

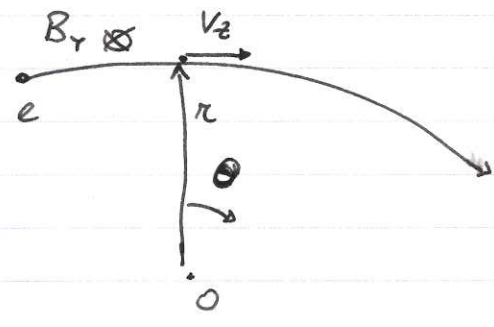
DINAMICA TRASVERSA IN UN ANELLO.

Prima di passare alla realizzazione (tensione) in un sinotrone, analizziamo le proprietà più menzionate in acceleratori CIRCOLARI e CAMPO MAGNETICO UNIFORME e simmetria AZIMUTALE, come il CICLOTRONE DI LAWRENCE e il BETATRONE. Questo ci permetterà di introdurre parametri per la descrizione del moto delle particelle che verranno estesi al sinotrone.

FOCAGGIAMENTO DEBOLE

$$B_r(\theta) = B_y = \text{cost.} \sin \theta$$

$$r = R + x = R(1 + \frac{x}{R})$$



Dalle condizioni di equilibrio delle forze trasverse nel SR di una particella in equilibrio su un'orbita (percorso chiuso), otteniamo:

$$m \frac{v_z^2}{R} = e v_z B_0 ;$$

forze CENTRIFUGA (f_c)

forze di LORENTZ (F_L)

$$\left[\begin{array}{l} p_z = m v_z = e B_0 R \\ [\text{GeV}/c] = 0.3 [T][m] \quad (S.I.) \end{array} \right]$$

Sviluppiamo B_r nella coordinata RADIALE, e ci limitiamo alla approssimazione di moto LINEARE (nelle coordinate delle particelle):

$$B_r \approx B_0 + \left(\frac{\partial B_r}{\partial x} \right)_{y=0} x \equiv B_0 \left(1 - n \frac{x}{R} \right) \Leftrightarrow n := - \frac{R}{B_0} \left(\frac{\partial B_r}{\partial x} \right)_{y=0} \quad \begin{array}{l} \text{INDICE} \\ \text{DI} \\ \text{CAMPO} \end{array}$$

Sappiamo $r > R$ ($x > 0$) e $B_0 > 0$. La stabilità del moto è garantita da un'orbita che non diverge, cioè: $F_L > f_c$,

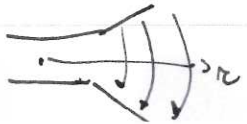
$$e v_z B_0 \left(1 - n \frac{x}{R} \right) > m \frac{v_z^2}{r} ;$$

$$\frac{p_z}{R} \left(1 - n \frac{x}{R} \right) > \frac{p_z}{r} ;$$

$$1 - n \frac{x}{R} > \frac{R}{r} \approx \frac{R}{R} \left(1 - \frac{x}{R} \right) ;$$

$$- n \frac{x}{R} > - \frac{x}{R} \Rightarrow \underline{n < 1}.$$

Nel piano verticale, abbiamo già evidenziato (nel betatrone) che la stabilità è garantita da un gradiente tale che: $\frac{\partial B_y}{\partial x} < 0 \Rightarrow \underline{n > 0}$



In conclusione, la stabilità in ENTRAMBI i PIANI, in presenza di un campo AZIMUTALE richiede $0 < m < 1$.

ESPRESSIONI del MOTO (APPROX. LINEARE):

$$m(\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r) = -eV_z B_r;$$

$$m\ddot{r} = m\ddot{x};$$

$$-m\dot{\theta}^2 r = -m\omega^2 r = -m\frac{v_z^2}{r} = -\frac{P_z^2}{mr} \approx -\frac{P_z^2}{mR}\left(1 - \frac{x}{R}\right) = -\frac{(eB_0)^2 R^2}{mR}\left(1 - \frac{x}{R}\right) = -\frac{(eB_0)^2 R}{m} + \frac{(eB_0)^2}{m}x;$$

$$-eV_z B_r \approx - (eB_0) \frac{P_z}{m} \left(1 - m\frac{x}{R}\right) = -\frac{(eB_0)^2}{m} R \left(1 - m\frac{x}{R}\right) = -\frac{(eB_0)^2 R}{m} + \frac{(eB_0)^2}{m} mx;$$

Assembleando i termini:

$$m\ddot{x} - \frac{(eB_0)^2 R}{m} + \frac{(eB_0)^2}{m}x = -\frac{(eB_0)^2 R}{m} + \frac{(eB_0)^2}{m}mx;$$

$$\ddot{x} + \left(\frac{eB_0}{m}\right)^2 (1-m)x = 0$$

$\hookrightarrow \omega_0$ (frequenza angolare di Larmor, o di ciclotrone)

Si dimostra analogamente per il piano verticale (dove $\dot{\theta}^2 r \equiv 0$):

$$\ddot{y} + \left(\frac{eB_0}{m}\right)^2 y = 0$$

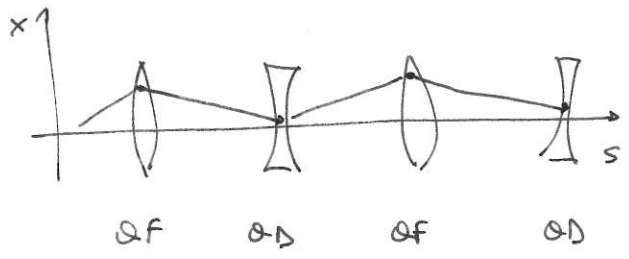
Nel piano ORIZZONTALE, la frequenza angolare di oscillazione è $\omega_x = \omega_0 \sqrt{1-m}$, da cui segue che: $\lambda_x = \frac{2\pi v_z}{\omega_x} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{v_z}{\sqrt{1-m}} = \frac{2\pi R}{\sqrt{1-m}} > 2\pi R$!

Cioè le DEVIAZIONI dell'orbita di riferimento sono dell'ORDINE dell'orbita stesse \Rightarrow grandi dimensioni del MAGNETE (e aperture).



RIDURRE le dimensioni del magnete implica la ROTTURA della simmetria azimutale di $B_r \Rightarrow B_r = B_r(\theta)$, e ci impone LOCALMENTE $|m| \gg 1$:

FOCAGGIAMENTO FORTE A GRADIENTI ALTERNATI



Poiché $f_x \propto x$, e poiché le coordinate $|x|$ si seguono meglio nei QF che nei QD, la neutralità di un FODO (per aperture abbastanza) è una forza FOCHEGGIANTE in ENTRAMBI i PIANI.

GRADIENTE DI CAMPO di un QUADRUPOLO.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = NI;$$

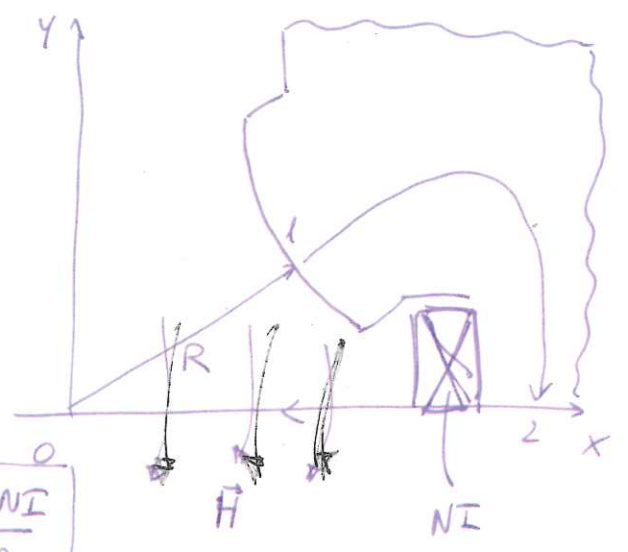
$$\int_0^R H(r) dr + \int_1^2 \vec{H} \cdot d\vec{s} + \int_2^0 \vec{H} \cdot d\vec{s} =$$

$$= \int_0^R \frac{1}{\mu_0} \frac{JB_r}{r} r dr + \int_1^2 \frac{1}{\mu_r} \vec{B} \cdot d\vec{s} \approx \frac{1}{\mu_r} JB_r R$$

$\mu_r \gg \mu_0$

$$\approx \frac{1}{\mu_0} g \frac{R^2}{2}; \Rightarrow$$

$$g = \left(\frac{JB_r}{Jx} \right)_{y=0} = \frac{2\mu_0 NI}{R^2}$$



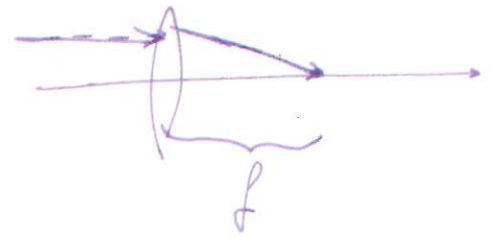
GRADIENTE

$$k := \frac{eg}{P_z} = \frac{0.2998 g [T/m]}{P_z [GeV/c]} \sim [m^{-2}]$$

GRADIENTE NORMALIZZATI

$$f = \frac{1}{kl}$$

LUNGHEZZA FOCALE



ESPANSIONE MULTIPOLARE.

$$B_y \approx b_0 + b_1 \left(\frac{x}{R} \right)_{y=0} + b_2 \left(\frac{x}{R} \right)_{y=0}^2 + \dots = \sum_{m=0}^M b_m \left(\frac{x}{R} \right)_{y=0}^m$$

MAGNETI NORMALI

$$\text{dove } b_m = \frac{1}{m!} \left(\frac{JB_y}{Jx^m} \right)_{y=0} R^m$$

(non accoppiate x e y)

GRADIENTE MULTIPOLARE

- m = 0, DIPOLO
- m = 1, QUADRUPOLO
- m = 2, SESTUPOLO
- m = 3, OTTUPOLA
- ⋮

OTTICA LINEARE : m = 0, 1.

