FORMALISMO LAGRANGIANO

MA1

Consideriamo un sistema di N particelle fondamentali, caratterizzato da N coordinate spaziali "generalizzate" ed N velocità "generalizzate" (in tale definizione di coordinate, il sistema è libero da "vincoli dinamici", $f(\vec{x},t)\neq 0$):

$$\vec{q}(t) = (q_1, \cdots q_N)_t \quad , \quad \dot{\vec{q}}(t) = \frac{d\vec{q}}{dt} = (\dot{q}_1, \cdots \dot{q}_N)_t$$

$N :=$ # GRADI DI LIBERTA' del SISTEMA

Sia $L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ una funzione tale che il moto del sistema da un istante $t=t_1$ ad un istante $t=t_2$ sia determinato dalla evoluzione di L in base al PRINCIPIO di MINIMA AZIONE:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)\,dt \quad \text{è MINIMO}$$

cioè deve valere: $\delta W = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}+\delta\vec{q}, \dot{\vec{q}}+\delta\dot{\vec{q}}, t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)\,dt \equiv 0$

Al primo ordine nelle coordinate $\vec{q}, \dot{\vec{q}}$:

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} \right) dt =$$

PER PARTI

$$= \left| \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q \right|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \right] \delta q\, dt$$

Se supponiamo una variazione di W ma con ESTREMI FISSI, $\delta\vec{q}(t_1) = \delta\vec{q}(t_2) \equiv 0$, allora il primo termine di cui sopra è NULLO, e dal secondo:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0} \quad \forall i$$

(N - set of equations of motion of 2^{nd} ORDER)

EQUAZIONI DEL MOTO DI LAGRANGE

Da LANDAU & LIFSHITZ (1960), l'omogeneità del tempo e l'isotropia dello spazio sono sufficienti a suggerire una L in accordo coi risultati sperimentali, per un sistema di N particelle non-interagenti libere nello spazio:

$$L = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \dot{q}_i^2 \equiv T$$

In presenza di un potenziale scalare di interazione reciproca $V(\vec{q})$:

$$L = T - V$$

CONSERVATIVO, in quanto NON dipende da $\dot{\vec{q}}$

In tal caso, le equazioni del moto di Lagrange producono:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m_i \dot{q}_i \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{m_i \ddot{q}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}}\ ,$$

EQ. DEL MOTO DI NEWTON

e definiamo FORZA $F(q_i) = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$.

In generale, è possibile definire una variabile indipendente da $\vec{q}$ tramite $\dot{\vec{q}}$, tale che il MOMENTO (QUANTITÀ DI MOTO) GENERALIZZATO sia $\boxed{p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}$. Dalla def segue: $\boxed{\frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = F(q_i)}$

Proprietà di L in funzione del TEMPO:

$$\frac{d}{dt} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} =$$

$$= \underbrace{\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)}_{= \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

If we now apply to $L = T - V$, we find:

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\sum_i m_i \dot{q}_i^2}_{2T} - T + V\right) = \frac{d}{dt}(T+V) = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

and IF L does NOT depend explicitly from t: $T + V = \text{const}$.

Definiamo la funzione ENERGIA del SISTEMA:

$$\boxed{E = \left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right)} \equiv \boxed{\sum_i p_i \dot{q}_i - L} = \boxed{T + V}$$

TEO DI NOETHER: ad ogni gruppo di trasformazioni che lascia L invariata in forma, corrisponde una quantità conservata nel tempo.
(Es: traslazione in tempo $\Rightarrow$ energia costante).

FORMALISMO HAMILTONIANO

MA2

La trasformata di LEGENDRE di L rispetto a $\dot{q}$, che fornisce $\dot{q}$ in funzione di p, è detta HAMILTONIANA del sistema:

$$\boxed{H(\vec{q},\vec{p},t) = \sum_{i}^{N} p_i \dot{q}_i - L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)}$$

Abbiamo già visto che per $L = T - V$, $H \equiv E$.
Dalla definizione di H troviamo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \\[2ex] \dfrac{\partial H}{\partial q_i} = -\dfrac{\partial L}{\partial q_i} = -\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\dfrac{dp_i}{dt} = -\dot{p}_i \end{cases}$$

EQ. DEL MOTO DI HAMILTON

2N - set di eq. del moto differenziali del 1° ORDINE.

