

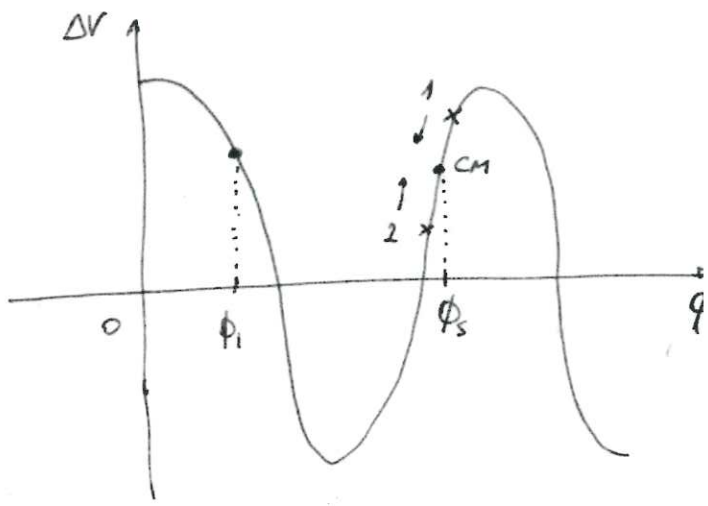


### DINAMICA LONGITUDINALE IN UN LINAC.

#### STABILITA' DI FASE.

Il concetto di stabilità di fase in un LINAC si applica all'accelerazione di particelle non-relativistiche, per le quali un aumento di energia corrisponde ad un aumento della velocità ( $< c$ ) e viceversa. In tal caso, la FASE di INIEZIONE in un LINAC determina la STABILITA' (o instabilità) del fascio di particelle nel piano longitudinale.

- le particelle 1 arriva DOPO il CM, guadagna + energia, assume + velocità e arrivano con ANTICIPO nel prossimo periodo di accelerazione.
- le particelle 2 arriva PRIMA del CM, guadagna - energia, assume - velocità e arrivano con RITARDO nel prossimo periodo di accelerazione.



⇒ l'iniezione in contà con questa  $\phi_s$  (perdita positive  $\frac{\Delta V}{\Delta \phi}$ ) garantisce un moto stabile delle particelle distribuite con  $\Delta \phi$  intorno alle particelle di riferimento (tipicamente, il centro di massa).  
 Viceversa, l'iniezione in  $\phi = \phi_1$  determina un allontanamento delle particelle dalla condizione stabile (perdita del fascio).

In formule, definiamo le COORDINATE RIDOTTE:

$$\begin{cases} \Delta t = t - t_s & \text{(tempo di arrivo)} \\ \varphi = \phi - \phi_s = \omega \Delta t & \text{(fase RF)} \\ W = W - W_s & \text{(energia)} \end{cases}$$



$$\left[ \frac{d\varphi}{ds} \right] = \omega \frac{d}{ds} (t - t_s) = \omega \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{v_s} \right) \approx -\omega \frac{(v - v_s)}{v_s^2};$$

$$w = \frac{1}{2} m_0 (v^2 - v_s^2) = \frac{1}{2} m_0 (v + v_s)(v - v_s) \approx m_0 v_s (v - v_s);$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{ds} \approx -\frac{\omega}{v_s^2} \frac{w}{m_0 v_s} = -\frac{\omega_{RF}}{m_0 v_s^2} w$$

$$\left[ \frac{dw}{ds} \right] = \frac{d}{ds} (\Delta E - \Delta E_s) = -\frac{d}{ds} q E_{z0} \left[ \int_0^s ds' \cos \phi - \int_0^s ds' \cos \phi_s \right] =$$

$$= -q E_{z0} [\cos(\phi_s + \varphi) - \cos \phi_s] \approx -q E_{z0} \Delta \cos \phi_s \approx -q E_{z0} \sin \phi_s \cdot \varphi;$$

In conclusione:

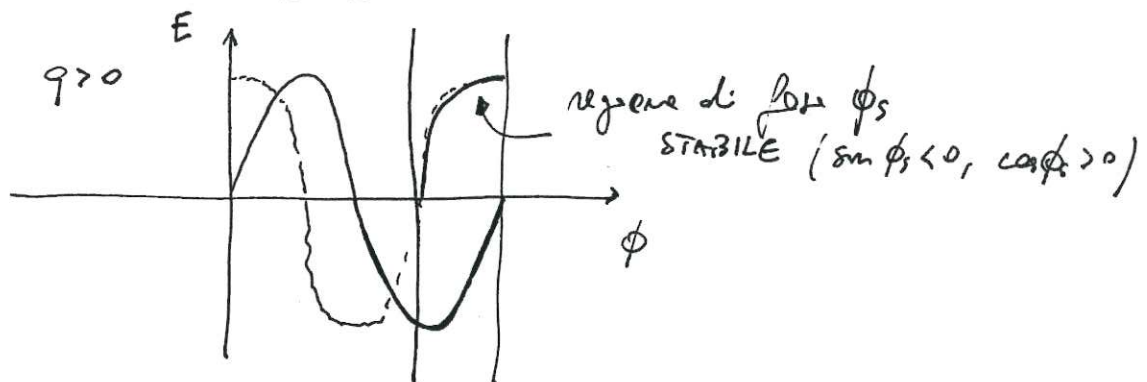
$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{ds} \approx -\frac{\omega_{RF}}{m_0 v_s^2} w \\ \frac{dw}{ds} \approx -q E_{z0} \sin \phi_s \cdot \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 \varphi}{ds^2} \approx -\frac{\omega_{RF}}{m_0 v_s^2} \frac{dw}{ds} = + \frac{q E_{z0} \sin \phi_s \omega_{RF}}{m_0 v_s^2} \varphi \\ \frac{d^2 w}{ds^2} \approx -q E_{z0} \sin \phi_s \frac{d\varphi}{ds} = + \frac{q E_{z0} \sin \phi_s \omega_{RF}}{m_0 v_s^2} w \end{cases}$$

Il moto è di oscillatore armonico nel

caso in cui  $\Omega_s^2(s) > 0$ , quindi:

$$\boxed{\Omega_s^2(s) = -\frac{q E_{z0} \sin \phi_s \omega_{RF}}{m_0 v_s^2}}$$

$> 0 \Leftrightarrow q \sin \phi_s < 0$ . Allo stesso tempo la accelerazione longitudinale  $q \cos \phi > 0$  (assumendo  $E_{z0} > 0$ ). La STABILITÀ DI FASE in REGIME NON-RELATIVISTICO E in APPROSSIMAZIONE di PICCOLE AZIEME di OSCILLAZIONE ( $\phi \approx \phi_s, v \approx v_s$ ) viene dunque:



$-\Omega_s^2(s)$   
FREQ. ANGOLARE di OSCILLAZIONE  
LONGITUDINALE

NOTA 1:  $\Omega_S(s)$  è stato definito come frequenza angolare in  $\frac{\omega}{ds^2}$ . In passato ed un effettivo PERIODO di OSCILLAZIONE  $\Omega_S(t) = v_S^2 \Omega_S^2(s)$ : (14)

$$\left\| \Omega_S^2(t) = \left( \frac{2\pi}{T_S} \right)^2 = - \frac{q E_{z0} \sin \phi_S \omega_{rf}}{P_S} \right\|$$

NOTA 2: in regime ULTRA-RELATIVISTICO  $v \approx v_S \rightarrow c$ , quindi:

$$\frac{d\varphi}{ds} \propto (v - v_S) \rightarrow (c - c) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dw}{ds^2} \propto \frac{d\varphi}{ds} \rightarrow 0$$

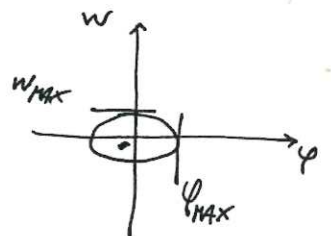
$\Rightarrow$  il moto oscillatorio in FASE si CONGELA

$\Rightarrow$  lo spread di energia nel pacchetto di particelle sarà determinato dal valore di  $\phi_S$ , e rimane costante nel tempo

$$\hookrightarrow \frac{\Delta E}{E_S} \sim \frac{w}{E_S} \sim \frac{1}{f(s)} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Di fatto } \Omega_S \text{ è ridotta e molto} \\ \text{piccola, le oscillazioni rallentano} \\ \text{con } \sim 1/f(s). \end{array} \right.$$