↳ EQUAZIONI DI HILL

$$m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 r \right] = - e v_z B_r ;$$

$r \rightarrow x$

$t \rightarrow s, \quad \frac{d}{dt} = \frac{d}{ds} \left(\frac{ds}{dt} \right) = v_z \frac{d}{ds}$

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{1}{v_z^2} \frac{v_z^2}{r} - \frac{e B_p}{m} \frac{v_z}{v_z^2} ;$$

$g = \left(\frac{\partial B_r}{\partial x} \right)_{r=0}$ GRADIENT

$$\ddot{x}(s) \cong \frac{1}{R} \left(1 - \frac{x}{R} \right) - \frac{e B_p}{p_z} \cong \frac{1}{R} \left(1 - \frac{x}{R} \right) - \frac{e B_0}{p_z (1+d)} \left(1 + \frac{g}{B_0} x \right) =$$

$$\cong \frac{1}{R} \left(1 - \frac{x}{R} \right) - \frac{e B_0}{p_{z0}} (1-d) \left(1 + \frac{g}{B_0} x \right) =$$

$d := \frac{\Delta p_z}{p_{z0}}$ OFF-ENERGY PARTICLE

$$= \frac{1}{R} - \frac{x}{R^2} - \frac{1}{R} + \frac{d}{R} - \left(\frac{e g}{p_{z0}} \right) (1-d) x ;$$

↳ k, GRADIENTE NORMALIZZATO

$$\boxed{\ddot{x}(s) + \left[k(s)(1-d) + \frac{1}{R^2} \right] x = \frac{d}{R}}$$

Analizzante nel piano VERTICALE: $\boxed{\ddot{y}(s) - k(s)(1-d) y = 0}$

Osservazioni:

- 1) FOCHEGGIAMENTO DEBOLTO NEI 2 PIANI
- 2) FOCHEGGIAMENTO FORTE IN Y, FORTE + DEBOLE IN X
- 3) Tipicamente $k \gg \frac{1}{R^2} \Rightarrow \lambda_{xy} \ll 2\pi R$, cioè le deviazioni dall'orbita di riferimento sono R² PICCOLE rispetto ad R.
- 4) Dipendenza del FOCHEGGIAMENTO dall'ENERGIA della particella "kf" (EFFETTI CROMATICI).



TRAJETTORIE PRINCIPALI e FORMALISMO MATRICIALE.

Consideriamo il moto nel piano ORIZZONTALE (il verticale sarà del tutto assente, con esclusione del termine "moto"). La soluzione dell'eq. di Hill è la sovrapposizione lineare di 2 soluzioni, dell'eq. omogenea e di quella PARTICOLARE:

$$x(s) = x_p(s) + x_e(s)$$

\uparrow \uparrow \swarrow
 eq. omogenea eq. completa DEF. $x_e(s) = D_x(s) d$

\uparrow
 FUNZIONE DI
 DISPERSIONE DI
 ENERGIA

$$\Rightarrow x(s) = Cx_0 + Sx_0' + D_x d$$

C, S sono dette TRAJETTORIE PRINCIPALI.
 La loro combinazione lineare soddisfa ancora l'eq. differenziale omogenea di 2° grado.

Scegliamo le condizioni iniziali per C, S tale che $C(0) = 1, C'(0) = 0, S(0) = 0, S'(0) = 1$. Entrambe soddisfanno l'eq. di Hill omogenea. Per studiare le loro proprietà, consideriamo un'eq. di Hill omogenea con TERMINE DISSIPATIVO (oscillatore smorzato):

$$x''(s) + \zeta(s)x'(s) + k(s)x(s) = 0,$$

sostituendo C ed S:

$$\begin{cases} \cdot \cdot S & \left\{ \begin{aligned} C'' + \zeta C' + kC &= 0 \\ C & \left\{ \begin{aligned} S'' + \zeta S' + kS &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

$$(CS'' - SC'') + \zeta(CS' - SC') = 0$$

Si nota che $\begin{cases} x = Cx_0 + Sx_0' \\ x' = C'x_0 + S'x_0' \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$

Ciò, in generale, $x = Mx_0$, dove $\det M = CS' - SC' \equiv W$ (WRONSKIANO)
 Le precedenti relazioni dedotte dal sistema di eqs. può dunque essere scritte

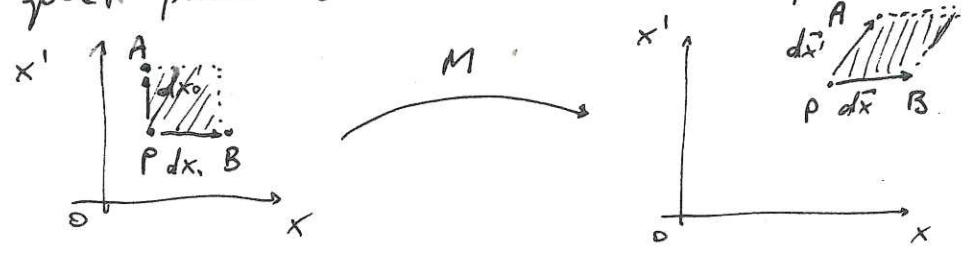
$$W' + \xi W = 0 \Rightarrow W(s) = W(0) e^{-\int_0^s \xi(s') ds'}$$

$$\text{se } \xi(s) = 0 \forall s \Rightarrow W \equiv 1$$

Ciò, in assenza di forze dissipative ($\xi \neq 0$ o f.o.r. x), il wronskiano della matrice di trasformazione LINEARE è una COSTANTE DEL MOTO, e convenzionalmente posto $\equiv 1$ (dalle condizioni iniziali per C ed S).

SIGNIFICATO FISICO DEL WRONSKIANO

Considera un punto P nello spazio della fn. trasversa, e l'elemento infinitesimo di AREA in prossimità di esso, identificati dai punti A e B e distanza $d\vec{x}_0 = (dx_0, 0)$ e $d\vec{x}'_0 = (0, dx'_0)$ da esso. Considera una generica trasformazione M di questi punti. Quanto vale l'AREA dopo la trasformazione?



In generale sarà $d\vec{x} = dx (dx_0, dx'_0)$ e $d\vec{x}' = dx' (dx_0, dx'_0)$. In approx. LINEAR della trasformazione: $d\vec{x} = \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} dx_0, \frac{\partial x}{\partial x'_0} dx'_0 \right)$ e $d\vec{x}' = \left(\frac{\partial x'}{\partial x_0} dx_0, \frac{\partial x'}{\partial x'_0} dx'_0 \right)$.

L'AREA trasformata sarà:

$$\underbrace{(d\vec{x} \times d\vec{x}')}_A = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} dx_0 & \frac{\partial x}{\partial x'_0} dx'_0 \\ \frac{\partial x'}{\partial x_0} dx_0 & \frac{\partial x'}{\partial x'_0} dx'_0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial x'}{\partial x'_0} - \frac{\partial x}{\partial x'_0} \frac{\partial x'}{\partial x_0} \right) dx_0 dx'_0 \cdot k \equiv A_0$$

$$\equiv (CS' - S'C) A_0 \equiv A_0$$

Ciò il WRONSKIANO è il DETERMINANTE JACOBIANO della trasformazione, e l'AREA è PRESERVATA, in prossimità di una traiettoria nello sp. fn. (COSTANTE DEL MOTO)



Per un modello di FOCALIZZAZIONE UNIFORME lungo il magnetone tale che $k(0 \leq s \leq l) = k_{\text{cost.}}$, $C(s)$ e $S(s)$ assumono una forma semplice:

$$\begin{cases} C(s) = \cos(\sqrt{K(s)} \cdot s) \\ S(s) = \frac{1}{\sqrt{K(s)}} \sin(\sqrt{K(s)} \cdot s) \end{cases}$$

Si dimostra per sostituzione che la forma generale di $D_x(s)$ è funzione di C e S come segue:

$$D(s) = S(s) \int_0^s \frac{1}{R(s')} C(s') ds' - C(s) \int_0^s \frac{1}{R(s')} S(s') ds'$$

In fatti: $D' = S' \int \frac{C ds'}{R} - C' \int \frac{S ds'}{R}$;

$$D'' = S'' \int \frac{C ds'}{R} - C'' \int \frac{S ds'}{R} + \frac{1}{R} (CS' - SC') = \left[\begin{array}{l} \text{e sostituendo} \\ S'' = -kS, \\ C'' = -CS \end{array} \right] =$$

$$= -K(s)D(s) + \frac{1}{R(s)} \iff \boxed{x_s = Ds} \text{ soddisfa l'eq. completa come soluz. particolare (particolare)}$$

APPLICAZIONE 1: MATRICE di TRASPORTO di un DIPOLO COMBINATO ($m=0,1$).

Definiamo $\varphi := s\sqrt{|K(s)|}$, dove $K(s) = -k(s) + \frac{1}{R(s)^2}$.

$$M_x = \begin{pmatrix} C & S & D \\ C' & S' & D' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sin \varphi & \frac{1}{R|K|} (1 - \cos \varphi) \\ -\sqrt{|K|} \sin \varphi & \cos \varphi & \frac{1}{R\sqrt{|K|}} \sin \varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k(s)=0}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & R \sin \theta & R(1 - \cos \theta) \\ -\frac{1}{R} \sin \theta & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ dove } \theta = \frac{s}{R} \text{ è l'ANGOLO di DEPRESSIONE.}$$

APPLICAZIONE 2: MATRICE DI TRASPORTO di un QUADRUPOLO.

APPROSSIMAZIONE DI LENTE SOTTILE: $f = \frac{1}{kl} \gg l$

Motoricamente spostato consente di approssimare $l \rightarrow 0$ mentre si mantiene $kl = \text{const.}$ Nel caso di un SF:

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

NOTA: se SF convergente per convenzione $k(s) > 0$, allora $M_{21} < 0$.

MATRICI SIMPLETTICHE.

Se G una matrice $n \times n$ ANTISIMMETRICA SINGOLARE ($\det G = 0$, quindi non invertibile). Ad es.:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & -1 & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix}_{n \times n}$$

M è una matrice SIMPLETTICA se soddisfa: $M^T G M = G$.

Teorema: $\det M = 1$.

Quindi, la descrizione di un sistema fisico CONSERVATIVO ($E = T + U$), cioè in assenza di forze o velocità (dissipative), tramite formalismo matriciale è ASSICURATO dall'utilizzo di MATRICI SIMPLETTICHE.

Dal significato fisico della Jacobiana, segue che matrici simplettiche "preservano l'area nello spazio delle fasi". Si noti che PRODOTTO di matrici simplettiche è ancora una matrice SIMPLETTICA (GRUPPO).

La verifica usuale per la buona "costruzione" di una matrice di trasporto è che il suo $\text{DET} = 1$.

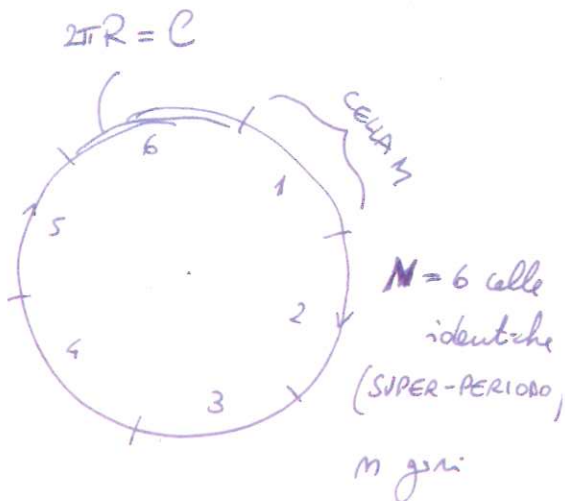


EQUAZIONE DI HILL per moto PERIODICO.

