LUMINOSITÀ e BRILLANZA: fasci di PARTICELLE CARICHE e FOTONI.

• LUMINOSITÀ (LUMINOSITY)

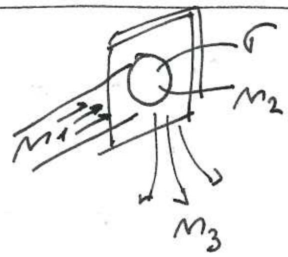
Consideriamo un fascio di particelle (n_1) che incide su un bersaglio fisso contenente n_2 particelle. Il numero di particelle n_3 generato dall'urto ("numero di eventi") nell'unità di tempo è, in generale:

$$\frac{dn_3}{dt} \propto n_1 \cdot n_2$$

Si definisce la LUMINOSITÀ ISTANTANEA:

$$\boxed{L = \frac{dn_3}{dt}\frac{1}{\sigma}, \quad \left[\frac{\text{eventi}}{\text{sec}\cdot m^2}\right]}$$

dove σ = superficie di interazione



Integrando sul tempo di interazione:

$$N_3 = \int_{\Delta t} \frac{dn_3}{dt}\,dt = \int_{\Delta t} \sigma L(t)\,dt \equiv \sigma \mathcal{L}$$

ed $\mathcal{L}$ = LUMINOSITÀ INTEGRATA (nel tempo), in unità di BARN INVERSI

1 BARN = $10^{-24}\,cm^2 = 10^{-28}\,m^2$

Estendiamo il concetto di $L, \mathcal{L}$ a fasci collidenti. In tal caso l'area di interazione è determinata dalle dimensioni trasverse dei fasci al punto di interazione. La probabilità di generare specifici eventi è data dalla SEZIONE D'URTO caratteristica di quegli eventi:

$$\boxed{L = \frac{N_1 N_2}{2\pi\sqrt{\sigma_{x1}^2+\sigma_{x2}^2}\sqrt{\sigma_{y1}^2+\sigma_{y2}^2}}\,k f_{rep}}$$

dove: N_1, N_2 = # particelle in ogni pacchetto

k = # pacchetti in un "treno" di impulsi (nel sincrotrone)

f_{rep} = frequenza di ripetizione dell'acceleratore (rivoluzione nel sincrotrone)

$\hookrightarrow \propto \frac{n_1 n_2}{\text{Area}}$

$\hookrightarrow \left[\frac{\text{eventi}}{\text{sec}\cdot m^2}\right]$

Possiamo riscrivere la precedente in funzione delle correnti di carica MEDIE accumulate nel sincrotrone:

$$L = \frac{N_1 N_2}{2\pi\sqrt{\ }\sqrt{\ }}kf \cdot \frac{q_1 q_2}{q_1 q_2}\cdot\frac{kf}{kf} = \frac{I_{1,tot}\, I_{2,tot}}{2\pi\sqrt{\ }\sqrt{\ }}\left(\frac{1}{q_1 q_2\, kf}\right).$$

Assumiamo infine $\sigma_{x1} = \sigma_{x2}$ e $\sigma_{y1} = \sigma_{y2}$; $\varepsilon_{x1} = \varepsilon_{x2}$ e $\varepsilon_{y1} = \varepsilon_{y2}$:

$$L = \frac{N_1 N_2 k f}{4\pi\,\sigma_x^*\sigma_y^*} = \frac{N_1 N_2 k f}{4\pi\sqrt{\varepsilon_x\varepsilon_y}\sqrt{\beta_x^*\beta_y^*}} \Rightarrow$$

OTTICA "LOW-β" al PUNTO di INTERAZIONE

• BRILLANZA di un fascio di particelle CARICHE (BRIGHTNESS)

Per semplicità assumiamo un regime ultra-relativistico ($\beta \simeq 1$). La brillanza è la densità di particelle nello spazio delle fasi, per unità di tempo:

$$F = \frac{q\,dN}{dt} \quad \text{FLUSSO di CARICA} \equiv I \ [A]$$

$$\boxed{B^e = \frac{I}{\varepsilon_x \varepsilon_y}}$$ $\longrightarrow$ per renderla INVARIANTE in presenza di accelerazione: $$B^e_n = \frac{I}{\varepsilon_{nx}\varepsilon_{ny}} \quad \left(= \frac{B^e}{\gamma^2}\right)$$

Possiamo estendere il concetto allo spazio-fasi 6-D includendo l'emittanza LONGITUDINALE $\varepsilon_z = c\,\sigma_t\,\sigma_\delta$. Allora:

$$B^e(6D) = \frac{(Q/c)}{\varepsilon_x \varepsilon_y \sigma_t \sigma_\delta} = \frac{I/c}{\varepsilon_x \varepsilon_y \sigma_\delta}$$ (a meno di costanti per definire I in funzione di σ_t).