TEOREMA DI LIOUVILLE: vedi dimostrazione di M. Weiss (DISPENSE)

TRASFORMAZIONI CANONICHE:

Consideriamo leggi di trasformazione di coordinate generalizzate del tipo:

$$\begin{cases} Q_i = Q_i(q_1, \dots q_N, p_1, \dots, p_N) \\ P_i = P_i(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) \end{cases} \qquad i = 1, \dots, N$$

Esse sono dette CANONICHE se conservano la forma delle eq. di Hamilton:

$$\begin{cases} \dfrac{dQ_i}{dt} = \dfrac{\partial H'(\vec{Q},\vec{P})}{\partial P_i} \\[2ex] \dfrac{dP_i}{dt} = -\dfrac{\partial H'(\vec{Q},\vec{P})}{\partial Q_i} \end{cases} \quad \text{, dove} \quad H'(\vec{Q},\vec{P}) = H'(\vec{Q}(\vec{q},\vec{p}), \vec{P}(\vec{q},\vec{p}))$$

Teo: le trasformazioni canoniche preservano aree e volumi nello spazio fasi (INVARIANTI di POINCARÉ). Ad es:

$$\int \prod_{i}^{N} dp_i\, dq_i = \int \prod_{i}^{N} dP_i\, dQ_i \qquad \text{PHASE SPACE VOLUME (Liouville)}$$

$$\iint \sum_{i}^{N} dp_i\, dq_i = \iint \sum_{i}^{N} dP_i\, dQ_i \qquad \text{SUM OF PHASE SPACE AREAS projected onto the set } (p_i, q_i)$$

A SHORT DEMONSTRATION OF LIOUVILLE'S THEOREM*

M. Weiss
CERN, Geneva, Switzerland

ABSTRACT
A brief demonstration of Liouville's Theorem is given by applying the Hamiltonian.

An ensemble of particles evolving in a system of external forces (space and velocity dependent) and self forces (space charge) is described by two families of canonically conjugated variables (coordinates) q and p. The equations of motion form a system of first-order differential equations of the coordinates

$$\dot{q} \text{ and } \dot{p} \,,$$

where the dot indicates derivatives with respect to time.

If the system is non-dissipative, one can obtain the equations of motion from a function called Hamiltonian:

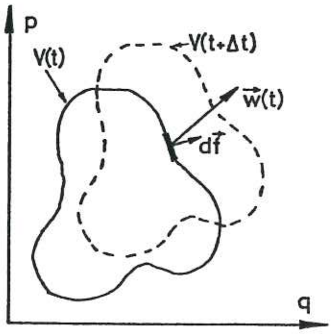
$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \,.$$

The Hamiltonian is in general also a function of time:

$$H(q,p,t) \,.$$

An ensemble of particles, at a given moment t, occupies a volume V(t) in the (q,p) space called the phase space.



$d\vec{f}$ ... vector of surface element

$\vec{w}(t)$ ... phase space velocity of surface element:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix}$$

* Derivation shown at a discussion session

At the time $t + \Delta t$, the particles occupy another volume $V(t+\Delta t)$. It can easily be shown that these volumes are the same:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \underbrace{\int \vec{w}\cdot d\vec{f}}_{\substack{\text{surface}\\ \text{integral}}} \rightarrow \underbrace{\int (\nabla\cdot\vec{w})dv}_{\substack{\text{volume}\\ \text{integral}}} = \int \Big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial}{\partial p}\dot{p}}_{\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q\partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}\right) = 0} \Big)\, dv = 0$$

(Gauss Theorem) (Hamilton)

The volume $V(t)$ remains constant, if the motion can be represented by a Hamiltonian. This is true also when H is an explicit function of time. We conclude:

In non-dissipative systems, the particles move like an incompressible fluid in <u>phase space</u>. This is Liouville's Theorem.

EQUAZIONI DI HILL da formalismo HAMILTONIANO.