CRITERIO DI STABILITA'.

Consideriamo un'eq. di Hill per moto periodico (vedi figura), tale che:

$$\begin{cases} \ddot{x}(s) + K(s)x(s) = 0 \\ K(s) = K(s + L_{cell}) = K(s + C) \end{cases}$$



In una singola cella di matrice M , cerchiamo gli AUTOVALORI e AUTOVETTORI di M con i quali costruire una BASE per la formazione (chiusa) della soluzione dell'eq. di Hill:

$$M \vec{x}_i^* = \lambda_i \vec{x}_i^*, \text{ con } \vec{x}(s) = \sum_i A_i \vec{x}_i^*(s)$$

Richiediamo che dopo N celle ed n giri, la matrice risultante M^{mN} contenga ancora ELEMENTI FINITI, cioè:

$$\lim_{mN \rightarrow \infty} M^{mN} \vec{x}(s) = \lim_{mN \rightarrow \infty} M^{mN} \sum_i A_i \vec{x}_i^*(s) = \lim_{mN \rightarrow \infty} \sum_i \lambda_i^{mN} A_i \vec{x}_i^*(s) < \infty$$

$$\Rightarrow |\lambda_i| < 1.$$

Gli autovalori di M soddisfano $\det(M - \lambda I) = 0$, per definizione.

Scriviamo $M_{2 \times 2}$ nella forma generica $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; la precedente fornisce:

$$\det \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{T_n M \pm \sqrt{T_n M^2 - 4}}{2} \quad ; \Rightarrow \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1. \quad \text{Inoltre } \lambda_1 + \lambda_2 = T_n M.$$

TEOREMA DI FLOQUET: FUNZIONE DI BETAIRONE (21b)

Consideriamo le seguenti 2 soluzioni linearmente indipendenti dell'eq. Hill, con ampiezza PERIODICA sulla circonferenza dell'anello:

$$\begin{cases} \mu_{1,2}(s) = p(s) e^{\pm i\mu(s)} & , \mu(s) \in \mathbb{R} \forall s \\ p(s) = p(s+C) \quad \forall s \end{cases}$$

→ poiché $e^{\pm i\mu(s)}$ sono 2 funzioni lin. indep., possiamo arbitrariamente porre $p_1(s) = p_2(s) = p(s)$ t.c. $\mu_{1,2}$ saranno ancora lin. indep.

→ anticipiamo che la condizione aggiuntiva di PERIODICITÀ di $p(s)$ implica una relazione tra $p(s)$ e $\mu(s)$ [vedi sotto].

• Calcoliamo il trasporto di $\mu_{1,2}$ in 1 GIRO:

$$\begin{cases} \mu_{1,2}(0) = p(0) e^{\pm i\mu(0)} \equiv p_0 e^{\pm i\mu_0} \\ \mu_{1,2}(C) = \boxed{M \mu_{1,2}(0)} = p(C) e^{\pm i\mu(C)} = p(0) e^{\pm i\mu_0} e^{\pm i(\mu(C) - \mu_0)} = \\ = \boxed{\mu_{1,2}(0) e^{\pm i(\mu(C) - \mu_0)}} \Rightarrow e^{\pm i(\mu(C) - \mu_0)} \text{ sono AUTOVALORI} \\ \text{di } M, \\ \text{scelgono } \lambda_1 \lambda_2 = 1. \end{cases}$$

"coeff. espon. CARATTERISTICO" dell'eq. Hill

• Dalla def. $|\lambda_1 + \lambda_2| = |\text{Tr } M| = |2 \cos \Delta\mu| \leq 2$

⇒ la STABILITÀ del moto della singola particella attraverso m -giri e N -super-periodi, $m, N \rightarrow \infty$, è garantita $\Leftrightarrow M^{mN}$ rimane ad elementi FINITI $\Leftrightarrow \underline{\underline{|\text{Tr } M| \leq 2}}$.

• Riscriviamo le $\mu_{1,2}(s)$ in forma "tradizionale" nella letteratura:

$$\begin{cases} \mu_{1,2}(s) = \sqrt{\beta(s)} e^{\pm i\mu(s)} & \leftarrow \beta(s) \text{ è definita POSITIVA} \equiv p^2(s) \\ \beta(s) = \beta(s+C) & \text{e il segno } \pm \text{ di } \mu_{1,2} \text{ è determinato dal valore di } \mu(s). \end{cases}$$

La soluzione generale dell'eq. Hill è data da:

$$\begin{aligned} u(s) &= a_1 \mu_1(s) + a_2 \mu_2(s) = a_1 \sqrt{\beta(s)} e^{i\mu(s)} + a_2 \sqrt{\beta(s)} e^{-i\mu(s)} = \\ &= a \sqrt{\beta(s)} \cos(\mu(s) - \mu_0 + \phi_0), \quad \text{||} \end{aligned}$$

dove:

$$\left\{ \begin{aligned} a &= 2\sqrt{a_1 a_2} \\ \operatorname{tg} \phi_0 &= i \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right) \end{aligned} \right.$$

poiché $\mu(s)$ è una fase relativa alla coordinate iniziale $\mu(0)$, esse può essere valutata a meno di una costante μ_0 .

• Esplicitiamo la relazione tra $p(s)$ (o $\beta(s)$) e $\mu(s)$.

Sostituiamo $u_1(s)$ nell'eq. Hill:

$$u = p e^{i\mu}, \quad u' = p' e^{i\mu} + i p \mu' e^{i\mu},$$

$$u'' = [p'' + i p' \mu' + i p' \mu' + i p \mu'' - p \mu'^2] e^{i\mu}$$

$$\Rightarrow u'' + k u = \underbrace{p'' + k p - \mu'^2 p}_{\operatorname{Re} \{ \} \equiv 0 \text{ [1]}} + i \underbrace{(2\mu' p' + \mu'' p)}_{\operatorname{Im} \{ \} \equiv 0 \text{ [2]}} = 0$$

Risolviamo la [2]: $\frac{2p'}{p} = -\frac{\mu''}{\mu'}$;

$$\frac{d}{ds} [\ln p^2] = -\frac{d}{ds} [\ln \mu'] + \ln c$$

integrando:

$$\frac{d\mu}{ds} = \frac{1}{p(s)^2};$$

$$\boxed{\mu(s) - \mu_0 = \int_s^0 \frac{ds'}{\beta(s')}}$$

e RAPPRESENTAZIONE dell' ELLISSE per la SINGOLA PARTICELLA.

Il teo. di Floquet produce l'esistenza di una soluzione generale delle eq. di HILL OMOGENEA e condizioni al contorno PERIODICHE t.c.:

$$\begin{cases} x(s) = \alpha \xi(s) \cos(\mu(s) - \mu_0) & , & \xi(s) = \xi(s+C) \\ \mu(s) = \mu_0 + \int_0^s \frac{ds'}{\xi^2(s')} & \leftarrow \text{AVANZAMENTO DI FASE DI BETATRONE} \end{cases}$$

Definiamo $\boxed{\epsilon := \alpha^2}$ \leftarrow INVARIANTE di SINGOLA PARTICELLA

e $\boxed{\beta(s) = \xi^2(s) > 0}$ \leftarrow FUNZIONE DI BETATRONE

Calcoliamo: $x'(s) \equiv \frac{dx(s)}{ds} = \dots = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\beta(s)}} \left[\sin \Delta\mu(s) + \eta(s) \cos \Delta\mu(s) \right]$,

dove abbiamo introdotto $\left[\eta(s) := -\frac{1}{2} \frac{d\beta(s)}{ds} \right]$

Notiamo che tale scrittura per le soluzioni $x(s), x'(s)$ è equivalente alla descrizione delle soluzioni in formalismo matriciale. Dunque, il numero di parametri (condizioni INIZIALI) e funzioni linearmente INDIPENDENTI deve essere lo stesso:

$$\begin{aligned} (C, S) &\sim (\beta, \eta) \\ (x_0, x_0') &\sim (\epsilon, \mu_0) \end{aligned}$$

• MOTO PERIODICO

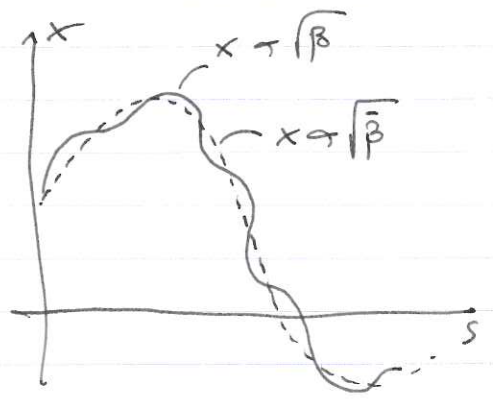
Il teo. di Floquet impone $\beta(s) = \beta(s+C) \Rightarrow \eta(s) = \eta(s+C)$

$$\Rightarrow Q_x = \frac{\Delta\mu_{\text{turn}}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{ds}{\beta(s)}$$

TUNE DI BETATRONE

E' possibile definire una β -MEDIA, $\bar{\beta}$, t.c.:

$$2\pi Q_x = \oint \frac{ds}{\beta(s)} \equiv \frac{2\pi R_{eq}}{\bar{\beta}}$$



- i) Ricaviamo un'espressione analitica dell'inv. C-S., funzione dei parametri di C-S (Twiss) e delle coordinate del punto materiale (x, x') .
- ii) Dimostriamo che l'ampiezza costante (a) di oscillazione di betatrone è l'inv. C-S per quella particella.