DAMPING ADIABATICO delle OSCILLAZIONI LONGITUDINALI:

$$\frac{dw}{ds} = -q E_{z0} \sin \phi_S \cdot \varphi \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} ds = - \frac{dw}{q E_{z0} \sin \phi_S \cdot \varphi} \\ \varphi d\varphi = + \frac{\omega_{rf}}{m_0 v_S^3} \frac{1}{q E_{z0} \sin \phi_S} w dw \end{array} \right.$$



integrando tra  $[0, \varphi_{max}]$  e  $[0, w_{max}]$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{max}^2 - q w_{max}^2 = \text{cte} \\ \varphi_{max} w_{max} = \text{cte} \end{array} \right. \Rightarrow \text{AREA dell'ELLISSE nella p-zeta fase } (\varphi, w)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{max} \propto \alpha^{1/4} \\ w_{max} \propto \alpha^{-1/4} \end{array} \right.$$

cioè all'aumentare di  $E_S(s)$ , lo allargamento del pacchetto DIMINUISCE, mentre il suo spread in energia AUMENTA.

In particolare:  $\frac{w_{max}}{W_S} \sim \frac{1}{v_S^{1/4}}$  in regime NON (o debolmente) RELATIVISTICO.



## CATTURA ELETTRONICA.

Consideriamo il passaggio di particelle "leggere" come gli elettroni, dal regime NON RELATIV., a quello RELATIV.:

SORGENTE DI  
ELETTRONI,  
 $\gamma \approx 1$   
(CATODO)

→ CAMPO ACCELERANTE  
in CAVITÀ RISONANTE,  
 $v_{ph} \approx c$   
(GUN)

Poiché  $v_{ph} \approx c$  ma  $v_e < c$ , l'onda accelerante tende a "slittare" sugli elettroni (in fase) nell'attraversamento della cavità (SLIPPAGE). La condizione di CATTURA degli elettroni da parte del campo accelerante richiede che il GUADAGNO di ENERGIA nel PERIODO DI SLIPPAGE sia almeno pari o maggiore dell'ENERGIA INIZIALE del fascio ( $\gamma_0 m_0 c^2$ ):

- la distanza di SLIPPAGE nell'unità di fase è:

$$\frac{dl}{d\phi} \approx \frac{(c - v_0) dt}{d\phi} = \frac{c(1 - \beta_0) dt}{d\phi} = \frac{c}{\omega} (1 - \beta_0) =$$
$$\approx \frac{v_{ph}}{\omega} (1 - \beta_0) = \frac{\lambda}{2\pi} (1 - \beta_0);$$

- il guadagno di energia durante lo slippage è dell'ordine di:

$$\Delta V(dl) \approx q E_{z,0} \frac{dl}{d\phi} = q E_{z,0} \lambda \frac{(1 - \beta_0)}{2\pi};$$

Quindi si richiede un campo accelerante SUPERIORE a:

$$E_{z,0} \gtrsim \frac{2\pi m_0 c^2}{q \lambda} \left( \frac{\gamma_0}{1 - \beta_0} \right).$$

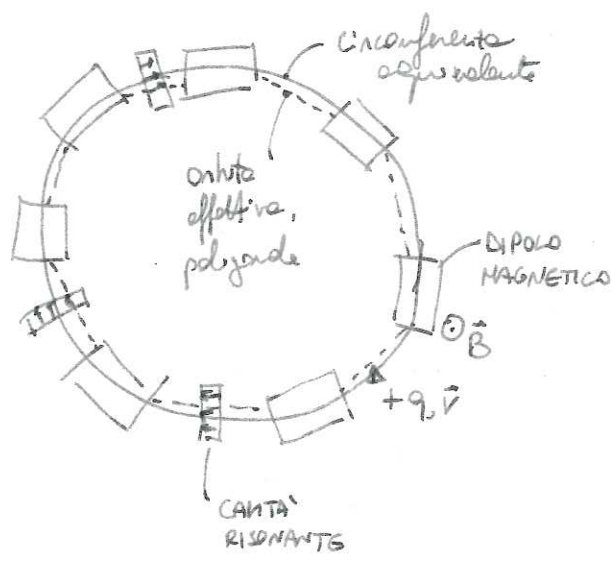


DINAMICA LONGITUDINALE IN UN ANELLO.