• BRILLANZA di un fascio di FOTONI (BRILLIANCE)

Assumiamo un fascio di fotoni (radiazione) descritto trasversalmente da un MODO GAUSSIANO (TEM_{00}) propagantesi nello spazio vuoto. Si può dimostrare che l'EMITTANZA TRASVERSA $\boxed{\varepsilon_{ph} = \sigma_u \sigma_{u'} = \lambda/4\pi}$, dove λ è la lunghezza d'onda centrale della radiazione.

La brillanza è la quantità che descrive il FLUSSO di RADIAZIONE per unità di BANDA SPETTRALE alla SORGENTE. Laddove la sorgente della radiazione è un fascio di particelle cariche (ultra-relativistiche), abbiamo:

$$\boxed{B^{ph} = \frac{\phi}{4\pi^2 \Sigma_x \Sigma_{x'} \Sigma_y \Sigma_{y'}}}$$ dove: $$\phi = \frac{dN_{ph}}{dt\,(d\omega/\omega)}$$

$$\Sigma_x = \sqrt{\sigma_{x,e}^2 + \sigma_{x,ph}^2}\ , \text{ ecc...}$$

In generale: $$\sigma_{x,e} = \sqrt{\varepsilon_x \beta_x + (D_x \sigma_\delta)^2}$$
$$\sigma_{x',e} = \sqrt{\frac{\varepsilon_x}{\beta_x} + (D_x' \sigma_\delta)^2} \quad \text{a } \alpha_x = 0\ , \text{ ecc...}$$

Assumiamo $\alpha_{x,y} = 0$, $D_x = D_x' = 0$. Descriviamo analogamente:

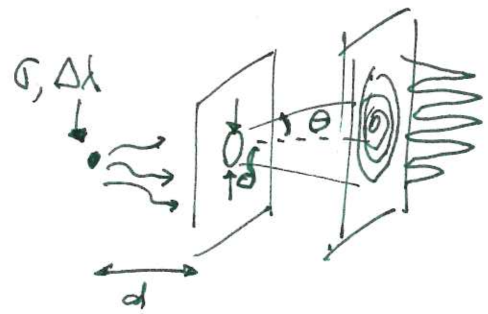
$\sigma_{x,ph} = \sqrt{\varepsilon_{ph}\beta_{x,ph}}$, $\sigma_{x',ph} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{x,ph}}{\beta_{x,ph}}}$, ecc ... Allora B^{ph} è MASSIMIZZATA quando: $\beta_{x,e} = \beta_{x,ph} = \beta_{y,e} = \beta_{y,ph}$: ~~...~~ [dim.]

$$\hat{B}^{ph} = \frac{\phi}{4\pi^2(\varepsilon_x + \varepsilon_{ph})(\varepsilon_y + \varepsilon_{ph})}$$ [N.B.: abbiamo assunto $\varepsilon_{x,ph} = \varepsilon_{y,ph}$]

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_{x,y} \equiv \varepsilon_{ph} = \frac{\lambda}{4\pi}}$$, LIMITE DI DIFFRAZIONE e $B^{ph} = \frac{\phi}{\lambda^2}$.

COERENZA TRASVERSA e LONGITUDINALE (fascio di fotoni)

Dal punto di vista sperimentale, la coerenza TRASVERSA e LONGITUDINALE di un impulso di RADIAZIONE si traduce in uno schema di interferenza prodotto dal passaggio del fascio attraverso un'apertura (Young's exp.)



- Una sorgente con dimensione trasversa σ e larghezza spettrale $\Delta\lambda$ tende a ridurre la visibilità del pattern di interferenza.
- Il primo minimo del pattern è predetto dalla teoria di DIFFRAZIONE all'angolo $\theta = \frac{\lambda}{\delta}$

$\Rightarrow$ richiediamo $\Delta\theta(\lambda) = \frac{\Delta\lambda}{\delta} < \theta$, cioè:

$$\boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda} < 1 \Leftrightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu} < 1}$$

$\Rightarrow$ def. LUNGHEZZA di COERENZA $L_{coh} := \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$

$$\boxed{L_{coh} > \lambda}$$

significato di L_c: 2 onde che si trovano in fase a $t=0$, si troveranno in opposizione di fase al tempo: $\Delta t = \frac{R}{\Delta\nu} = \underline{L_c}$.

- Richiediamo analogamente che lo spread in angolo indotto da $\sigma \neq 0$ sia: $\Delta\theta = \frac{\sigma}{d} \leq \frac{\lambda}{\delta}$
- L'area coperta dall'emissione in corrispondenza delle aperture sarà dunque:

$$A \simeq \delta^2 \simeq \left(\frac{\lambda d}{\sigma}\right)^2$$

- Il FLUSSO di FOTONI COERENTI TRASVERSALMENTE

$$\Phi_{coh} \simeq \frac{FA}{d^2\Omega} \simeq F\frac{\lambda^2 d^2}{\sigma^2}\frac{1}{\Omega d^2} = F\frac{\lambda^2}{\Omega\sigma^2} \propto B^\gamma\lambda^2 \checkmark$$

FLUSSO TOTALE — ANGOLO SOLIDO di emissione — BRILLIANCE

FLUSSO COERENTE.