- i) Soluzione generale di betatrone, dell'eq. di Hill omogenea:

$$x(s) = a_1 x_1(s) + a_2 x_2(s),$$

$$x_1(s) = \sqrt{\beta} e^{i\mu}$$

Costruisco $V = \begin{vmatrix} x & x' \\ x_1 & x_1' \end{vmatrix} = x x_1' - x_1 x_1'$

Calcolo $\frac{dV(s)}{ds} = x' x_1' + x x_1'' - x'' x_1 - x_1' x_1' = x x_1'' - x'' x_1 =$

$$\stackrel{\text{eq. Hill}}{\neq} x(-k x_1) - (-k x) x_1 = -k x x_1 + k x x_1 = \underline{\underline{0}}$$

$$\Rightarrow V(s) = \text{const. } \forall s$$

Esplanto $V(s) = x x_1'(s) - x_1' x_1(s) =$

$$= x \left(\frac{1}{2} \frac{\beta}{\sqrt{\beta}} e^{i\mu} + i \sqrt{\beta} \frac{1}{\beta} e^{i\mu} \right) - x_1' x_1 =$$

$$= x \sqrt{\beta} e^{i\mu} \left(\frac{i - \vartheta}{\beta} \right) - x_1' x_1 =$$

$$= x x_1 \left(\frac{i - \vartheta}{\beta} \right) - x_1' x_1 = x_1 \left[x \left(\frac{i - \vartheta}{\beta} \right) - x_1' \right]$$

Calcolo $V V^* = \text{const.} = x_1 \left[x \left(\frac{i - \vartheta}{\beta} \right) - x_1' \right] x_1^* \left[x \left(\frac{-i - \vartheta}{\beta} \right) - x_1' \right] =$

$$= \underbrace{x_1 x_1^*}_{\beta} \left[x^2 \left(\frac{1 + \vartheta^2}{\beta^2} \right) + \frac{2\vartheta}{\beta} x x_1' + x_1'^2 \right] =$$

$$= \underline{\underline{\beta \left(x^2 + 2\vartheta x x_1' + \beta x_1'^2 \right)}}$$

Ricorda: l'invariante di $V V^*$ è ricavato in presenza di 2 condizioni che soggiacciono all'eq. Hill:

- 1) LINEARITÀ del moto (dipoli, quadrupoli)
- 2) ASSENZA di FORZE DISSIPATIVE ($E \approx \text{const.}$)

ii) Soluzione dell'eq. Hill : $x(s) = \sqrt{2J\beta(s)} \cos \Delta\mu(s)$ (1)

↑
a² in previous notation

Calcolo $x' = \frac{dx}{ds} = -\sqrt{\frac{2J}{\beta}} \left[\sin \Delta\mu - \frac{\dot{\beta}}{2} \cos \Delta\mu \right]$ (2)

Sostituisco (1) in (2):

$$\cos \Delta\mu = \frac{x}{\sqrt{2J\beta}} \Rightarrow x' = -\sqrt{\frac{2J}{\beta}} \left[\sin \Delta\mu + \gamma \frac{x}{\sqrt{2J\beta}} \right] =$$

$$= -\sqrt{\frac{2J}{\beta}} \left[\sqrt{1 - \frac{x^2}{2J\beta}} + \gamma \frac{x}{\sqrt{2J\beta}} \right];$$

↓

$$\begin{aligned} \frac{J}{\beta} &= \frac{1}{2\beta} \left[x^2 + (\beta \dot{x} + \gamma x)^2 \right] = \\ &= x^2 \left(\frac{1}{\beta} + \frac{\gamma^2}{\beta} \right) + \beta \dot{x}^2 + 2\gamma x \dot{x} = \\ &= \underline{\underline{\delta x^2 + 2\gamma x \dot{x} + \beta \dot{x}^2}} \quad ! \quad \text{cvd} \end{aligned}$$

INVARIANTE di C-S: SIGNIFICATO GEOMETRICO

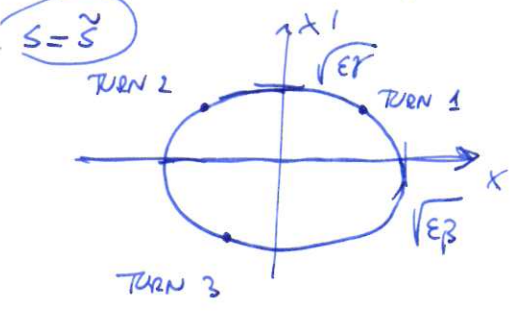
L'eq. di Hill descrive un moto oscillatorio nello spazio delle fasi (x, x') ; la forma e l'orientazione dell'ellisse dipende dai parametri di TWISS ϵ , e, in generale, varia con s . I semi-assi dell'ellisse corrispondono ai valori massimi $\hat{x} = x_{max}$, $\hat{x}' = x'_{max}$.

$$x(s) = \sqrt{\epsilon\beta} \cos \Delta\mu \leq \sqrt{\epsilon\beta} \equiv x_{max}$$

$$|x'(s)| = \sqrt{\frac{\epsilon}{\beta}} |\sin \Delta\mu + \eta \cos \Delta\mu| = \sqrt{\epsilon\gamma} \frac{|\sin \Delta\mu + \eta \cos \Delta\mu|}{\sqrt{1+\eta^2}} \leq \sqrt{\epsilon\gamma} \frac{1+|\eta|}{\sqrt{1+\eta^2}} \leq \sqrt{\epsilon\gamma}$$

$$\rightarrow |x'_{max}| \equiv \sqrt{\epsilon\gamma}$$

Considero il caso piú semplice e intuitivo, $\eta = 0$ ($\beta\gamma = 1$):



Eq. dell'ellisse con venghli normalizzati ai semi-assi:

$$\frac{x^2}{x_{max}^2} + \frac{x'^2}{x'_{max}^2} = 1;$$

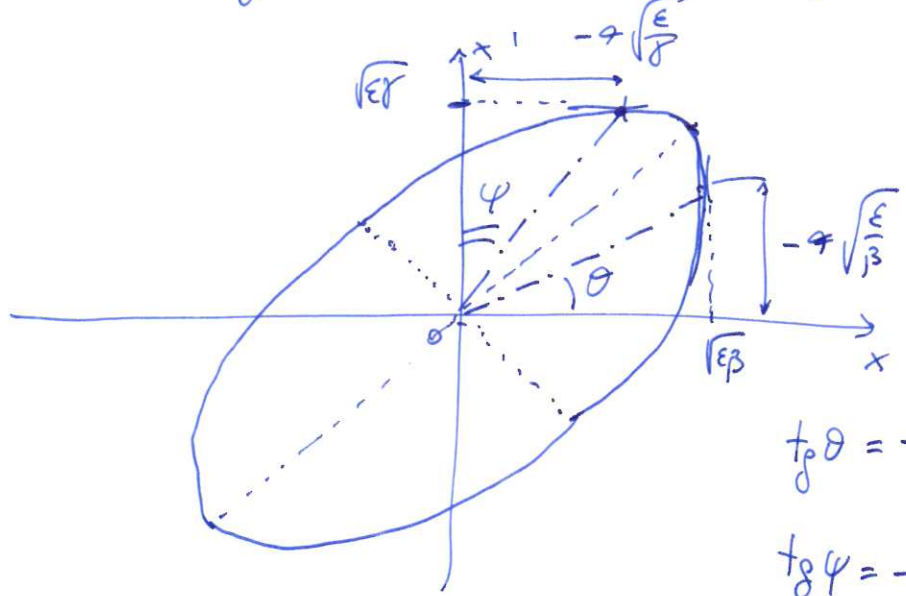
$$x^2 x'_{max}^2 + x'^2 x_{max}^2 = x_{max}^2 x'_{max}^2 = \left(\frac{Area}{\pi}\right)^2$$

Sostituisco $x_{max} = \sqrt{\epsilon\beta}$, $x'_{max} = \sqrt{\epsilon\gamma}$:

$$\epsilon^2 \beta\gamma = \left(\frac{Area}{\pi}\right)^2$$

=> Poiché ϵ è una costante introdotta in funzione delle condizioni iniziali della particella, troviamo che $Area = const. \forall s$

Per una orientazione generica dell'ellisse ($\eta \neq 0$):

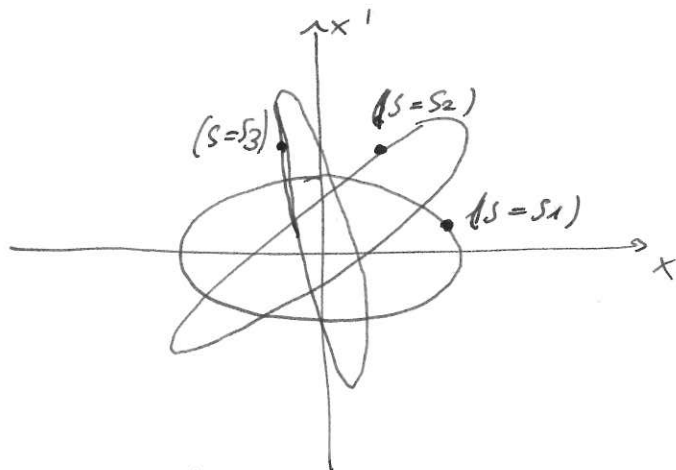


$$\tan \theta = -\eta \sqrt{\frac{\epsilon}{\beta}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon\beta}} = -\frac{\eta}{\beta}$$

$$\tan \phi = -\eta \sqrt{\frac{\epsilon}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon\gamma}} = -\frac{\eta}{\gamma}$$

• MOTO NON PERIODICO (LINEA "APERTA")

Come si configura l'ellisse al variare di s ? Perché le funzioni di Tisserand $(\beta, \gamma \rightarrow \gamma)$ che ne determinano l'ovale variano con s , l'ellisse "materna" lungo s , con diverse eccentricità, ma mantenendo la sua AREA COSTANTE:



Ad ogni $s \rightarrow (\beta, \gamma, \gamma) \rightarrow$ la particella giace sull'ellisse specifica. Perché il teo. di Floquet permette di descrivere le soluzioni $(x(s), x'(s))$ $\forall s$ LUNGO LA LINEA (CHIUSA), è possibile considerare tali soluzioni nelle forme chiuse date sopra, e t.c. le equazioni di oscillazione $(\beta, \gamma \rightarrow \gamma)$ non saranno periodiche su una linea non periodica.