FORZA DI LORENTZ:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}\right)$$

EQ. DI MAXWELL nel vuoto:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{cases}$$

LAGRANGIANA DI PARTICELLA LIBERA:

Dal 1° postulato della Rel. Sp. deduciamo che il Principio di Minima Azione (che determina l'evoluzione fisica di un sistema di punti materiali) debba essere un INVARIANTE DI LORENTZ, t.c. $\delta W = 0$ in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Allora anche il singolo integrale W deve esserlo:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \mathcal{L}\, d\tau = \text{INV.}$$

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}, \text{ TEMPO PROPRIO.}$$

Perché $d\tau$ è un inv. di Lorentz $\Rightarrow$ $\boxed{\gamma \mathcal{L}(\tau) = \text{INV.}}$

Richiediamo per $\mathcal{L}$:

1) invariante per traslazioni $\Rightarrow$ non dipende esplicitamente da $\vec{q}$
2) funzione di $\dot{\vec{q}}$ al più al 1° ordine

$\Rightarrow$ $\boxed{\gamma \mathcal{L}_p := -m_0 c^2}$

DIMOSTRA che l'eq. del moto di Lagrange applicata a $\mathcal{L}_p = -\frac{m_0 c^2}{\gamma}$ fornisce $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$ (assenza di forze esterne):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}}_{0} = 0\ ; \quad \frac{d}{dt}\left[(-m_0c^2)\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)\right] = \frac{d}{dt}\left[(-m_0c^2)\frac{1}{2}\gamma(-2u)\frac{1}{c^2}\right] =$$

$$= \underbrace{+m_0\frac{d}{dt}(\gamma u)}_{\frac{dp}{dt}} = \gamma m_0 \dot{u} + m_0 u \frac{d\gamma}{dt} \equiv \frac{d}{dt}(m_0 \gamma u) = 0$$

cvd.

LAGRANGIANA DI SINGOLA PARTICELLA in CAMPO MAGNETO-STATICO $\left(\frac{\partial A}{\partial t}=0\right)$.

Richiediamo le seguenti proprietà:

3) $\mathcal{L} \to \mathcal{L}_p$ per $\phi = 0$, $\vec{A} = 0$

4) sia LINEARE nella CARICA

5) sia LINEARE in ϕ, $\vec{A}$

6) sia LINEARE in $\vec{u}$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = -\frac{m_0 c^2}{\gamma} - e\phi + e\vec{u}\cdot\vec{A}}$$

N.B.: la validità di questa costruzione di $\mathcal{L}$ sarà verificata a posteriori dimostrando che: i) la H associata è l'E totale della particella;
ii) le equazioni di Hamilton portano alle eq. di Hill

MOMENTO CANONICO:

$$P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i}\left(-m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{u_i^2}{c^2}} + e(\vec{u}\cdot\vec{A})_i\right) = \gamma m_0 u_i + e A_i \equiv p_i + e A_i$$

componente i-esima = x, y, z della singola particella

MOMENTO CINETICO

HAMILTONIANA:

$$H = \vec{P}\cdot\vec{u} - \mathcal{L} = \ldots \text{ ricaviamo } \vec{u} = \vec{u}(\vec{P}, \vec{A}) \text{ dalla def. sopra:}$$

$$\vec{u} = \frac{1}{\gamma m_0}\left(\vec{P} - e\vec{A}\right) = \frac{(\vec{P} - e\vec{A})}{\frac{1}{c}\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}} =$$

$$= \frac{(\vec{P} - e\vec{A})}{\frac{1}{c}\sqrt{(\vec{P} - e\vec{A})^2 + m_0^2 c^2}};$$

$$= \ldots \frac{\vec{P}(\vec{P} - e\vec{A})}{\gamma m_0} + \frac{m_0 c^2}{\gamma} + e\phi - \frac{e\vec{A}(\vec{P} - e\vec{A})}{\gamma m_0} =$$

$$= \frac{1}{\gamma m_0}\left[(\vec{P} - e\vec{A})^2 + m_0^2 c^2\right] + e\phi = \frac{(\vec{P} - e\vec{A})^2 + m_0^2 c^2}{\frac{1}{c}\sqrt{(\vec{P} - e\vec{A})^2 + m_0^2 c^2}} + e\phi =$$

$$= \boxed{c\sqrt{(\vec{P} - e\vec{A})^2 + m_0^2 c^2} + e\phi} \equiv E.$$

PARTICELLA LIBERA: dimostra che $H = E = \gamma m_0 c^2$ $(\vec{A} = 0, \phi = 0)$

$$H = \vec{P}\cdot\vec{u} - \mathcal{L} = \gamma m_0 u^2 + \frac{m_0 c^2}{\gamma} = m_0 \gamma\left(u^2 + \frac{c^2}{\gamma^2}\right) = \frac{m_0}{\gamma}\left(\gamma^2 u^2 + c^2\right) =$$

$$= \frac{m_0 c^2}{\gamma}\left(1 + \gamma^2 \beta^2\right) = \frac{m_0 c^2}{\gamma}\left[1 + \gamma^2\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)\right] = \gamma m_0 c^2. \quad \text{cvd.}$$