Abbiamo già discusso come l'evoluzione di corpi accelerati. non-rotazione  
 parti alla progettazione di acceleratori laser e RF (strutture risonanti)  
 e dell'aspetto di accelerazione in orbite chiuse (ciclotrone, betatrone).  
 I limiti evidenziati dal ciclotrone (orbite sproporzionate) e del betatrone  
 (orbite chiuse) riguardano sostanzialmente la dipendenza delle massime  
 energie raggiungibili, per un dato  $\vec{B}$ , dalle dimensioni volumetriche del  
 corpo "in feno". Le proprietà peculiari del betatrone e del  
 ciclotrone e sebbene suggeriscano inoltre una "specializzazione" degli  
 elementi ACCELERANTI da quelli FOCHEGGIANTI nei protoni terrestri.  
 Infine, la SINCRONICITA' adottata nel sincro-ciclotrone consente  
 l'aumento graduale di energia del fascio mantenendo costante  
 l'escursione laterale dell'orbita.

SINCROTRONE :

- x ORBITA CHIUSA
- x ELEMENTI a FUNZIONI SEPARATE
- x SINCRONICITA'



$$pc = \beta E \rightarrow E$$

$$p = eBR \leftarrow \text{eccipite moto } \parallel \text{ e } \perp$$

$$L_{tot} \equiv C \equiv 2\pi R_s \leftarrow$$

orbita delle  
particelle  
SINCRONA

$$\omega_{RF} = h\omega_s$$

# MOMENTUM COMPACTION

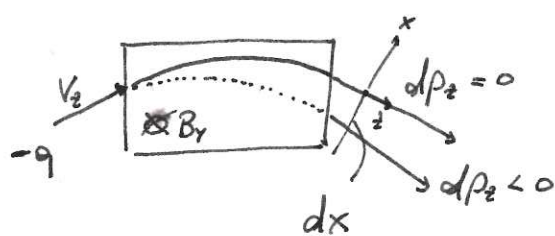
$$p_z = e B_y R \Rightarrow \text{se } B_y = \text{const.}, \quad \frac{dp_z}{p_z} = \frac{dR}{R}$$

In un SINCROTRONE, l'orbita può essere mantenuta chiusa all'aumentare di E (RAMPA) aumentando \$B\_y(t)\$. In tal caso:

$$\frac{dp_z}{p_z} = \frac{dR}{R} + \frac{dB_y}{B_y} = \frac{dR}{R} \left( 1 + \frac{R}{B_y} \frac{dB_y}{dR} \right) \equiv \frac{1}{\eta_c} \frac{dR}{R}$$

Cioè:  $\eta_c := \frac{dR/R_s}{dp_z/p_{z0}}$  ( $\approx 10^{-5} \div 10^{-3}$ ), è una proprietà della maglia magnetica (LATTICE).

Calcoliamo  $\eta_c$  per un lattice ISOMAGNETICO ( $R = R_s$  in tutti i dIPOLI):



$$D_x(s) := \frac{dx(s)}{dp_z/p_{z0}} \quad \text{FUNZIONE DI DISPERSIONE IN ENERGIA (MOMENTO LONG.)}$$

Notiamo che se  $p_{z0}(t) = \text{const.} \Rightarrow B_y(t) = \text{const.}$ ,

obteniamo:  $D_x \approx \frac{dx}{dp_z} \approx \frac{dR}{dp_z} \sim \frac{1}{B_y}$ ,

cioè  $D_x$  dipende solo dal LATTICE.

Calcoliamo la differenza (piccola) dei raggi di curvatura delle 2 parti: celle ed merge different:

$$\begin{aligned} dR &\equiv \frac{C_1 - C_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[ \oint ds_1 - \oint ds_2 \right] = \frac{1}{2\pi} \oint d\theta [(R_1 + x) - R_s] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint x d\theta = \langle x \rangle_\theta ; \end{aligned}$$

$$\boxed{\eta_c} = \frac{dR/R_s}{dp_z/p_{z0}} = \frac{1}{R_s} \frac{\langle x \rangle_\theta}{dp_z/p_{z0}} \stackrel{\text{def.}}{\stackrel{\text{generale}}{=}} \boxed{\frac{1}{C_s} \oint ds \frac{D_x(s)}{R(s)}}$$