In particolare, troviamo l'eq. alla quale $\beta(s) := \xi'(s)$ dovrà soddisfare nel caso di linea "aperta":

$$x = a\xi(s) \cos \Delta\mu(s) = a\xi C \quad (\text{da here})$$

$$x' = a\xi' C - a\xi S \mu'$$

$$x'' = a\xi'' C - a\xi' S \mu'' - a\xi' S \mu'' - a\xi (C\mu'^2 + S\mu''^2)$$

e vale: $\mu' = \frac{1}{\xi^2}, \mu'' = -\frac{2}{\xi^3} \xi'$

Dall'eq. di Hill troviamo: $x'' + kx = 0,$

$$a\xi'' C - a\xi' S \frac{1}{\xi^2} - a\xi' S \frac{1}{\xi^2} - a\xi C \frac{1}{\xi^3} + a\xi S^2 \frac{\xi'}{\xi^3} + ak\xi C = 0;$$

Raccogliamo termine a termine in C ed S :

$$C \left(\xi'' + k\xi - \frac{1}{\xi^3} \right) - S \left(-\frac{2\xi'}{\xi^2} + \frac{2\xi'}{\xi^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\xi'' + k\xi = \frac{1}{\xi^3}}$$



MATRICI DI TRASPORTO e PARAMETRI DI COURANT - SNYDER

Dall'ingeglieria delle traiettorie principali con le coordinate di betatrone otteniamo:

$$\begin{cases} u(s) = C(s)u_0 + S(s)u_0' = \sqrt{\beta(s)E} \cos(\mu(s) - \mu_0) \\ u'(s) = C'(s)u_0 + S'(s)u_0' = -\sqrt{\frac{E}{\beta(s)}} \left[\sin(\mu(s) - \mu_0) + \varphi(s) \cos(\mu(s) - \mu_0) \right] \end{cases}$$

↓ stesso u_0, u_0'

$$\begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} (\cos \Delta\mu + \varphi \sin \Delta\mu) & \sqrt{\beta\beta_0} \sin \Delta\mu \\ \frac{\varphi - \varphi_0}{\sqrt{\beta\beta_0}} \cos \Delta\mu - \frac{1 + \varphi\varphi_0}{\sqrt{\beta\beta_0}} \sin \Delta\mu & \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} (\cos \Delta\mu - \varphi \sin \Delta\mu) \end{pmatrix}$$

$\beta = \beta_0$

Nel caso semplice di M perversa, e $\varphi_0 = 0$, trovano:

$$M(\varphi_0 = 0) = \begin{pmatrix} \cos \Delta\mu & \beta \sin \Delta\mu \\ -\frac{1}{\beta} \sin \Delta\mu & \cos \Delta\mu \end{pmatrix}$$

TRASPORTO dei PARAMETRI di COURANT - SNYDER.

Dall'invarianza dell'entità: $\gamma_0 x_0^2 + 2\varphi_0 x_0 x_0' + \beta_0 x_0'^2 = \gamma x^2 + 2\varphi x x' + \beta x'^2$;

e usando $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$, per sostituzione e ingeglieria membro

a membro trovano:

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \varphi \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & -2CS & S^2 \\ -CC' & CS' + SC' & -SS' \\ C'^2 & -2C'S' & S'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \varphi_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$$

$x_0 = x_0(x, x')$
 $x_0' = x_0'(x, x')$

Dimostrazione

Esprimi $x_0 = x_0(x, x')$ e $x_0' = x_0'(x, x')$.

$$x = Cx_0 + Sx_0' \quad (0 \ S')$$

$$x' = C'x_0 + S'x_0' \quad (0 \ -S)$$

$$\frac{(S'x - Sx')}{(CS' - SC')}x_0 = (S'x - Sx') \Rightarrow x_0 = (S'x - Sx')$$

$$x = Cx_0 + Sx_0' \quad (0 \ -C')$$

$$x' = C'x_0 + S'x_0' \quad (0 \ C)$$

$$\frac{(Cx' - C'x)}{(CS' - SC')}x_0' = (Cx' - C'x) \Rightarrow x_0' = (Cx' - C'x)$$

Sostituisci x_0, x_0' in:

$$\begin{aligned} \delta_0 x_0^2 + 2\gamma_0 x_0 x_0' + \beta_0 x_0'^2 &= \delta_0 (S'x - Sx')^2 + 2\gamma_0 (S'x - Sx')(Cx' - C'x) + \beta_0 (Cx' - C'x)^2 \\ &= \delta_0 S'^2 x^2 + \delta_0 S^2 x'^2 + 2\delta_0 S S' x x' + 2\gamma_0 C S' x x' - 2\gamma_0 C' S' x^2 - 2\gamma_0 C S x'^2 \\ &\quad + 2\gamma_0 S C' x x' + \beta_0 C^2 x'^2 + \beta_0 C'^2 x^2 + 2\beta_0 C C' x x' = \end{aligned}$$

= raggruppa per x^2, x'^2 e $x x'$ =

$$= x^2 (\delta_0 S'^2 - 2\gamma_0 C' S' + \beta_0 C'^2) + (\beta_0, \gamma_0, \delta_0) x x' + (\beta_0, \gamma_0, \delta_0) x'^2 =$$

$$\equiv [\text{impiego}] \delta x^2 + 2\gamma x x' + \beta x'^2;$$

Uguagliando membro a membro:

$$\begin{cases} \delta(s) = \delta_0 S'^2 - 2\gamma_0 C' S' + \beta_0 C'^2 \\ \beta(s) = \dots \\ \gamma(s) = \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ C'^2 - 2C'S' \ S'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \gamma_0 \\ \delta_0 \end{pmatrix}.$$

MATRICE DEL FASCIO

È possibile parametrizzare l'ellisse in (x, x') per ogni punto della (E) raggruppando il numeratore e il denominatore di Tisserand in forme matriciali.

$$\Gamma := E \begin{pmatrix} \beta & -\gamma \\ -\gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{t.c.} \quad \sqrt{\det \Gamma} = E$$

• Dimostrano che $|\vec{x}^T \Gamma^{-1} \vec{x}| = 1$, dove $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$.

$$(x, x') \frac{E}{E^2} \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{E} (x \ x') \begin{pmatrix} \delta x + \gamma x' \\ \gamma x + \beta x' \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \underbrace{(\delta x^2 + 2\gamma x x' + \beta x'^2)}_E \stackrel{!}{=} 1$$

• Consideriamo $\bar{x} = M \bar{x}_0$. Dalla precedente dimostrazione troviamo: (26)

$$\bar{x}^T \sigma^{-1} \bar{x} = (M \bar{x}_0)^T \sigma^{-1} (M \bar{x}_0) = \bar{x}_0^T M^T \sigma^{-1} M \bar{x}_0 \equiv \bar{x}_0^T \sigma_0^{-1} \bar{x}_0 = 1$$

↓

$$M^T \sigma^{-1} M = \sigma_0^{-1};$$

$$\sigma_0 = (M^T \sigma^{-1} M)^{-1} = M^{-1} \sigma (M^T)^{-1};$$

$$M \sigma_0 M^T = (M M^{-1}) \sigma (M^T M^T^{-1}) = \sigma$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma(s) = M_{0,s} \sigma(0) M_{0,s}^T}$$

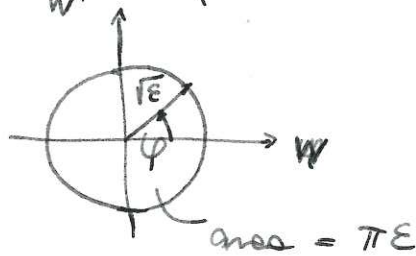
COORDINATE NORMALIZZATE DI FLOQUET

Consideriamo le nuove variabili w, φ tale che: $x \rightarrow w := \frac{x}{\sqrt{\beta}}$ ← soluz. dell'eq. di HILL

In tal caso: $s \rightarrow \varphi := \mu s$ ← variabile indipendente lungo l'acceleratore

$$\begin{cases} w(\varphi) = \sqrt{\epsilon} \cos \varphi \\ w'(\varphi) = \frac{dw}{d\varphi} = -\sqrt{\epsilon} \sin \varphi \end{cases}$$

nello spazio delle fasi trasformato "normalizzato":



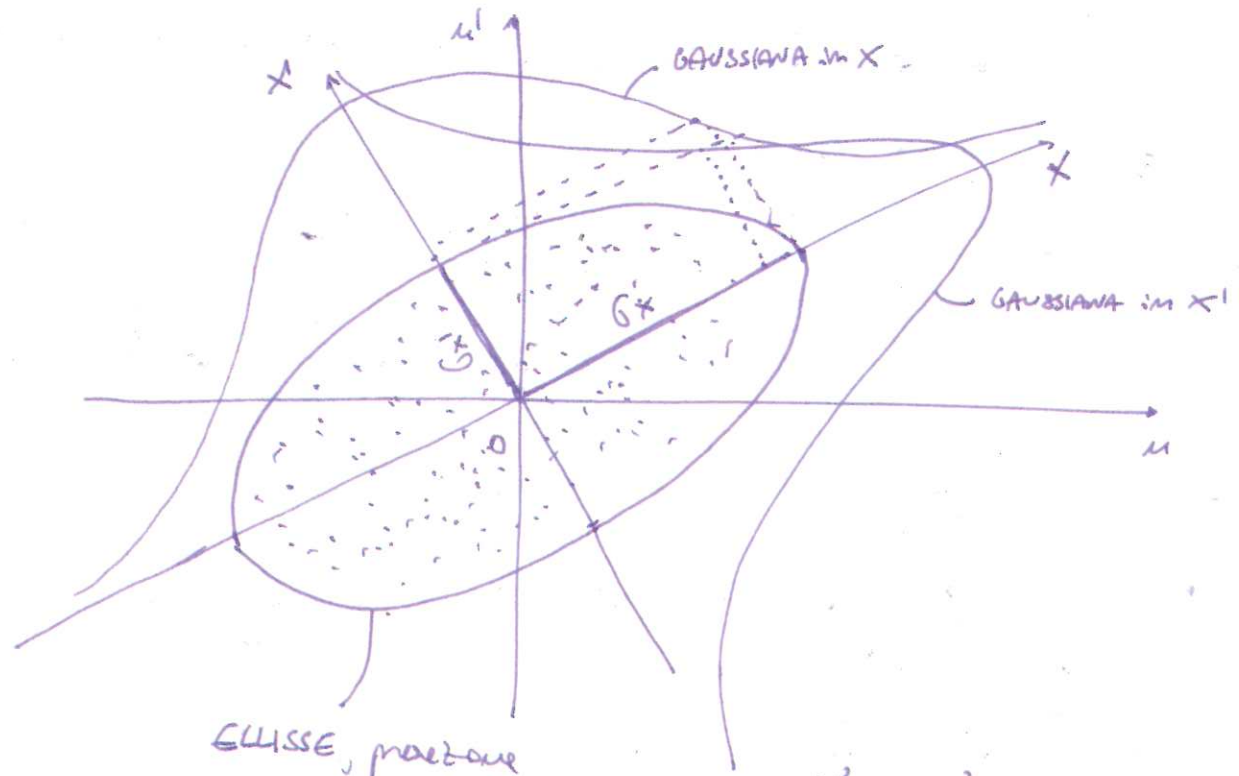
l'eq. di Hill in coordinate normalizzate risulta: $\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + Q_w w = 0$

↑
CONST.
OSCILLATORE ARMONICO

La conservazione dell'entropia (2-D) nello sp. fase è una diretta conseguenza della conservatività delle forze descritte dall'eq. di Hill. Tale proprietà, dimostrata già tramite la "Jacobiana" della trasformazione di coordinate, è alla base del TEOREMA di LIOUVILLE e conservazione dell'area nello sp. fase.

Nello stato, la MISURA dell'ERMITTANZA riflette il compromesso di un insieme di particelle nello sp. fase trasverso, tipicamente 2-D. Il valore dell'entropia è stabilito quale PROPRIETÀ STATISTICA della distribuzione di particelle (es. gaussiana in x e x').