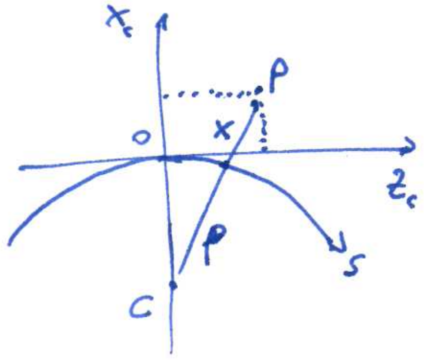
FORMALISMO HAMILTONIANO : EQ. DI HILL

Approssimazioni:

1) campi MAGNETICI LINEARI, TRASVERSI $\Rightarrow$ $\left| \begin{array}{l} A_x = A_y = 0 \\ A_z = A_z(x^2, y^2) \end{array} \right.$

2) accelerazione ADIABATICA ($E \simeq$ cost.) $\Rightarrow \phi \cong 0$

Passaggio di coordinate dal SR CARTESIANO a quello CURVILINEO (FRENET - SERRAT):



$$(x_c, y_c, z_c, p_{xc}, p_{yc}, p_{zc}) \qquad (x, y, s, p_x, p_y, p_s)$$

Dalla geometria del sistema:

$$\begin{cases} x_c = (\rho + x)\cos\frac{s}{\rho} - \rho \\ y_c = y \\ z_c = (\rho + x)\sin\frac{s}{\rho} \end{cases}$$

Costruiamo una FUNZIONE GENERATRICE f che permetta di calcolare i MOMENTI (p_x, p_y, p_s) CONIUGATI alla (x, y, s):

$$f(x, y, s, p_x, p_y, p_s) = -x_c(x)p_{xc} - y_c(y)p_{yc} - z_c(x)p_{zc}$$

tale che essa soddisfi la mappa $\vec{x}_c \to \vec{x}$ al mio segno, infatti:

$$\vec{x}_c = -\frac{\partial F}{\partial \vec{p}_c} = (x_c, y_c, z_c)$$

e infine troviamo:

$$\vec{p} = -\frac{\partial F}{\partial \vec{x}} = -\frac{\partial F}{\partial \vec{x}_c}\frac{\partial \vec{x}_c}{\partial \vec{x}} = \begin{cases} p_x = p_{xc}\cos\frac{s}{\rho} + p_{zc}\sin\frac{s}{\rho} \\ p_y = p_{yc} \\ p_s = -\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\sin\frac{s}{\rho}\,p_{xc} + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\cos\frac{s}{\rho}\,p_{zc} \end{cases}$$

In particolare la componente longitudinale è riscritta come:

$$p_s = +\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\left[p_{zc}\cos\frac{s}{\rho} - p_{xc}\sin\frac{s}{\rho}\right] \equiv \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)p_z$$

Analogamente definiamo le componenti del vettore potenziale:

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_s) = \left(A_{xc}\cos\frac{s}{\rho} + A_{zc}\sin\frac{s}{\rho},\ A_{yc},\ \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\left(A_{zc}\cos\frac{s}{\rho} - A_{xc}\sin\frac{s}{\rho}\right)\right)$$

$$= \left(A_x,\ A_y,\ \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)A_z\right).$$

La HAMILTONIANA risulta:

$$H = c\left[\left(P_z - eA_z\right)^2 + \left(P_y - eA_y\right)^2 + \left(P_x - eA_x\right)^2 + m_0^2c^2\right]^{1/2} =$$

$$= c\left[\frac{(P_s - eA_s)^2}{\left(1+\frac{x}{\rho}\right)^2} + p_x^2 + p_y^2 + m_0^2c^2\right]^{1/2}.$$