# ENERGIA DI TRANSIZIONE

All'aumentare di  $E(t)$ , il sincronismo tra particella e campo eccitante viene mantenuto variando  $\omega_{rf}$ , al variare di  $\omega_s$ . Definiamo:

$$\eta := \frac{d\omega/\omega_s}{dp_z/p_{z0}}, \quad \omega_s = \frac{\beta_{z0} c}{R_s} \quad (\text{freq. angolare di rivoluzione delle particelle sinuose})$$

$$\frac{d\omega}{\omega_s} = \frac{d\beta_z}{\beta_{z0}} - \frac{dR}{R_s} = \frac{d\beta_z}{\beta_{z0}} \frac{dp_z}{p_z} - \frac{dp_z}{p_z} \eta_c = \frac{dp_z}{p_z} \left[ \left( \frac{d\beta_z}{\beta_z} \right) \frac{p}{\beta} - \eta_c \right] = \dots$$

$$p_z = \beta_z \gamma m_0 c = \frac{\beta_z}{\sqrt{1-\beta_z^2}} m_0 c ; \quad \frac{dp_z}{d\beta_z} = \frac{\sqrt{1-\beta_z^2} + \beta_z^2 / \sqrt{1-\beta_z^2}}{(1-\beta_z^2)^{3/2}} m_0 c = \frac{m_0 c}{1-\beta_z^2} \cdot \frac{1-\beta_z^2 + \beta_z^2}{\sqrt{1-\beta_z^2}} = \gamma^3 m_0 c$$



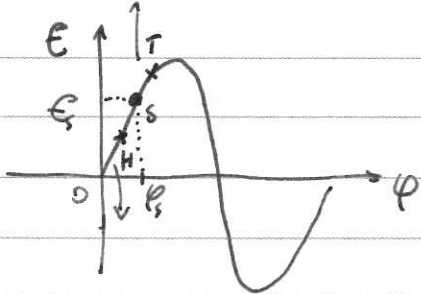
$$\Rightarrow \frac{dW}{W_s} = \frac{dP_z}{P_{z0}} \left[ \frac{1}{\gamma^3 m_0 c} \frac{B_z \gamma m_0 c}{\beta_z} - q_c \right] = \left( \frac{1}{\gamma^2} - q_c \right) \frac{dP_z}{P_{z0}}$$

$$\Rightarrow \left[ \eta = \frac{1}{\gamma^2} - q_c \right] \quad \text{Def.} \quad \left[ \gamma_{tr} := \frac{1}{\sqrt{q_c}} \right] \quad \text{"energia di trazione", che dipende solo dal lattice.}$$

$\gamma \gg 1 \Rightarrow \eta_i \rightarrow -q_c$  (ultra-relativistica)

Per energie talo che  $\gamma = \gamma_{tr}$  cioè  $\eta = 0$  (tipicamente in sincrotroni di PROTONI, perché gli ELETTRONI vengono iniettati ad energie  $\gamma > \gamma_{tr}$ ), il moto LONGITUDINALE delle particelle diventa INSTABILE. La situazione è aggravata dalla presenza di instabilità legate alla "curva spaziale".

In termini intuitivi, vedono l'oscillazione longitudinale di sincrotrone tende a zero ( $\Omega_s \rightarrow 0$ ), cioè le particelle percorrono un'orbita sempre allo stesso PERIODO, più o meno di  $P_z$ . In tal caso:



dato una fase di iniezione STABILE  $\phi_s$ , perché il moto di sincrotrone è costante, la testa del fascio (H) guadagnerà sempre meno energia della particella sincrona (S), e la coda (T) sempre PIU' energia. Lo spread in energia non è più in equilibrio, ma tenderà a CRESCERE indefinitamente nel tempo, almeno fin tanto che  $\gamma = \gamma_{tr}$ . Uno spread di energie elevato può portare ad una eccedenza di particelle oltre la ACCETTAZZA DI ENERGIA del PACCHETTO (vedi a seguire).

OSCILLAZIONI di SINCROTRONE

$$\left. \begin{aligned} E_z &= E_{z0} \sin \phi \\ (\Delta E)_{turn} &= e V_0 \sin \phi \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \omega_{RF} \equiv h \omega_s = \frac{h}{h} \frac{d\theta}{dt} \\ h &\in \mathbb{N} (\gg 1), \text{ NUMERO ARMONICO} \end{aligned}$$

Def. la fase relativa rispetto alle particelle SINCRONA; fase relative  $\leq 0$  convergono verso e particelle da sinistra in anticipo sulla sincrona ad una certa  $s = \bar{s}$ :

$$\varphi := \phi - \phi_s \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = -h \frac{d(\theta - \theta_s)}{dt} = -h \Delta W$$

Dalla def. di  $\eta = \frac{dw/\omega_s}{dp/p_s}$ , otteniamo per sostituzioni:  $\frac{d\phi}{dt} = -h\eta\omega_s \frac{\Delta p}{p_s}$ .