Sia $F = \frac{N_\gamma}{c\Delta t}$ il flusso totale di fotoni in una durata dell'impulso Δt.

La frazione di fotoni contenuta nella L_c sarà $n_c'' = F L_c = F\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$.

La brillanza al limite di diffrazione: $B^\gamma \propto \frac{F}{\sigma_{ph}^2\theta^2}\frac{1}{(\Delta\lambda/\lambda)} \rightarrow \frac{F}{\lambda^2}\frac{1}{(\Delta\lambda/\lambda)} = \frac{F}{\lambda\Delta\lambda}$

Risulta che la frazione di fotoni contenuta nel VOLUME ($\perp$, //) di COERENZA è:

$$n_c = \left(F \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \right)_{D.L.} = B_{D.L.} \, \lambda^3 \quad *$$

$\Rightarrow$ tale frazione tende a valori piccoli al DIMINUIRE di λ, a PARITÀ di BRILLANZA SPETTRALE. (è più difficile ottenere coerenza totale a λ piccole).

BRILLANZA: OTTIMIZZAZIONE dell'OTTICA di macchina.

Richiamiamo la def. di B_{ph} in funzione delle dimensioni dei fasci di elettroni e fotoni, introducendo il FATTORE di COUPLING per il fascio accelerato: $\varepsilon_y = k\varepsilon_x$.

Ricordiamo la dimensione e divergenza angolare di un fascio di radiazione ideale, cioè emesso da particelle cariche in un elemento magnetico (ONDULATORE) lungo L → distribuzione GAUSSIANA:

$$\sigma_{r,ph} = \frac{\sqrt{\lambda L}}{2\pi}, \quad \sigma_{r',ph} = \sqrt{\frac{\lambda}{4L}} \quad \text{t.c.} \quad \sigma_r \sigma_{r'} = \varepsilon_{ph} = \frac{\lambda}{4\pi}.$$

$$\Rightarrow \gamma_{ph} = \frac{\sigma_{r'}}{\sigma_r} = \frac{\pi}{L}, \quad \beta_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_{r'}} = \frac{L}{\pi}$$ (funzione di betatrone "equivalente", alla sorgente)

Assumiamo infine che nel punto di emissione $\alpha = \alpha_r = 0$ (WAIST).

La componente "geometrica" della B_{ph} diventa; in ZONE NON DISPERSIVA:

$$\frac{B_{ph}}{\left(\frac{\Phi}{4\pi^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{(\dots)}} \longrightarrow \sqrt{\varepsilon_x\beta_x + \varepsilon_r\beta_r}\sqrt{\frac{\varepsilon_x}{\beta_x} + \frac{\varepsilon_r}{\beta_r}}\sqrt{\varepsilon_y\beta_y + \varepsilon_r\beta_r}\sqrt{\frac{\varepsilon_y}{\beta_y} + \frac{\varepsilon_r}{\beta_r}} =$$

$$= \boxed{\begin{array}{c}\text{imponiamo il}\\ \text{LIMITE di}\\ \text{DIFFRAZIONE}\\ \varepsilon_x \equiv \varepsilon_r\end{array}} = \sqrt{\varepsilon_r(\beta_x + \beta_r)}\sqrt{\varepsilon_r\left(\frac{1}{\beta_x} + \frac{1}{\beta_r}\right)}\sqrt{\varepsilon_r(k\beta_y + \beta_r)}\sqrt{\varepsilon_r\left(\frac{k}{\beta_y} + \frac{1}{\beta_r}\right)} = \dots$$

$$\frac{B_{ph}}{\left(\frac{\Phi}{4\pi^2}\right)} = \frac{1}{\varepsilon_r^2}\frac{\beta_r\sqrt{\beta_x\beta_y}}{(\beta_x + \beta_r)\sqrt{(k\beta_y + \beta_r)(\beta_y + k\beta_r)}} =$$ distinguiamo ora 4 casi, al variare di k