In generale, l'ERMITTANZA STATISTICA \neq ERMITTANZA di LIOUVILLE.



ELLISSE, porzione 2-D di $f(x, x') = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{x'}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{x'^2}{2\sigma_{x'}^2}}$, valutata in $x = \sigma_x, x' = \sigma_{x'}$.

L'equazione dell'ellisse nel sist. di coordinate (x, x') è:

$\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{x'^2}{2\sigma_{x'}^2} = \frac{k^2}{2}$, dove x e x' sono espresse in UNITÀ di σ_x e $\sigma_{x'}$, rispettivamente.

La FRAZIONE di particelle contenute in un'ellisse centrata in $(0,0)$ ed estesa $\sim k$ nello spazio delle fasi, sarà (NORMALIZZATA al valore max. di f):

$$P = \frac{f(0,0) - f(x, x'; k)}{\int f(x, x')} = 2\pi\sigma_x\sigma_{x'} \left[\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{x'}} \left(1 - e^{-\frac{k^2}{2}} \right) \right] = 1 - e^{-\frac{k^2}{2}}$$

dove per def $k = \frac{\# \text{ di DEVIAZIONI STANDARD in } x \text{ e } x' \text{ che racchiude l'ellisse considerato.}}$

Tabella della % di particelle appartenenti a k -volte una dev. st. in $x \in x'$:

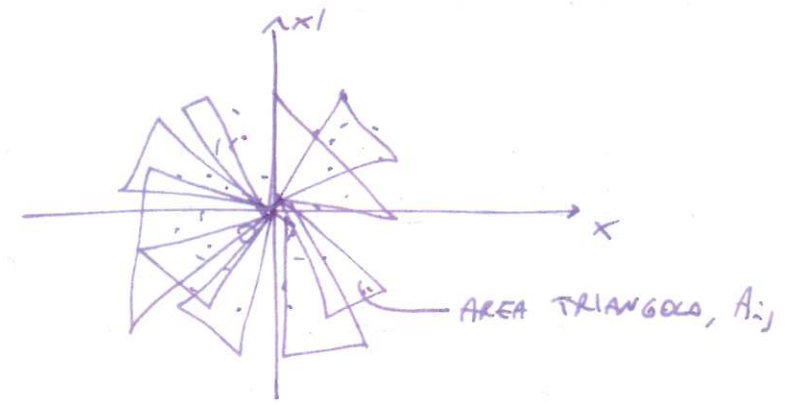
[%] di n	nessun 2- σ particolas envelope	k	
39		1.0	$\epsilon_{RMS} = \frac{\sigma_x}{\beta_x}$
51		1.2	
67.5		1.5	
80		1.8	
86.5		2.0	$\epsilon = \frac{4\sigma_x^2}{\beta_x}$
90		2.15	
95		2.45	$\epsilon = \frac{6\sigma_x^2}{\beta_x}$
98.9		3.0	
99.97		4.0	

Movimento di rivoluzione di C , possiamo sempre scegliere $(u, u') = (x, x')$.
 i "momenti secondi" delle distribuzioni di particelle nella sp. fase: (27)

$$\bar{x}^2 = \frac{1}{N} \sum_1^N x_i^2, \quad \overline{x'^2} = \frac{1}{N} \sum_1^N x_i'^2, \quad \overline{xx'} = \frac{1}{N} \sum_1^N x_i x_i'$$

Definiamo l'entità statistica:

$$E = \sqrt{\bar{x}^2 \overline{x'^2} - (\overline{xx'})^2} = \frac{1}{N} \sqrt{2 \sum_1^N \sum_1^N A_{ij}^2}$$



Se il moto è LINEARE, i triangoli A_{ij} vengono trasformati in altri triangoli \tilde{A}_{ij} e l'area è preservata. Se il moto è NON LINEARE ($m \geq 2$), i triangoli vengono deformati (i lati si incurvano...) e, in generale, l'area totale e quindi l'entità statistica non è PRESERVATA.

Nel caso di moto LINEARE, la corrispondenza tra E STATISTICA ed E di LIOUVILLE è fornita dalla MATRICE del FASCIO. Infatti:

$$E(\text{STAT.}) = \left\{ \det \begin{pmatrix} \bar{x}^2 & \overline{xx'} \\ \overline{xx'} & \overline{x'^2} \end{pmatrix} \right\}^{1/2} \equiv \left\{ \det \begin{pmatrix} \epsilon\beta & -\epsilon\alpha \\ -\epsilon\alpha & \epsilon\gamma \end{pmatrix} \right\}^{1/2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\bar{x}^2} = \sigma_x \Big|_{\text{GAUSSIANA}} = \sqrt{\epsilon\beta}, \quad \text{DIVERGENZA TRASVERSA del FASCIO}$$

$$\sqrt{\overline{x'^2}} = \sigma_{x'} \Big|_{\text{GAUSSIANA}} = \sqrt{\epsilon\gamma}, \quad \text{DIVERGENZA ANGOLARE del FASCIO}$$

↑
 vengono definite in termini delle FRAZIONI di fascio considerate, come $E_{\text{MISUR.}} = E_{\text{STAT}}(P)$.

~~ENTITÀ STATISTICA NORMALIZZATA~~

~~$E_g \equiv E = \sigma_x \sigma_{x'} = \text{cost. in assenza di forze dissipative (o } x')$
 In presenza di ACCELERAZIONE, def. $P_x = x' p_x = \gamma m_0 \beta x c = \text{cost.} \rightarrow x' \propto \frac{1}{\beta}$~~

~~$E_m \equiv \beta E = \beta \sigma_x \sigma_{x'} = \frac{\sigma_x \sigma_{p_x}}{m_0 c} = \text{const.} \quad \left[E_g(x) \approx \frac{E_m}{\beta} \right]$~~

EMITTANZE

1) EMITTANZA STATISTICA GEOMETRICA (o NATURALE):

$$E_x := \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle x x' \rangle^2} \neq \sigma_x \sigma_{x'}$$

And' è la dipendenza di E_x dall'energia? $q_x = 0$

$$x' = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{v_x}{v_z} = \frac{\gamma m_0 \beta_x c}{\gamma m_0 \beta_z c} = \frac{p_x}{p_z}$$

\Rightarrow in presenza di accelerazione (istantanea, per semplicità), $p_x = \text{cost. ma}$
 $p_z \rightarrow p_z + |dp_z| \Rightarrow x' \rightarrow x' - |dx'|$

\Rightarrow passando a quantità RMS (STD): $x' \rightarrow \sigma_{x'}$

in presenza di accelerazione $p_x \rightarrow \sigma_{p_x}$

osserviamo che:

$p_z \approx p_{z,s}$ (average long. momentum)

$$E_x = \sigma_x \sigma_{x'} \sim \frac{1}{\beta_z \gamma} \sim \frac{1}{\gamma}$$

2) EMITTANZA STATISTICA NORMALIZZATA:

definiamo una emittanza in funzione delle proprietà statistiche della distribuzione di particelle nello spazio fase trasversale, MA INDIPENDENTE dall'ENERGIA del fascio \rightarrow rilevante per il "confronto" della qualità del fascio in LINACS.

Perché in accelerazione longitudinale (RF) $\sigma_{p_x} = \text{cost.}$, definiamo:

$$E_{x,n} := \left| \beta_z \gamma \sigma_x \sigma_{x'} \right| = \frac{\sigma_x \sigma_{p_x}}{m_0 c} \xrightarrow{\beta_z \rightarrow 1} \left| \sigma_{E_x} \right|$$

3) EMITTANZA DI LIOUVILLE

$$E_{x,l} := \int_{A_x} x dp_x \sim \sigma_x \sigma_{p_x}, \text{ INDIPENDENTE dall'ENERGIA}$$

N.B.: $E_x, E_{x,n}$ sono definite in senso statistico \Rightarrow sono quantità preservate ad energia costante e in appat. dell'eq. Hall, cioè:
1) LINEARITÀ del moto e 2) ASSENZA di FORZE DISSIPATIVE

$E_{x,l}$ è una emittanza normalizzata all'energia e conservata in assenza di forze dissipative, MA ammette la presenza di moto NONLINEARE (vedi dim. teo Liouville).



ULTIMATE BEAM EMITTANCE

Principio di indeterminazione di Heisenberg:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \hbar = \text{cost. di Planck}$$

Consideriamo: $\Delta x =$ "spazio" fisico occupato dal fascio di particelle

$\Delta p_x =$ "spazio" in momento occupato dal fascio di particelle

Se Δp_x l'estensione del momento di una particella, Δp_z l'angolo longitudinale. Allora def. DIVERGENZA ANGOLARE della particella:

$$\Delta \theta = \frac{\Delta p_x}{\Delta p_z} = \frac{\Delta p_x}{\beta \gamma m c} \approx \frac{\Delta p_x}{\gamma m c \beta}$$

\Rightarrow lo spazio MINIMO occupato dal fascio di particelle nello Spazio-fasi pseudo-canonicali è:

$$\Delta x \Delta \theta \approx \frac{\Delta x \Delta p_x}{\gamma m c \beta} \geq \frac{\hbar}{2 \gamma m c \beta} = \frac{\lambda_c}{2 \beta}, \quad \lambda_c = \text{LUNGH. D'ONDA COMPTON}$$

$$\Rightarrow \beta \gamma E_x = E_{x, \text{min}} \geq \frac{\lambda_c}{4 \pi}$$

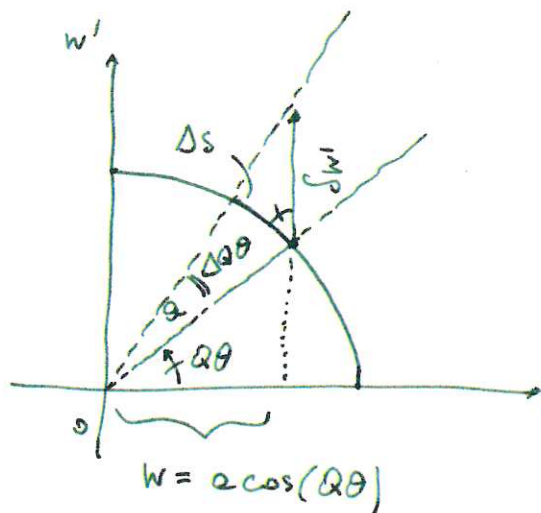
emittanza trasversa NORMALIZZATA

data una particella con energia totale $E = \gamma m c^2$, λ_c è la lunghezza d'onda del fotone avente la stessa energia

PERTURBAZIONE QUADRUPOLE - RISONANZA (del 2° ORDINE)

Consideriamo lo spazio delle fasi di FLOQUET e applichiamo al moto di singola particella una perturbazione $x' \sim k l \Delta x_q$, cioè un "colpo" angolare nella parte del quadrupolo, dovuto al DISALLINEAMENTO del quadrupolo rispetto al fascio.