Osserviamo che  $\Delta p_z \approx \Delta p = \frac{\Delta E}{\beta_s c} \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = -h\eta\omega_s \frac{1}{p_s} \frac{\Delta E}{\beta_s c} = -\frac{h\eta \Delta E}{R_s p_s}$ .

$$\left[ \begin{aligned} p &= \beta \gamma m_0 c = \gamma \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} m_0 c = \sqrt{\gamma^2 - 1} m_0 c; \\ dp &= \frac{dp}{d\gamma} d\gamma = m_0 c \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} d\gamma = \gamma m_0 c \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{\gamma^2 - 1 + \beta^2}} d\gamma = \frac{m_0 c^2}{\beta c} d\gamma = \frac{dE}{\beta c}. \end{aligned} \right]$$

Si nota che i valori incrementali considerati finora si riferiscono alla differenza delle quantità di una particella generica della particella sincrona. Tuttavia, essi sono formalmente identici alla variazione delle quantità della particella sincrona qualora soggetta ad una PERTURBAZIONE (ad es., variazione di energia).

Def.  $w := \frac{2\pi \Delta E}{\omega_s} \Rightarrow \left( \frac{dw}{dt} \right)_{turn} \approx \frac{1}{T_s} \Delta(\Delta E)_{T_s} = \frac{(\Delta E_\phi - \Delta E_{\phi_s})}{T_s} = qV_0 (\sin\phi - \sin\phi_s)$

$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = -\frac{h\eta\omega_s}{2\pi R_s p_s} w$ , e derivando ancora rispetto a  $t$ :

$$\left[ \frac{d^2\phi}{dt^2} \right] = -\frac{h\eta\omega_s}{2\pi R_s p_s} \frac{dw}{dt} = \left[ -\frac{h\eta\omega_s qV_0}{2\pi R_s p_s} (\sin\phi - \sin\phi_s) \right]$$

il moto lungo della particella generica è garantito essere STABILE se una opportuna scelta della fase  $\phi_s$  per valori  $\phi \approx \phi_s$ , a seconda del segno di  $\eta$  ( $\gamma \geq \gamma_{tr}$ ).

### APPROX. DI PICCOLE OSCILLAZIONI

Se  $\phi \approx \phi_s$  t.c.  $\sin\phi - \sin\phi_s \approx \Delta(\sin\phi_s) \approx \cos\phi_s \cdot \Delta\phi_s = \cos\phi_s \cdot \varphi$

Le precedenti eq. diventano:

$$\left[ \begin{aligned} \ddot{\varphi} + \Omega_s^2 \varphi &= 0 \\ \Omega_s^2 &:= \frac{h\omega_s \eta qV_0 \cos\phi_s}{2\pi R_s p_s} \end{aligned} \right] \leftarrow \begin{array}{l} \text{STABILITÀ} \\ \text{DI FASE} \end{array}$$

Supponiamo  $q > 0$ .  $\left. \begin{array}{l} \gamma < \gamma_{tr} \Rightarrow \eta > 0 \Rightarrow 0 < \phi_s < \frac{\pi}{2} \\ \gamma > \gamma_{tr} \Rightarrow \eta < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \phi_s < \pi \end{array} \right\}$   
(ricorda:  $\sin\phi_s > 0$  per accelerazione)



Se nota che, analogamente per  $w$ , la eq. del moto diventa:

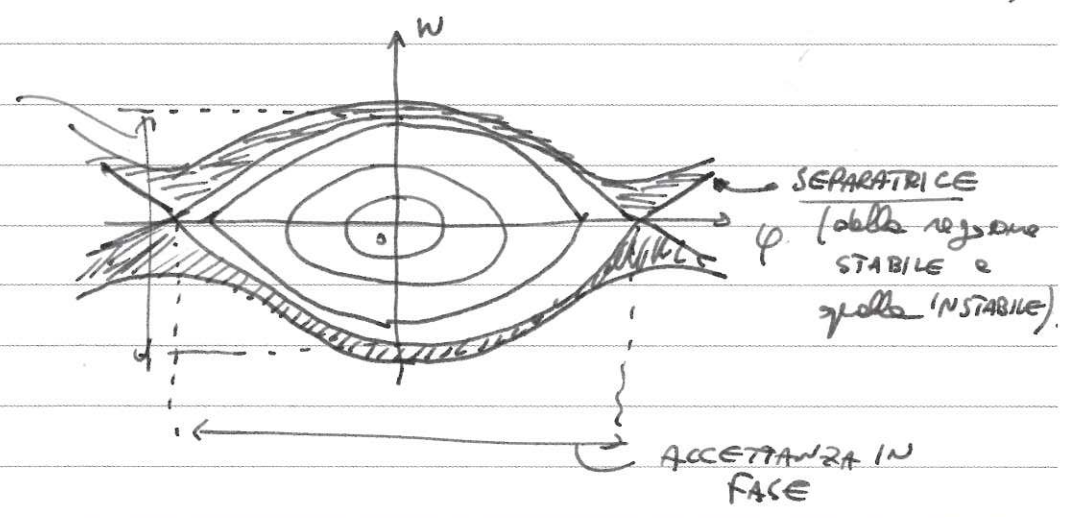
$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{turn} = qV_0 (\sin\phi - \sin\phi_s) \approx qV_0 \cos\phi_s \cdot \phi; \quad \phi \approx \phi_s$$