Passiamo dalla coordinata t (monotona) $\to$ s (periodica) e definiamo la nuova hamiltoniana $H \to -P_s$:

$$\mathcal{H} = -P_s = -\left(1+\frac{x}{\rho}\right)\left[\left(\frac{H}{c}\right)^2 - p_x^2 - p_y^2 - m_0^2c^2\right]^{1/2} - eA_s =$$

$$= -\left(1+\frac{x}{\rho}\right)\left(p_z + eA_z\right). = -\left(1+\frac{x}{\rho}\right)p_z + eA_s$$

Costruiamo il potenziale vettore A_z che descrive DIPOLI e QUADRUPOLI:

$$A_s = -\frac{p_s}{e}\left[\frac{x}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho^2} - k\right)\frac{x^2}{2} + k\frac{y^2}{2}\right], \quad \text{t.c.} \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

verifichiamo:

$$\begin{cases} B_y = -\dfrac{\partial A_s}{\partial x} = \dfrac{p_s}{e\rho} + \dfrac{p_s}{e\rho}\dfrac{x}{\rho} - \dfrac{p_s}{e}kx = \underbrace{B_{0y}\left(1+\dfrac{x}{\rho}\right)}_{\text{deflessione, weak focusing}} - \underbrace{gx}_{\text{strong focusing}}; \\ B_x = \dfrac{\partial A_s}{\partial y} = -\dfrac{p_s}{e}ky = -gy \end{cases}$$

Eq. di Hamilton:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\dfrac{dp_x}{ds} \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \dfrac{dx}{ds} \end{cases} \longrightarrow \frac{dx}{ds} = \frac{p_x}{p_s} \Rightarrow \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{p_s}\frac{dp_x}{ds} = -\frac{1}{p_s}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{p_s}\left\{-\left(1+\frac{x}{\rho}\right)p_z + p_s\left[\frac{x}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho^2}-k\right)\frac{x^2}{2} + k\frac{y^2}{2}\right]\right\} = \underbrace{\left(\frac{p_z - p_s}{p_s}\right)}_{\delta}\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho^2}-k\right)x;$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} - \left(\frac{1}{\rho^2} - k\right)x = \frac{\delta}{\rho}}$$

Analogamente per y:

$$\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} = \frac{1}{p_s}\frac{dp_y}{ds} = -\frac{1}{p_s}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y} = -\frac{1}{p_s}p_s ky = -ky;$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{y} + ky = 0}$$

MATRICI SIMPLETTICHE e INVARIANTI

L'analisi delle soluzioni dell'eq. Hill ha portato a dimostrare che una matrice di trasporto deve soddisfare $\det M = 1$. Abbiamo dedotto che il GRUPPO di matrici SIMPLETTICHE soddisfa tale requisito (condiz. sufficiente). Dimostriamo ora che $M \in$ Simplettiche è condizione NECESSARIA e SUFFICIENTE, tramite il formalismo hamiltoniano.

$$\begin{cases} \dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \boxed{\dot{v} = J \nabla H}$$

con $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

→ generalizziamo a $2n$-dim:

$$\dot{v} = \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \\ q_2 \\ p_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & 0 \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & -1 & 0 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad \nabla H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \frac{\partial H}{\partial q_2} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Osserviamo che:

$$\begin{cases} v_2 = M v_1 \Rightarrow \dot{v}_2 = M \dot{v}_1 \\ \nabla H(v_1, t_1) = \nabla H(M^{-1} v_2, t_1) = M^{+} \nabla H(v_2, t_2) \end{cases}$$

verifica per $n=1$ x esercizio

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = m_{11} \dot{x}_1 + m_{12} \dot{p}_{x_1} \\ \dot{p}_{x_2} = m_{21} \dot{x}_1 + m_{22} \dot{p}_{x_1} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$M \dot{v}_1 = M J \nabla H(v_1, t_1) = M J \nabla H(M^{-1} v_2, t_1) = \underline{M J M^{+}} \nabla H [\ldots] (v_2, t_2) =$$

$$= \dot{v}_2 = \underline{J} \nabla H(v_2, t_2);$$

$$\Rightarrow \boxed{M J M^{+} = J} \quad \text{condizione di simpletticità}$$

$$\Rightarrow \det J = 1 = \det(M J M^{+}) = \det J \cdot \det M^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\det M = 1}$$