① $k \approx 1$ (coupling 100% or "round beam")

$$\frac{B_{ph}}{\left(\frac{\Phi}{4\pi^2}\right)} = \frac{1}{\varepsilon_r^2}\frac{\beta_r\sqrt{\beta_x\beta_y}}{(\beta_x + \beta_r)(\beta_y + \beta_r)} \longrightarrow \text{MAX per } \beta_x = \beta_y = \beta_r = \frac{L}{\pi},$$

$$= \frac{1}{4\varepsilon_r^2}$$

② $k \ll 1$ & $\beta_y \approx \beta_r$ ("flat beam" + "matched beam")

$$\frac{B_{ph}}{\left(\frac{\Phi}{4\pi^2}\right)} \approx \frac{1}{\varepsilon_r^2}\frac{\beta_r\sqrt{\beta_x\cancel{\beta_y}}}{(\beta_x + \beta_r)\sqrt{\cancel{\beta_y}\beta_r}} = \frac{1}{\varepsilon_r^2}\frac{\sqrt{\beta_x\beta_r}}{(\beta_x + \beta_r)} \longrightarrow \text{MAX per } \beta_x = \beta_y \approx \beta_r = \frac{L}{\pi},$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_r^2}$$

③ $k \ll 1$ & $k\beta_y \approx \beta_r$

$$\frac{B_{ph}}{\left(\frac{\Phi}{4\pi^2}\right)} \approx \frac{1}{\varepsilon_r^2}\,\frac{\beta_r\sqrt{\beta_x\cancel{\beta_y}}}{(\beta_x+\beta_r)\sqrt{k\beta_y+\beta_r}\,\cancel{\sqrt{\beta_y}}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}\,\varepsilon_r^2}\,\frac{\sqrt{\beta_x\beta_r}}{(\beta_x+\beta_r)} \longrightarrow \text{MAX per } \beta_x=\beta_r=\frac{L}{\pi},\; = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\varepsilon_r^2}$$

④ $k \ll 1$ & $k\beta_r \approx \beta_y$

$$\frac{B_{ph}}{\left(\frac{\Phi}{4\pi^2}\right)} \approx \frac{1}{\varepsilon_r^2}\,\frac{\beta_r\sqrt{\beta_x\beta_y}}{(\beta_x+\beta_r)\sqrt{\beta_y+k\beta_r}\,\sqrt{\beta_r}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}\,\varepsilon_r^2}\,\frac{\sqrt{\beta_x\beta_r}}{(\beta_x+\beta_r)} \longrightarrow \text{MAX per } \beta_x=\beta_r=\frac{L}{\pi},\; = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\varepsilon_r^2}$$

FLUSSO COERENTE

Richiamiamo la def di flusso coerente come la frazione di flusso contenuta nel cono angolare intrinseco della radiazione:

$$\phi_{coh} := \phi\,\frac{\delta\theta_x\,\delta\theta_y}{\Sigma_{x'}\Sigma_{y'}} = \phi\,\frac{\sigma_{r'}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_x}{\beta_x}+\frac{\varepsilon_r}{\beta_r}}\sqrt{\frac{\varepsilon_y}{\beta_y}+\frac{\varepsilon_r}{\beta_r}}} = \phi\,\frac{\lambda}{4L}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{2\varepsilon_r}{\beta_r}}\sqrt{\frac{k\varepsilon_r}{\beta_y}+\frac{\varepsilon_r}{\beta_r}}} =$$

$$\varepsilon_x=\varepsilon_r=\frac{\lambda}{4\pi}, \quad \varepsilon_y = k\varepsilon_x, \quad \beta_x=\beta_r=\frac{L}{\pi}$$

$$= \phi\left(\frac{\lambda}{4L}\right)\left(\frac{\beta_r}{\sqrt{2}\,\varepsilon_r}\right)\frac{\sqrt{\beta_y}}{\sqrt{\beta_y+k\beta_r}} = \frac{\phi}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\beta_y}{\beta_y+k\frac{L}{\pi}}} =$$

$$= \begin{cases} \beta_y \gg k\frac{L}{\pi}, & \phi_{coh} \simeq \frac{\phi}{\sqrt{2}} \\ \beta_y \approx k\frac{L}{\pi}\;(=k\beta_x), & \phi_{coh} \simeq \frac{\phi}{2} \quad \longleftarrow \text{MAX } \phi_{coh},\ \text{MAX } \frac{B_{ph}}{\left(\frac{\phi}{4\pi^2}\right)}\,! \\ \beta_y \ll k\frac{L}{\pi}, & \phi_{coh} \ll \phi \end{cases}$$

N.B. : la def. di ϕ_{coh} è ben costruita perché per $\varepsilon_x, \varepsilon_y \to 0$, $\Sigma_{x'}, \Sigma_{y'} \to \sigma_{r'} \Rightarrow \phi_{coh} \equiv \phi$.

N.B.2 : la condizione $\beta_x \approx \beta_r$, $\beta_y \approx k\beta_r$ con $\varepsilon_y \simeq k\varepsilon_x \approx k\varepsilon_r$ determina il MAX flusso coerente e $B_{ph}(\phi)$ perché SOVRAPPONE e^- e radiazione in ENTRAMBI i PIANI (ELLISSI OMOTETICHE).