COORDINATE NORMALIZZATE di FLOQUET: $w(\varphi) = \frac{x}{\sqrt{\beta_x}} = \sqrt{\epsilon} \cos \varphi$



$w'(\varphi) = \frac{dw}{d\varphi} = -\sqrt{\epsilon} \sin \varphi$
 φ è variabile indipendente

$Q := \frac{\varphi}{2\pi}$ TUNE di BETATRIONE

Focalizzazione su un quadrupolo:

$x' = k l x = k l (x_\beta + \Delta x_\beta) = k l x_\beta + k l \Delta x_\beta$
 $= k l x_\beta + \delta(k l) x_\beta$

$L := k l \frac{\Delta x_\beta}{x_\beta}$

$\Rightarrow \delta x' = \delta(k l) x_\beta$

poiché $w' = \sqrt{\beta_x} x'$ o $x' = 0$, (nel quadrupolo)

$\Rightarrow \delta w' = \sqrt{\beta_x} \delta x' = \sqrt{\beta_x} \delta(k l) \sqrt{\beta_x} w = \beta_x \delta(k l) w$

$\Delta s \approx \delta w' \cos(Q\theta)$
 $\Delta Q \cdot \theta \approx \frac{\Delta s}{a}$ } pm $\delta w' \ll w'$

\Downarrow

$(\Delta Q)_{turn}$ = variazione del tune di betatrone dopo un giro, o conseguenza della perturbazione singola nel quadrupolo =

$\cong \frac{1}{2\pi} \frac{\delta w' \cos(Q\theta)}{a} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a} \beta_x \delta(k l) w \cos(Q\theta) =$

$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a} \beta_x \delta(k l) \frac{a}{2} \cos^2(Q\theta) = \frac{1}{4\pi} \beta_x \delta(k l) [1 + \cos(2Q\theta)]$

$\Rightarrow (\Delta Q)_{turn}$ è MASSIMO per $2Q\theta = 2\pi m$, $m \in \mathbb{N}$ cioè, dopo un giro $\theta = 2\pi$

per $\boxed{2Q = m}$, RISONANZA del 2° ORDINE.
 (O MEZZO INTERO)

In pratica, ogni errore $\Delta(KL)$ genera un TUNE-SHIFT (coerente).
 Nel caso di un quadrupolo DISALLINEATO, il fascio risente una componente
 DIPOLARE che DISTORCE la ORBITA CHIUSA. La perturbazione è tale che l'effetto
 è sempre degli MEZZO-INTERO del TUNE di BETATRONE \rightarrow RISONANZA.
 La perturbazione porta il fascio ad ampiezza di oscillazione sempre
 maggiore, fino all'INSTABILITÀ.

CROMATISMO NATURALE.

Consideriamo ora una forma diversa di perturbazione quadrupolare
 e partire dall'espressione GENERALE per il TUNE-SHIFT:

$$\Delta Q \approx \frac{1}{4\pi} \oint \beta(s) \tilde{K}(s) ds, \text{ dove } \tilde{K}(s) = \Delta K(s)$$

Consideriamo massimamente l'eq. di Hill con ERRORE di ENERGIA, δ :

$$x'' + k(1-\delta)x = 0; \quad (\text{convezione } k > 0, \text{ OF } \text{fascio})$$

$$x'' + kx + k\delta x = 0;$$

\hookrightarrow
 K , perturbazione CROMATICA: particelle con
 energia diverse ($\delta \neq 0$) subiscono una
 focalizzazione diversa (a parità di k
 impostato nel quadrupolo).

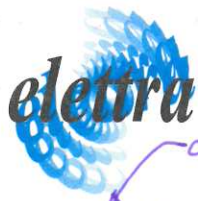
\Rightarrow $k\delta$ induce un TUNE-SHIFT: $\Delta Q(\delta) = -\frac{\delta}{4\pi} \oint \beta(s) k(s) ds$

Si nota che la focalizzazione RESULTANTE in una MAGLIA a GRADIENTI ALTERNI
 è sempre del tipo OF, in ENTRAMBI I PIANI \Rightarrow il CROMATISMO
NATURALE, $\Delta Q(\delta)$, è sempre NEGATIVO (convezione OF \sim $k > 0$).

$\delta \hookrightarrow$ Def. $\left[\sum_{x,y} = \frac{\Delta Q_{x,y}}{\delta} \right]$ (LINEARE in δ)

SESTUPOLI.

Il cromatismo lineare, di origine quadrupolare, può essere compensato
 con l'introduzione di indici di campo di ORDINE SUPERIORE ($M \geq 2$).
 Il più basso ordine dopo quello quadrupolare è il SESTUPOLARE.
 Per costruzione, il MAGNETE SESTUPOLARE ha una mappa di campo
 NORMALE in un piano, mentre ACCOPPIA la eq. del moto x e y nell'altro
 piano.

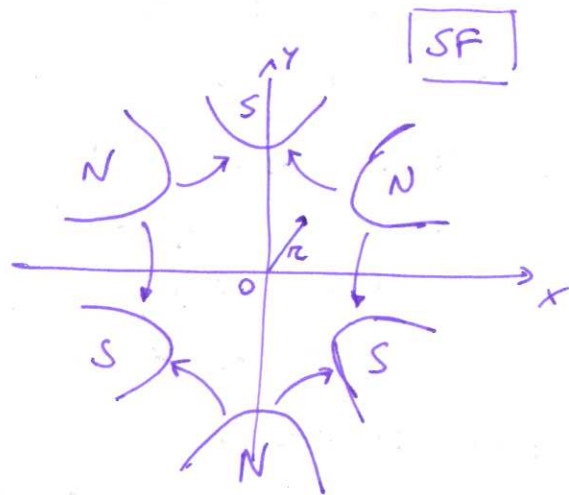


COEFF. "NORMALE"

$$B_y^{SEAT} = b_2 \left(\frac{\pi}{R} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{J_{By}}{J_{\pi^2}} \right) R^2 \frac{\pi^2}{R^2} \equiv \frac{1}{2} g'(x^2 + y^2);$$

$$B_x^{SEAT} = a_2 \left(\frac{xy}{R^2} \right) \equiv g'xy;$$

COEFF. "SKEW"



Sostituiamo nelle precedenti: $x = x_\beta + x_\epsilon$, $y = y_\beta + y_\epsilon$:

$$B_y = \frac{g'}{2} (x_\beta^2 + x_\epsilon^2 + 2x_\beta x_\epsilon) + \frac{g'}{2} (y_\beta^2 + y_\epsilon^2 + 2y_\beta y_\epsilon) = \frac{1}{2} g'(x_\beta^2 - y_\beta^2) + \frac{1}{2} g'(D_x^2 - D_y^2) d^2 + g'x_\beta D_x d - g'y_\beta D_y d;$$

ABERRAZ. GEOM. del 2° ORDINE ABERRAZ. CROMATICA del 2° ORDINE

$$B_x = g'x_\beta y_\beta + g'D_x D_y d^2 + g'y_\beta D_x d + g'x_\beta D_y d;$$

equivalente ad un GRADIENTE quadrupolo $\propto D_x$, in presenza di errore canonico

⇒ semplicemente al quadrupolo, dobbiamo al GRADIENTE SESTUPOLORE NORMALIZZATO: $m = \frac{2g'}{P_{\beta 0}} [m^{-3}]$

⇒ sostituiamo m (e volte anche "k2") nell'espressione del CROMATISMO:

$$\Delta Q_x = -\frac{1}{4\pi} \oint ds [\beta_x k d] + \frac{1}{4\pi} \oint ds [\beta_x m D_x d] = -\frac{1}{4\pi} \oint ds \beta_x [k - m D_x]$$

$$\Delta Q_y = +\frac{1}{4\pi} \oint ds [\beta_y k d] + \frac{1}{4\pi} \oint ds [\beta_y m D_x d] = +\frac{1}{4\pi} \oint ds \beta_y [k + m D_x]$$

⇒ per correggere contemporaneamente ξ_x e ξ_y , abbiamo bisogno di ALMENO 2 FAMIGLIE di SESTUPOLI (2 gruppi, vedi sopra). Il gradiente m è MINIMIZZATO a parità di k , da una GRANDE D_x .

NOTA 1: il cromatismo viene solitamente compensato per evitare che al tune si sposti su risonanze dell'intero o del mezzo-intero, indotte da "instabili" distanze dell'orbita in presenza di quadrupoli.

NOTA 2: l'introduzione di sextupoli implica: 1) sintonie ottiche ad ordine superiore che degradano l'ampiezza statistica (NONLINEARITÀ!), 2) indici di campo di ordine $M=2$ che sono legati a RISONANZE del TERZO-INTERO....

NOTA 3: l'ottimizzazione della STABILITÀ del moto del fascio nell'acceleratore su N giri $\rightarrow \infty$, viene ~~data~~ calcolata numericamente con codici che includono ordini superiori \Rightarrow APERTURA DINAMICA: regione (x, y) in cui il moto è STABILE, pur in presenza di perturbazioni cronotiche e geometriche.

NOTA 4: talvolta, la correzione di risonanze ad ordine superiore viene compensata includendo MAGNETI con ordine superiore (es. OTTOPOLI) \Rightarrow il problema è più complesso ma grazie alle perturbazioni e livelli di "forze" minori....

NOTA 5: in teoria, risonanze $3Q = p$ sextupolari potrebbero essere evitate con m molto elevato, dato D_x molto grande. In pratica, esistono MAGLIE di MINIMIZZAZIONE di E_x che sopprimono D_x RIDOTTA \Rightarrow conflitto con la stabilità.