N.B.: se M è matrice $2n$-dim, la condizione di simpletticità impone $n(2n-1)$ VINCOLI agli elementi di M

$\Rightarrow n(\underline{2n}+1)$ elementi INDIPENDENTI. Ex., $n=1 \to C, S, C'$ o $\beta, \alpha, \Delta\mu$

TEO di LIOUVILLE:

$$\int_{\Omega'} d^{2n} z' = \int_{\Omega} \det M \, d^{2n} z = \int_{\Omega} d^{2n} z, \quad \text{o} \quad \int_{\Omega(2D)} d\vec{p} \times d\vec{q} = \oint_{S_p} \vec{p} \, d\vec{q} = \text{const.}$$

Il teo di Liouville afferma che il volume nello spazio delle fasi racchiuso da qualsiasi condizione al contorno (≡ in prossimità di una traiettoria dei punti materiali) di un sistema hamiltoniano (≡ conservativo) è conservato da una trasformazione (≡ mappa) simplettica.

Osservazione $\boxed{1}$: se $H(\vec{q},\vec{p},t) = H(\vec{q},\vec{p}) \Rightarrow H \equiv E = const.$!

Osservazione $\boxed{2}$: se $H(\vec{q},\vec{p},t) = H(q^n, p^n, t) \Rightarrow$ vale ancora Liouville!
(vedi dimostrazione)

Osservazione $\boxed{3}$: il teo. Liouville è un caso particolare di un INSIEME di INVARIANTI (POINCARÉ - CARTAN):

$$\Sigma_{V_2} = \int_{proj(V)} dp_x\, dx + \int_{proj(V)} dp_y\, dy + \int_{proj(V)} dp_z\, dz = const.$$

$$\Sigma_{V_4} = \int_{proj(V_4)} dp_x\, dp_y\, dx\, dy + \int_{proj(V_4)} dp_x\, dp_z\, dx\, dz + \int_{proj(V_4)} dp_y\, dp_z\, dy\, dz = const.$$

SE i sotto-spazi sono DISACCOPPIATI, gli invarianti di Poincaré-Cartan si applicano ai singoli sotto-spazi $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$.

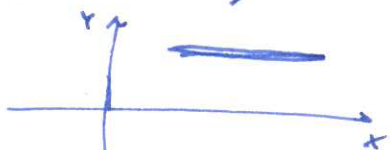
<u>FLAT BEAM</u> (SYNCHROTRON)

Assumiamo ACCOPPIAMENTO (= CORRELAZIONE) nel solo piano TRASVERSO (x,y)

Supponiamo che: $\varepsilon_x + \varepsilon_y \equiv \varepsilon_{x0}$, invariante

Definiamo
$$\begin{cases} \varepsilon_y \equiv k\,\varepsilon_x \\ k = \text{coeff. COUPLING} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{1+k}\,\varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_y = \dfrac{k}{1+k}\,\varepsilon_{x0} \end{cases}$$

Gli errori di allineamento di un sincrotrone determinano tipicamente $k \ll 1 \Rightarrow$ poiché $\beta_x \approx \beta_y$, $\sigma_y \ll \sigma_x$ ("flat beam").



$\Rightarrow$ il prodotto $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_x \varepsilon_y$ è anche invariante, ma ε_x ed ε_y variano lungo l'anello (s) tali da mantenere costante ε_{x0} e $\varepsilon_x^2 \dfrac{k}{(1+k)^2}$.

Inoltre: $(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 = const = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\varepsilon_x\varepsilon_y \Rightarrow \boxed{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 = const.}$!

ROUND BEAM (LINAC)

Quando $k \to 1$ è utile introdurre un nuovo sistema di coordinate nel quale definiamo 2 nuove emittanze - per ciascun spazio-fasi trasverso, ciascuna emittanza COSTANTE lungo s individualmente.
Questo corrisponde a DIAGONALIZZARE la MATRICE del FASCIO.