$$\frac{d^2w}{dt^2} = qV_0 \cos\phi_s \frac{d\phi}{dt} = - \frac{h\eta qV_0 \cos\phi_s}{R_s p_s} \Delta E = - \Omega_s^2 w.$$

Def.  $Q_s := \frac{\Omega_s}{(e/R_s)}$  TUNE DI SINCRONIZIONE (# oscillazioni in  $\phi$  e  $w$  per giro)

Il moto di una particella generica nello spazio delle fasi longitudinale, sufficientemente VICINA alla particella SINCRONA, è di tipo OSCILLATORIO, quindi STABILE.

ACCETTANZA IN ENERGIA



SYNCHROTRON OSCILLATIONS @ LARGE AMPLITUDES

Equation of motion at arbitrarily large oscillation amplitudes:

$$\ddot{\phi} + \frac{h\eta\omega_s q V_0}{2\pi R_s p_s} (\sin\phi - \sin\phi_s) = 0$$

(verify!)

multiply by  $\dot{\phi}$ ,  
then integrate

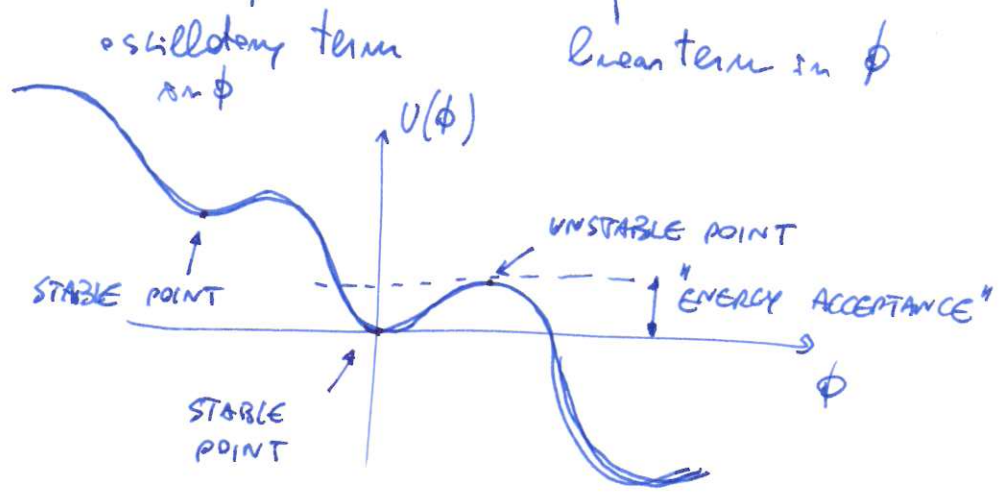
$$\underbrace{\frac{\dot{\phi}^2}{2}}_{\text{"kinetic energy"}} - \underbrace{\frac{\Omega_s^2}{\cos\phi_s} (\cos\phi + \phi \sin\phi_s)}_{\text{"potential energy"}} = \text{cte}$$

CONSTANT OF MOTION  
 $\equiv$  TOTAL ENERGY

The SEPARATRIX identifies the trajectory in the large transverse phase space in which the particle turns back at  $\phi = \pi - \phi_s$  &  $\dot{\phi} = 0$ .  
The constant of motion of the generic phase  $\phi$  and at the aforementioned phase gives the separatrix eq:

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} - \frac{\Omega_s^2}{\cos\phi_s} (\cos\phi + \phi \sin\phi_s) = - \frac{\Omega_s^2}{\cos\phi_s} [\cos(\pi - \phi_s) + (\pi - \phi_s) \sin\phi_s]$$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\phi}^2}{2} &= \frac{\Omega_s^2}{\cos\phi_s} [\cos\phi + \phi \sin\phi_s + \cos\phi_s - (\pi - \phi_s) \sin\phi_s] = \\ &= \frac{\Omega_s^2}{\cos\phi_s} \left[ (\cos\phi + \cos\phi_s) + (\phi + \phi_s - \pi) \sin\phi_s \right] \end{aligned}$$



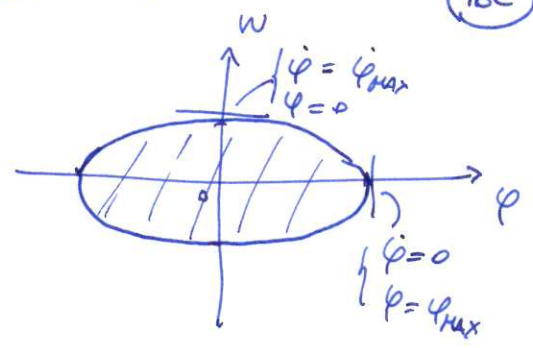
$\Rightarrow$  high  $V_{RF}$  make  $U(\phi)$  high enough so to make the stable region (RF bucket) large enough, to accommodate on turn off-energy particles  $\Rightarrow$  This defines the MOMENTUM ( $\equiv$  ENERGY) ACCEPTANCE



PHASE and MOMENTUM ACCEPTANCE (SMALL OSC. AMPLITUDES)

From eq. of motion for the particle phase:

$$\dot{\varphi} = - \frac{\hbar \eta \omega_s}{2\pi R_s p_s} w \quad (1)$$



From def. of synchrotron frequency:

$$\Omega_s^2 := \frac{\hbar \eta \omega_s q V_{off}}{2\pi R_s p_s} \quad (2)$$

Assume no frictional forces  $\Rightarrow$  particle's energy is constant:

$$\Rightarrow \text{pure oscillator, } \overset{\uparrow}{\text{kinetic}} \dot{\varphi}^2 + \overset{\uparrow}{\text{potential}} \Omega_s^2 \varphi^2 = E = \text{const.} \quad (3)$$

$\Rightarrow$  phase space ellipse area is constant:

$$\varphi_{MAX} w_{MAX} = \text{const.} \quad (4)$$

Finally remind the def. of synchrotron tune:  $Q_s := \frac{\Omega_s}{\omega_s} = \frac{\Omega_s}{c/R_s}$

- 1) consider  $\varphi = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_{MAX}$ , where  $\dot{\varphi}_{MAX}^2 \stackrel{(3)}{=} cte \stackrel{(1)}{=} \left( \frac{\hbar \eta \omega_s}{2\pi R_s p_s} \right)^2 w_{MAX}^2$ ;
- 2) consider  $\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi_{MAX}$ , where  $\Omega_s^2 \varphi_{MAX}^2 \stackrel{(3)}{=} cte = \left( \frac{\hbar \eta \omega_s}{2\pi R_s p_s} \right)^2 w_{MAX}^2$ ;

$$\boxed{|\varphi_{MAX}|} = \left( \frac{\hbar \eta \omega_s}{2\pi R_s p_s} \right) \frac{w_{MAX}}{\Omega_s} \stackrel{(\cdot \frac{c}{c})}{=} \frac{\hbar \eta c}{\Omega_s R_s} \cdot \frac{w_{MAX} \omega_s}{2\pi p_s c} \stackrel{\text{for } t_{tr}}{=} \boxed{\frac{\hbar \eta c}{Q_s} \left( \frac{\Delta E}{E_s} \right)_{MAX}}$$

$w_{MAX} = \frac{2\pi \Delta E}{\omega_s}$

Since  $\varphi_{MAX} w_{MAX} = cte \Rightarrow w_{MAX} \sim \frac{1}{\varphi_{MAX}}$

$$\Rightarrow \varphi_{MAX} \propto \left( \frac{\hbar \eta c}{Q_s} \right) \frac{1}{\varphi_{MAX}} \Rightarrow \varphi_{MAX} \propto \sqrt{\frac{\hbar \eta c}{Q_s}} \propto \sqrt{\frac{\eta c}{V_{off}}}$$