienza di accelerazione $\left(\frac{r_s}{Q}\right)$, ma a scapito di t_f tipicamente più lungo che in TW.
2) TW-CI fornisce un maggiore E_z della TW-CG, ma a scapito di un più alto campo di picco sulla superficie delle iridi $\Rightarrow$ aumenta la probabilità di scariche/archi all'interno della struttura.
   TW-CI è avvantaggiata dalla facilità di fabbricazione (tutte le celle sono identiche).
3) TW-CG fornisce un maggiore $\Delta V_0(\ell)$ della TW-CI con un minore campo di picco nella struttura. È svantaggiata dalla complicazione di una fabbricazione e celle tutte diverse.

TW - CI



TW - CG vs. TW - CI :



TEOREMA DELL'ACCELERAZIONE

1) L'introduzione di IRIDI nella struttura RF permettono di introdurre una componente E_z del campo elettrico ($\sim$ GUIDA D'ONDA) $\Rightarrow$ ACCELERAZIONE

2) È possibile ACCELERARE (= GUADAGNO di ENERGIA) una particella carica nel VUOTO ?

↳ un'onda e-m nel vuoto, in assenza di condizioni al contorno, interagisce con la particella q tramite interazione q-fotone (FAR FIELD) $\Leftrightarrow$ accelerazione implica assorbimento continuo dei fotoni senza successiva ri-emissione.

Paradosso : q in quiete, $m = m_0$; fotone assorbito, p_γ, ε_γ

$$\left.\begin{array}{l} m_0^2 = (m_0 + \varepsilon_\gamma)^2 - p_\gamma^2 \ ; \quad (c=1) \\ p_\gamma^2 = \varepsilon_\gamma^2 + 2 m_0 \varepsilon_\gamma \end{array}\right.$$

MA, per un fotone $p_\gamma = \varepsilon_\gamma$ cosicché la precedente vale $\Leftrightarrow \varepsilon_\gamma = 0$

$\Rightarrow$ l'accelerazione contraddice la CONSERVAZIONE del MOMENTO ed ENERGIA