$m = 2 \Rightarrow M_{4\times4}$,

$$\sigma_{4D}^{app} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} \langle x^2\rangle & \langle xx'\rangle & \langle xy\rangle & \langle xy'\rangle \\ \langle xx'\rangle & \langle x'^2\rangle & \langle x'y\rangle & \langle x'y'\rangle \\ \hline \langle xy\rangle & \langle x'y\rangle & \langle y^2\rangle & \langle yy'\rangle \\ \langle xy'\rangle & \langle x'y'\rangle & \langle yy'\rangle & \langle y'^2\rangle \end{array}\right)$$

Si dimostra che $\forall s$ $\exists$ trasformazione $R(s)$ t.c.

$$\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_s = R(s) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1' \\ u_2 \\ u_2' \end{pmatrix}_s \quad , \quad R \text{ SIMPLETTICA (ricordiamo: } R^t = R^{-1})$$

$$\Rightarrow \sigma_{xy} = \vec{x}\,\vec{x}^t = R\cancel{\vec{u}}(R\cancel{\vec{u}})^t = R\cancel{\vec{u}\vec{u}}^t R^t = R D R^{-1}$$

$$\text{e} \quad D(s) = \left(\begin{array}{cc|cc} \langle u_1^2\rangle & 0 & & \\ 0 & \langle u_1'^2\rangle & & O \\ \hline & & \langle u_2^2\rangle & 0 \\ O & & 0 & \langle u_2'^2\rangle \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\beta_1 & & & \\ & \varepsilon_1/\beta_1 & & O \\ & & \varepsilon_2\beta_2 & \\ O & & & \varepsilon_2/\beta_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \sigma_{xy} = \varepsilon_{4D}^2 = \det(R R^{-1}) \det D = \varepsilon_{eig}^2$$

$\varepsilon_1 = \sqrt{\langle u_1^2\rangle\langle u_1'^2\rangle}$ e $\varepsilon_2 = \sqrt{\langle u_2^2\rangle\langle u_2'^2\rangle}$ sono dette EIGEN-EMITTANCES

In generale sarà $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \to \varepsilon_1 := \varepsilon_+$, $\varepsilon_2 := \varepsilon_-$

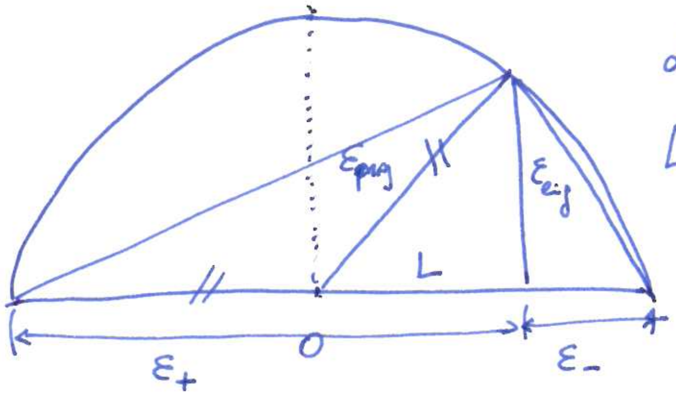
$$\begin{cases} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 = \varepsilon_{x0}^2 = (\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2 = \text{const.} \\ \varepsilon_x \varepsilon_y = \varepsilon_+ \varepsilon_- = \text{const} \end{cases}$$

$\Rightarrow \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 = \varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 = \text{const.}$

e $\varepsilon_+ \varepsilon_- = \varepsilon_{eig}^2$ (4D)

$\downarrow$

rappresentazione geometrica



$\det \sigma_{xy} = \varepsilon_{4D}^2 = \det D = \varepsilon_{eig}^2$

L = termine di accoppiamento x-y
(correlazione)

ε_{prj} = proiezione 2-D della ε_{eig}
su un piano (x oppure y),
"emittanza proiettata"

$$\varepsilon_{eig}^2 = \varepsilon_+ \varepsilon_-$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{prj}^2 &= \varepsilon_{eig}^2 + L^2 = \varepsilon_+ \varepsilon_- + L^2 \\ \varepsilon_{prj} &= \varepsilon_+ - L = \varepsilon_- + L \end{aligned}\right\} \text{vedi figura}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 = 2\left(\varepsilon_{prj}^2 + L^2\right)$$

$$\Rightarrow (\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2 - 4\varepsilon_+ \varepsilon_- = 4L^2$$