$M_0 = \begin{pmatrix} \cos \Delta \mu_0 & \beta \sin \Delta \mu_0 \\ -\frac{1}{\beta} \sin \Delta \mu_0 & \cos \Delta \mu_0 \end{pmatrix}$ 1-turn unperturbed lattice matrix

$m_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$, quadrupole matrix in thin lens approximation, unperturbed. $1/f = k_0 \Delta s$

$m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$, same as above, BUT NOW PERTURBED by error:
 $\frac{1}{f} = (k_0 + \Delta k) \Delta s$
 ↑ FOCUSING ERROR

$M =$ perturbed 1-turn matrix $= m m_0^{-1} M_0 =$
 add the perturbed quad ↓ "subtract" the nominal quad

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (k_0 + \Delta k) \Delta s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_0 \Delta s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Delta \mu_0 & \beta \sin \Delta \mu_0 \\ -\frac{1}{\beta} \sin \Delta \mu_0 & \cos \Delta \mu_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \Delta \mu_0 & \beta \sin \Delta \mu_0 \\ (k_0 + \Delta k) \Delta s \cos \Delta \mu_0 + & -\beta k_0 \Delta s \sin \Delta \mu_0 + \\ -k_0 \Delta s \cos \Delta \mu_0 + & + \beta k_0 \Delta s \sin \Delta \mu_0 + \\ -\frac{1}{\beta} \sin \Delta \mu_0 & + \cos \Delta \mu_0 + \beta \Delta k \Delta s \sin \Delta \mu_0 \end{pmatrix};$$

Perturbed phase advance $\Delta \mu$: $\cos \Delta \mu = \frac{1}{2} \text{tr} M = \cos \Delta \mu_0 + \frac{1}{2} \beta \Delta k \Delta s \sin \Delta \mu_0$

$\Rightarrow (\cos \Delta \mu - \cos \Delta \mu_0) = \frac{1}{2} \beta \Delta k \Delta s \sin \Delta \mu_0 \approx -\sin \Delta \mu_0 \Delta \mu$

$\Delta \mu - \Delta \mu_0 \ll \Delta \mu_0$

$\Rightarrow \Delta Q = \frac{\Delta \mu}{2\pi} = -\frac{1}{4\pi} \beta \Delta k \Delta s$

! $\Delta k =$ chromatic error $= k_0 \delta$ and integrate over Δs along the ring:

$\Delta Q_{x,y} = -\frac{1}{4\pi} \int \Delta s \beta_{x,y} k_0 \delta \Rightarrow \xi_{x,y} = \frac{\Delta Q_{x,y}}{\delta} = -\frac{1}{4\pi} \int \Delta s \beta_{x,y} k_0$

v.B.: $\xi_{x,y}|_{MAT}$ IS ALWAYS NEGATIVE (both planes) in AG LATTICES because overall quad focusing produces FOCUSING in both planes (convention, $k_0 \neq 0$).

CHROMATISMO CARRETTO (SESTUPOLI)

Sextupole field:
$$\begin{cases} B_y = \frac{1}{2} g' (x^2 - y^2) \\ B_x = g' x y \end{cases}, \quad g' = \left(\frac{dB_y}{dx^2} \right)_{x=y=0}$$

From Hill's eq:
$$\begin{cases} x = x_\beta + x_E = x_\beta + D_x d \\ y = y_\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_y = \frac{1}{2} g' (x_\beta^2 + D_x^2 d^2 + \underline{2x_\beta D_x d} - y_\beta^2) \\ B_x = g' (x_\beta y_\beta + y_\beta \underline{D_x d}) \end{cases} \rightarrow \text{LINEAR FOCUSING with betatron oscillations with effective gradient } \propto g' D_x$$

$O(x_\beta^2, y_\beta^2, d^2)$ are

2nd ORDER ABERRATIONS

(neglect in the following for the purpose of LINEAR CHROMATICITY)

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m D_x \Delta S & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{sextupole "linear" matrix in thin lens approximation, } m := \frac{e p'}{p z}$$

M^{com} = perturbed matrix with chromaticity correction = $SM =$

$$= \begin{pmatrix} \cos \Delta \mu_x & \beta \sin \Delta \mu_x \\ \dots & \cos \Delta \mu_x + \beta \Delta k \Delta S \sin \Delta \mu_x + m D_x \Delta S \beta \sin \Delta \mu_x \end{pmatrix};$$

Phase advance: $\cos \Delta \mu_x = \frac{1}{2} \text{tr } M = \cos \Delta \mu_0 + \frac{1}{2} \beta \Delta S \sin \Delta \mu_0 (\Delta k + m D_x)$;
 $(\cos \Delta \mu_x - \cos \Delta \mu_0) \approx -\sin \Delta \mu_0 \cdot \Delta \mu_x = \frac{1}{2} \beta \Delta S \sin \Delta \mu_0 (\Delta k + m D_x)$

$$\Rightarrow \Delta Q_{x,y}^{\text{com}} = \frac{\Delta \mu_{x,y}^{\text{com}}}{2\pi} = -\frac{\phi}{4\pi} \int ds \beta_{x,y} (k_0 + m D_x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta Q_x^{\text{com}} = \frac{\Delta Q_x^{\text{com}}}{\phi} = -\frac{1}{4\pi} \int ds \beta_x (|k_0| + m D_x) \\ \Delta Q_y^{\text{com}} = \frac{\Delta Q_y^{\text{com}}}{\phi} = -\frac{1}{4\pi} \int ds \beta_y (-|k_0| + m D_x) \end{cases}$$

FORCE both indep. eqs. to 0
 \Downarrow
 2 independent knobs
 \Downarrow

SF, SD
 (two sextupole families)

PERTURBAZIONE QUADRUPOLE - DISTORSIONE DELL'ORBITA

Un disallineamento di un quadrupolo RELATIVO alla posizione del fascio genera un calcio angolare (kick) di tipo dipolare (= DEFLESSIONE dell'ORBITA). Questo effetto è denominato "FEED-DOWN".

Vediamo la distorsione di una TRAIETTORIA, e la sua conseguente CORREZIONE, su una LINEA APERTA (ex. LINA).

Matrice di trasporto: $M_{1 \rightarrow 2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} \cos \Delta\mu_{12} + \alpha_2 \sin \Delta\mu_{12} & \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin \Delta\mu_{12} \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

L'effetto di feed-down è: $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ kl & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + \Delta x \\ x_0' \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow x' = \underbrace{klx_0 + x_0'}_{x_3'} + \underbrace{kl\Delta x}_{\theta}$

Quindi:

$\begin{pmatrix} x_p \\ x_p' \end{pmatrix} = M_{1 \rightarrow 2} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' + \theta \end{pmatrix}$ ← osservo la propagazione del kick θ e della perturbazione

$x_p(2) = \underbrace{M_{11}x_0 + M_{12}x_0'}_{x_3(2)} + \theta \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin \Delta\mu_{12}$

x_p è la coordinata perturbata, osservata al punto 2
Il punto 1 è la posizione alla quale avviene la perturbazione

$\Rightarrow \Delta x_p(2) = x_p(2) - x_3(2) = \theta \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin \Delta\mu_{12}$
 $= kl \Delta x(1) \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin \Delta\mu_{12}$

CORREZIONE della TRAIETTORIA: per ridurre $\Delta x_p(2) \rightarrow 0$ posso inserire elementi dipolari (CORRETTORI) che portino la posizione del fascio al valore desiderato, osservata tramite opportuni elementi di DIAGNOSTICA quali = BEAM POSITION MONITORS.

Dalla relazione precedente, si osserva che il kick richiesto si minimizza: (θ) è MINIMIZZATO, cioè $\Delta x(2)$ la mia sensibilità MASSIMA al kick, quando β_1, β_2 sono GRANDI e $\Delta\mu(CORR - BPM) \equiv \frac{\pi}{2}$.

Calcoliamo ora la perturbazione quadrupolare nel caso di una orbita chiusa (ex. SINCROTRONE). In tal caso superano la dimensione dell'orbita perturbata: $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix}$

che ci permette di scrivere:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = (I - M)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} M = \begin{pmatrix} \cos \Delta\mu & \beta \sin \Delta\mu \\ -\frac{1}{\beta} \sin \Delta\mu & \cos \Delta\mu \end{pmatrix}_{i\text{-turn}} \\ \Delta\mu = 2\pi Q \end{cases}$$

$$(I - M)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \cos 2\pi Q & -\beta \sin 2\pi Q \\ \frac{1}{\beta} \sin 2\pi Q & 1 - \cos 2\pi Q \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2(1 - \cos 2\pi Q)} \begin{pmatrix} 1 - \cos 2\pi Q & \beta \sin 2\pi Q \\ -\frac{1}{\beta} \sin 2\pi Q & 1 - \cos 2\pi Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\beta \sin 2\pi Q}{2(1 - \cos 2\pi Q)} \\ -\frac{\sin 2\pi Q}{2\beta(1 - \cos 2\pi Q)} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x(1\text{-turn}) = \frac{\theta\beta}{2} \frac{\sin 2\pi Q}{1 - \cos 2\pi Q} = \frac{\theta\beta}{2} \frac{2 \sin \pi Q \cos \pi Q}{2 \sin^2 \pi Q} = \frac{1}{2 \sin \pi Q} \theta\beta \cos \pi Q$$

\Rightarrow generalizziamo ad una sovrapposizione LINEARE di N perturbazioni indipendenti ($N \gg 1$) e osserviamo la posizione del fascio alle diverse coordinate s :

$$x(s) = \sum_{i=1}^N \theta_i \frac{\sqrt{\beta_i \beta_x(s)}}{2 \sin(\pi Q_x)} \cos(\mu_x(s) - \mu_{x,i} + \pi Q_x) \quad \#$$

ORBITA PERTURBATA
del CM del
fascio,
sovrapposte al moto
di BETATRONE



i = posizione del kick DIPOLARE
 s = posizione del BPM (osservazione)

Analogamente alle linee aperte, possiamo usare le relazioni precedenti per stabilire la "distanza" relativa di CORRETTORI e BPM (osserviamo una correlazione 1-1):

se $Q_x \rightarrow 0$ oppure 1 , $\cos(\Delta\mu + \pi Q) \rightarrow \pm \cos \Delta\mu$
 $\Rightarrow \Delta\mu(\text{kick-BPM}) \equiv m\pi$

se $Q_x \rightarrow 0,5$, $\cos(\Delta\mu + \pi Q) \rightarrow -\sin \Delta\mu$
 $\Rightarrow \Delta\mu(\text{kick-BPM}) \equiv m\frac{\pi}{2}$

FATTORE DI AMPLIFICAZIONE

La perturbazione di disallineamento fisico - quadrupoli sull'orbita chiusa può essere quantificata in senso statistico, usando il teorema del Limite Centrale. Consideriamo $N \gg 1$ kicks indipendenti:

$$\sqrt{\langle Y(s)^2 \rangle} = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2\sqrt{2} \sin(\pi Q)} \sqrt{\langle \theta_q^2 \beta_q \rangle} = \quad \langle a \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i$$

$\sigma_y(s)$

$$= \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2\sqrt{2} \sin(\pi Q)} \sqrt{\langle k_q^2 l_q^2 \beta_q \Delta y_q^2 \rangle} \equiv A(s) \sigma_q$$

STD della
vibrazione
dell'orbita
al punto s.

STD del
disallineamento

$$\left| \frac{N_q \sqrt{\beta(s)}}{2\sqrt{2} \sin(\pi Q)} \sqrt{\langle k_q^2 l_q^2 \beta_q \rangle} \right|$$

FATTORE di AMPLIFICAZIONE
della perturbazione